Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Суетин, О существовании нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва для аналитических функций, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 2, 290–303

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5262>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 11:50:02

О существовании нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва для аналитических функций

С. П. Суетин

В работе приводятся примеры двух аналитических на отрезке $[-1, 1]$ функций таких, что ни при каком $n = 2, 3, \dots$ для первой из них не существует нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва типа $(n, 2)$, а для второй – типа (n, n) (т.е. диагональных аппроксимаций). Благодаря полученному в работе критерию существования нