Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. В. Иванов, О задаче об оптимальной остановке в модели с компенсируемым отказом от вознаграждения, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 2, 241–248

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5261>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:13:51

УДК 519.21

О задаче об оптимальной остановке в модели с компенсируемым отказом от вознаграждения

Р. В. Иванов

В работе рассмотрена задача об оптимальной остановке с возможным компенсируемым отказом от вознаграждения. Обсуждаются функционалы экспоненциального броуновского движения. Оптимальный момент остановки определяется на множестве всех конечных моментов остановки. Рассмотренные функционалы соответствуют выплатам по стандартным биржевым контрактам американского типа.

Библиография: 24 названия.

1. Введение. Во многих работах, относящихся к области современной вероятностной теории оптимального управления, задача об оптимальной остановке рассматривается для различных функционалов вознаграждения (по поводу терминологии здесь и далее см. [1]) от экспоненциальных процессов, в частности, геометрического броуновского движения, диффузионных процессов, экспоненциальных процессов Леви. Причиной подобного интереса является множество статистических работ, обосновывающих прикладную важность развития теории оптимальных правил остановки для таких процессов. Из работ, в которых задачи об оптимальной остановке решаются для различных функционалов геометрического броуновского движения, отметим [2]–[9]. Диффузионные процессы обсуждаются в [10], [11]. Экспоненциальные процессы Леви рассматриваются в [12]. См. также монографии [13], [14] и [15].

При этом зачастую даже для простейших функционалов решение такого типа задач в явном виде не существует или оно неизвестно (о численных методах расчетов, см. работы [16]–[20]). Так, например, для функционалов вида

$$f_t = e^{-\beta t}(S_t - K)^+, \quad f_t = e^{-\beta t}(K - S_t)^+, \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

где $\beta \geq 0$, $K > 0$, а $S = (S_t)_{t \geq 0}$ – процесс геометрического броуновского движения, задача об оптимальной остановке на множестве всех конечных моментов остановки при определенном соотношении между параметрами модели решения не имеет (см. подробнее [15], [7]). При этом на множестве моментов остановки, принадлежащих конечному интервалу, решение задачи в явном виде неизвестно [21], [22].

В настоящей работе вместо (1.1) рассматриваются функционалы вида

$$f_t^1 = e^{-\beta t} \max((K - S_t)^+, h), \quad f_t^2 = e^{-\beta t} \max((S_t - K)^+, h), \quad (1.2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00740-а).

$t \geq 0$, где h – некоторая положительная константа. Константа h в данном случае соответствует компенсации в случае отказа от потенциального вознаграждения. В данном случае задача об оптимальной остановке имеет решение на множестве всех конечных моментов остановки. Нахождению этого решения и посвящена данная работа.

С точки зрения задач стохастической теории финансов функции вознаграждения (1.2) соответствуют выплатам по контракту с дефолтом. О различных моделях подобного рода см. работы [23] (биномиальная модель), [24].

В п. 2 формулируется задача об оптимальной остановке и приводятся полученные результаты. Пункт 3 посвящен доказательствам. Далее следует список литературы.

2. Результаты. Предполагается, что процесс $S = (S_t)_{t \geq 0}$ есть геометрическое броуновское движение с дифференциалом

$$dS_t = S_t(r dt + \sigma dW_t), \quad S_0 > 0, \quad (2.1)$$

где $W = (W_t)_{t \geq 0}$ – стандартное броуновское движение, $r \geq 0$ – среднее, а $\sigma > 0$ – волатильность.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех конечных моментов остановки $\tau \geq 0$. В работе будут рассматриваться задачи об оптимальной остановке

$$\mathbb{C}(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbb{E}_x f_\tau^1(\beta, S, h) \quad (2.2)$$

при условии

$$r > \frac{\sigma^2}{2} \quad (2.3)$$

и

$$\mathbb{C}(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbb{E}_x f_\tau^2(\beta, S, h) \quad (2.4)$$

при условии

$$r < \frac{\sigma^2}{2}, \quad (2.5)$$

где через $\mathbb{E}_x$ обозначается математическое ожидание при условии $S_0 = x$, а f^1 и f^2 определяются (1.2). Как обычно, необходимо найти как сами функции $\mathbb{C}(x)$ из (2.2)–(2.4), так и оптимальные моменты остановки, т.е. $\tau^* \in \mathfrak{M}$ такие, на которых достигаются значения функций (2.2)–(2.4).

Заметим, что по смыслу задачи $0 < h < K$ в (2.2). При этом, если условия (2.3) или (2.5) не выполнены, то в соответствующих задачах об оптимальной остановке без дефолта оптимальный момент остановки в классе $\mathfrak{M}$ существует (см. [13], [15]).

Будем предполагать, что

$$\beta \geq r. \quad (2.6)$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть γ_1 и γ_2 определяются в (3.5). Предположим, что выполнено условие (2.6) и

$$0 < h < \frac{\gamma_1 K}{1 + \gamma_1}. \quad (2.7)$$

Тогда решением задачи (2.2), (2.3) является функция

$$\mathbb{C}(x) = \begin{cases} K - x, & x \leq x_*, \\ c_1 x^{\gamma_1} + c_2 x^{\gamma_2}, & x_* < x < x^*, \\ h, & x \geq x^*, \end{cases}$$

где c_1 и c_2 определяются из (3.7), (3.8), а x_* и x^* являются единственным решением системы (3.11), (3.12), и момент остановки

$$\tau^* = \inf\{t : S_t = x_* \vee S_t = x^*\}.$$

При этом

$$\mathbb{C}(x) = \mathbb{E}_x e^{-\beta\tau^*} \max((K - S_{\tau^*})^+, h).$$

Рис. 1. Вид функции вознаграждения в теореме 2.1

Рис. 2. Вид функции вознаграждения в теореме 2.2

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если положить в теореме 2.1 $h = 0$, то нетрудно заметить, что тогда система уравнений (3.13)–(3.14) не будет иметь решения. Этот случай соответствует $c_2 = 0$ и $\tau^* = \infty$ с неотрицательной вероятностью. См. подробнее [15; гл. VIII, § 2].

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть в условии (2.6) выполнено строгое неравенство. Тогда решение задачи (2.4), (2.5) есть функция

$$\mathbb{C}(x) = \begin{cases} x - K, & x \geq x^*, \\ c_1 x^{\gamma_1} + c_2 x^{\gamma_2}, & x_* < x < x^*, \\ h, & x \leq x_*, \end{cases}$$

где γ_1, γ_2 определяются в (3.5), c_1, c_2 — из (3.37), (3.38), а x_*, x^* — единственное решение системы уравнений (3.41), (3.42), и момент остановки

$$\tau^* = \inf\{t : S_t = x_* \vee S_t = x^*\}.$$

При этом

$$\mathbb{C}(x) = \mathbb{E}_x e^{-\beta\tau^*} \max((S_{\tau^*} - K)^+, h).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В случае $h = 0$ и $\beta = r$ задача (2.4), (2.5) решения не имеет, поскольку уже процесс

$$(e^{\sigma W_t - \sigma^2 t/2} - K)^+$$

— субмартингал. В случае $h > 0$ и $\beta = r$ решения также не существует. В этом случае $\gamma_1 = 1$ и система (3.41), (3.42) решения не имеет.

3. Доказательства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Заметим, что функция

$$g(x) := \max((K - x)^+, h) \quad (3.1)$$

непрерывна. Следуя общим методам решения задач об оптимальной остановке (см. гл. III.8 [1], гл. IV.8 [13]) и используя марковость процесса S , будем искать наименьшую эксцессивную мажоранту $\mathbb{C}(x)$ функции $g(x)$ как решение (функция $V^*(x)$ и граничные точки x_* , x^*) следующей задачи со свободной границей:

$$LV(x) = \beta V(x), \quad x_* \leq x \leq x^*, \quad (3.2)$$

$$V(x) = K - x, \quad 0 < x \leq x_*, \quad V(x) = h, \quad x \geq x^*, \quad (3.3)$$

$$V'(x_*^-) = 0, \quad V'(x_*^+) = 1, \quad (3.4)$$

где

$$L = rx \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

– инфинитезимальный оператор процесса $S = (S_t)_{t \geq 0}$ и уравнения (3.4) соответствуют условиям гладкости.

Общее решение уравнения (3.2) имеет вид (см. § 2, гл. VI [15])

$$V(x) = c_1 x^{\gamma_1} + c_2 x^{\gamma_2},$$

где c_1 и c_2 – произвольные константы, а

$$\gamma_i = \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \right) - (-1)^i \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \right)^2 + \frac{2\beta}{\sigma^2}}, \quad i = 1, 2. \quad (3.5)$$

При этом $\gamma_1 \geq 1$ и $\gamma_2 < 0$.

Используя условие (3.3), имеем, что

$$c_1 x_*^{\gamma_1} + c_2 x_*^{\gamma_2} = K - x_*, \quad c_1 (x^*)^{\gamma_1} + c_2 (x^*)^{\gamma_2} = h, \quad (3.6)$$

откуда

$$c_1 = \frac{(K - x_*)(x^*)^{\gamma_2} - h x_*^{\gamma_2}}{x_*^{\gamma_1} (x^*)^{\gamma_2} - (x^*)^{\gamma_1} x_*^{\gamma_2}}, \quad (3.7)$$

$$c_2 = \frac{h x_*^{\gamma_1} - (K - x_*)(x^*)^{\gamma_1}}{x_*^{\gamma_1} (x^*)^{\gamma_2} - (x^*)^{\gamma_1} x_*^{\gamma_2}}. \quad (3.8)$$

Из условий гладкости (3.4) имеем на граничные точки x_* и x^* систему уравнений

$$\gamma_1 c_1 (x^*)^{\gamma_1 - 1} + \gamma_2 c_2 (x^*)^{\gamma_2 - 1} = 0, \quad (3.9)$$

$$\gamma_1 c_1 (x_*)^{\gamma_1 - 1} + \gamma_2 c_2 (x_*)^{\gamma_2 - 1} = 1, \quad (3.10)$$

где c_1 и c_2 определяются (3.7) и (3.8). С учетом (3.7), (3.8) система (3.9), (3.10) эквивалентна уравнениям системы

$$\left(\frac{x_*}{x^*} \right)^{\gamma_1} = \frac{\gamma_2 (K - x_*) - x_*}{\gamma_2 h}, \quad (3.11)$$

$$\left(\frac{x_*}{x^*} \right)^{\gamma_2} = \frac{\gamma_1 (K - x_*) - x_*}{\gamma_1 h}, \quad (3.12)$$

которую можно записать в виде

$$\frac{\gamma_2 K - (1 + \gamma_2)x_*}{x_*^{\gamma_1}} = \frac{\gamma_2 h}{(x^*)^{\gamma_1}}, \quad (3.13)$$

$$\frac{\gamma_1 K - (1 + \gamma_1)x_*}{x_*^{\gamma_2}} = \frac{\gamma_1 h}{(x^*)^{\gamma_2}}. \quad (3.14)$$

При этом из условия (2.3) следует, что $\gamma_2 < -1$, и по смыслу задачи $0 < x_* < K - h < x^*$. Отсюда с учетом того, что $\gamma_1 > 1$, и в силу (3.13), (3.14) следует, что

$$x_* < \frac{\gamma_1 K}{1 + \gamma_1}. \quad (3.15)$$

Уравнения (3.13), (3.14) могут быть записаны в виде

$$x_1^*(x_*) = (|\gamma_2| h)^{1/\gamma_1} x_* (|\gamma_2| K + (1 + \gamma_2)x_*)^{-1/\gamma_1}, \quad (3.16)$$

$$x_2^*(x_*) = (\gamma_1 h)^{1/\gamma_2} x_* (\gamma_1 K - (1 + \gamma_1)x_*)^{-1/\gamma_2}. \quad (3.17)$$

Нетрудно заметить, что $x_1^*(0) = x_2^*(0) = 0$,

$$(x_1^*)'(x) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < \frac{\gamma_1 K}{1 + \gamma_1}, \quad x_2^*\left(\frac{\gamma_1 K}{1 + \gamma_1}\right) = 0, \quad (3.18)$$

а также существует некоторое $\varepsilon > 0$ такое, что

$$(x_2^*)'(x) > (x_1^*)'(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < \varepsilon, \quad (3.19)$$

и существует единственное $\bar{x}$ такое, что

$$0 < \bar{x} < \frac{\gamma_1 K}{1 + \gamma_1} : \quad (x_2^*)'(\bar{x}) = 0. \quad (3.20)$$

Отсюда существует единственное решение

$$x_* : \quad x_1^*(x_*) = x_2^*(x_*) = x^* \quad (3.21)$$

и (x_*, x^*) – единственное решение системы (3.9), (3.10).

Положим

$$\bar{V}(x; x_1, x_2) := \frac{(K - x_1)(x_2/x_1)^{\gamma_2} - h}{(x_2/x_1)^{\gamma_2} - (x_2/x_1)^{\gamma_1}} \left(\frac{x}{x_1}\right)^{\gamma_1} + \frac{h - (K - x_1)(x_2/x_1)^{\gamma_1}}{(x_2/x_1)^{\gamma_2} - (x_2/x_1)^{\gamma_1}} \left(\frac{x}{x_1}\right)^{\gamma_2}. \quad (3.22)$$

Тогда наша задача со свободной границей имеет решение

$$V^*(x) = \begin{cases} h, & x \geq x^*, \\ \bar{V}(x; x_*, x^*), & x_* < x < x^*, \\ K - x, & 0 < x \leq x_*. \end{cases} \quad (3.23)$$

Теперь необходимо доказать, что найденная функция $V^*(x)$ совпадает с ценой $\mathbb{C}(x)$. Будем использовать метод, представленный в § 2 гл. VIII [15], заключающийся в применении формулы Ито–Мейера к функции $F(t, x) = e^{-\beta t} V^*(x)$. Вместо

производных $V^{*''}(x_*)$ и $V^{*''}(x^*)$ возьмем, например, $V^{*''}(x_* + 0)$ и $V^{*''}(x^* - 0)$. Имеем

$$e^{-\beta t} V^*(S_t) - V^*(S_0) = \int_0^t e^{-\beta u} [LV^*(S_u) - (\lambda + r)V^*(S_u)] du + M_t, \quad (3.24)$$

где

$$M_t = \int_0^t e^{-\beta u} \sigma S_u V^{*'}(S_u) dW_u. \quad (3.25)$$

Поскольку при $0 < x \leq x_*$ и $x \geq x^*$

$$LV^*(x) - \beta V^*(x) \leq 0, \quad (3.26)$$

из (3.24) получаем, что при $S_0 = x$

$$V^*(x) \geq e^{-\beta t} V^*(S_t) - M_t. \quad (3.27)$$

Из (3.25), очевидно, следует, что процесс $M = (M_t)_{t \geq 0}$ является локальным мартингалом. Пусть (τ_n) — его локализующая последовательность и $\tau \in \mathfrak{M}_0^\infty$. Тогда из (3.27) следует, что

$$V^*(x) \geq \mathbb{E}_x e^{-\beta(\tau_n \wedge \tau)} V^*(S_{\tau_n \wedge \tau}) - \mathbb{E} M_{\tau_n \wedge \tau} = \mathbb{E}_x e^{-\beta(\tau_n \wedge \tau)} V^*(S_{\tau_n \wedge \tau})$$

и по лемме Фату

$$V^*(x) \geq \varliminf_n \mathbb{E}_x e^{-\beta(\tau_n \wedge \tau)} V^*(S_{\tau_n \wedge \tau}) \geq \mathbb{E}_x e^{-\beta\tau} V^*(S_\tau),$$

откуда

$$V^*(x) \geq \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbb{E}_x e^{-\beta\tau} V^*(S_\tau) \geq \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbb{E}_x e^{-\beta\tau} g(S_\tau) = \mathbb{C}(x). \quad (3.28)$$

Теперь надо доказать, что

$$V^*(x) = \mathbb{E}_x e^{-\beta\tau^*} g(S_{\tau^*}). \quad (3.29)$$

Заметим, что при $0 < x \leq x_*$ или $x \geq x^*$ вероятность $P_x(\tau^* = 0) = 1$ и поэтому (3.29) выполнено.

Пусть теперь $x_* < x < x^*$. В этом случае

$$LV^*(x) - \beta V^*(x) = 0,$$

и из (3.24) получаем, что

$$V^*(x) = e^{-\beta(\tau_n \wedge \tau^*)} V^*(S_{\tau_n \wedge \tau^*}) - M_{\tau_n \wedge \tau^*}. \quad (3.30)$$

Из (3.30) следует, что

$$V^*(x) = \mathbb{E}_x e^{-\beta(\tau_n \wedge \tau^*)} V^*(S_{\tau_n \wedge \tau^*}). \quad (3.31)$$

Поскольку $0 \leq V^*(S_{\tau_n \wedge \tau^*}) \leq K$, к (3.31) можно применить теорему Лебега о мажорируемой сходимости. Имеем

$$V^*(x) = \mathbb{E}_x e^{-\beta\tau^*} V^*(S_{\tau^*}), \quad (3.32)$$

откуда в силу вида момента остановки τ^* следует (3.29).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. В данном случае задача со свободной границей выглядит как

$$LV(x) = \beta V(x), \quad x_* \leq x \leq x^*, \quad (3.33)$$

$$V(x) = x - K, \quad x \geq x^*, \quad V(x) = h, \quad 0 < x \leq x_*, \quad (3.34)$$

$$V'(x_*+) = 0, \quad V'(x^*-) = 1. \quad (3.35)$$

Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 2.1, получаем вместо (3.6)

$$c_1 x_*^{\gamma_1} + c_2 x_*^{\gamma_2} = h, \quad c_1 (x^*)^{\gamma_1} + c_2 (x^*)^{\gamma_2} = x^* - K, \quad (3.36)$$

и, соответственно, вместо (3.37), (3.38) –

$$c_1 = \frac{h(x^*)^{\gamma_2} - (x^* - K)x_*^{\gamma_2}}{x_*^{\gamma_1}(x^*)^{\gamma_2} - (x^*)^{\gamma_1}x_*^{\gamma_2}}, \quad (3.37)$$

$$c_2 = \frac{(x^* - K)x_*^{\gamma_1} - h(x^*)^{\gamma_1}}{x_*^{\gamma_1}(x^*)^{\gamma_2} - (x^*)^{\gamma_1}x_*^{\gamma_2}}. \quad (3.38)$$

Вместо (3.9), (3.10) имеем

$$\gamma_1 c_1 (x^*)^{\gamma_1-1} + \gamma_2 c_2 (x^*)^{\gamma_2-1} = 1, \quad (3.39)$$

$$\gamma_1 c_1 (x_*)^{\gamma_1-1} + \gamma_2 c_2 (x_*)^{\gamma_2-1} = 0, \quad (3.40)$$

что эквивалентно системе

$$\frac{(\gamma_2 - 1)x^* - \gamma_2 K}{(x^*)^{\gamma_1}} = \frac{\gamma_2 h}{x_*^{\gamma_1}}, \quad (3.41)$$

$$\frac{(\gamma_1 - 1)x^* - \gamma_1 K}{(x^*)^{\gamma_2}} = \frac{\gamma_1 h}{x_*^{\gamma_2}}. \quad (3.42)$$

Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 2.1, нетрудно получить, что система (3.41), (3.42) имеет единственное решение. Соответственно и задача со свободной границей (3.33), (3.35) имеет решение

$$V^*(x) = \begin{cases} S - x, & x \geq x^*, \\ \bar{V}(x; x_*, x^*), & x_* < x < x^*, \\ h, & 0 < x \leq x_*, \end{cases} \quad (3.43)$$

где

$$\bar{V}(x; x_1, x_2) := \frac{h(x^*/x_*)^{\gamma_2} - x^* + K}{(x^*/x_*)^{\gamma_2} - (x^*/x_*)^{\gamma_1}} \left(\frac{x}{x_1} \right)^{\gamma_1} + \frac{x^* - K - h(x^*/x_*)^{\gamma_1}}{(x^*/x_*)^{\gamma_2} - (x^*/x_*)^{\gamma_1}} \left(\frac{x}{x_1} \right)^{\gamma_2}. \quad (3.44)$$

Доказательство равенства $\mathbb{C}(x) = V^*(x)$ такое же, как и для теоремы 2.1. При этом,

$$0 \leq e^{-\beta(\tau_n \wedge \tau^*)} V^*(S_{\tau_n \wedge \tau^*}) \leq \sup_{t \geq 0} [e^{-(\beta-r)t} e^{\sigma W_t - \sigma^2 t/2}],$$

см. подробнее (44)–(45) § 2а гл. VIII [15], и условия теоремы Лебега о мажорируемой сходимости также выполнены.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Н. Ширяев, *Статистический последовательный анализ. Оптимальные правила остановки*, Наука, М., 1976.
- [2] P. Chalasani, S. Jha, “Randomized stopping times and American option pricing with transaction costs”, *Math. Finance*, **11**:1 (2001), 33–77.
- [3] N. El Karoui, I. Karatzas, “A new approach to the Skorohod problem, and its applications”, *Stochastics Stochastics Rep.*, **34**:1-2 (1991), 57–82.
- [4] S. D. Jacka, “Optimal stopping and the American put”, *Math. Finance*, **1**:2 (1991), 1–14.
- [5] R. Myneni, “The pricing of the American option”, *Ann. Appl. Probab.*, **2**:1 (1992), 1–23.
- [6] A. Szimayer, “Valuation of American options in the presence of event risk”, *Finance Stoch.*, **9**:1 (2005), 89–107.
- [7] А. Н. Ширяев, Ю. М. Кабанов, Д. О. Крамков, А. В. Мельников, “К теории расчетов опционов европейского и американского типов. II. Непрерывное время”, *ТВП*, **39**:1 (1994), 80–129.
- [8] L. Shepp, A. N. Shiryaev, “The Russian option: reduced regret”, *Ann. Appl. Probab.*, **3**:3 (1993), 631–640.
- [9] P. van Moerbeke, “On optimal stopping and free boundary problems”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **60**:2 (1976), 101–148.
- [10] N. Bellamy, M. Jeanblanc, “Incompleteness of markets driven by a mixed diffusion”, *Finance Stoch.*, **4**:2 (2000), 209–222.
- [11] E. Ekström, “Bounds for perpetual American option prices in a jump diffusion model”, *J. Appl. Probab.*, **43**:3 (2006), 867–873.
- [12] R. V. Ivanov, “On the pricing of American options in exponential Lévy markets”, *J. Appl. Probab.*, **44**:2 (2007), 409–419.
- [13] G. Peskir, A. Shiryaev, *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*, Lectures Math. ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [14] D. M. Salopek, *American Put Options*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **84**, Longman, Harlow, 1997.
- [15] А. Н. Ширяев, *Основы стохастической финансовой математики*, Фазис, М., 1998.
- [16] M. Broadie, J. Detemple, “American option valuation: new bounds, approximations, and a comparison of existing methods”, *Rev. Financ. Stud.*, **9**:4 (1996), 1211–1250.
- [17] J. Huang, M. G. Subrahmanyam, G. G. Yu, “Pricing and hedging American options: a recursive investigation method”, *Rev. Financ. Stud.*, **9**:1 (1996), 277–300.
- [18] R. V. Ivanov, “Discrete approximation of finite-horizon American-style options”, *Lithuanian Math. J.*, **45**:4 (2005), 525–536.
- [19] Р. В. Иванов, “О дискретной аппроксимации опционов американского типа”, *УМН*, **61**:1 (2006), 179–180.
- [20] D. Lamberton, “Error estimates for the binomial approximation of American put options”, *Ann. Appl. Probab.*, **8**:1 (1998), 206–233.
- [21] G. Peskir, “A change-of-variable formula with local time on curves”, *J. Theoret. Probab.*, **18**:3 (2005), 499–535.
- [22] G. Peskir, “On the American option problem”, *Math. Finance*, **15**:1 (2005), 169–181.
- [23] Р. В. Иванов, “О расчетах опционов американского типа в модели с дефолтом”, *Автомат. и телемех.*, 2007, № 3, 154–164.
- [24] V. Linetsky, “Pricing equity derivatives subject to bankruptcy”, *Math. Finance*, **16**:2 (2006), 255–282.

Р. В. Иванов

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН

E-mail: roivanov@yahoo.com

Поступило

09.07.2008

Исправленный вариант

19.04.2010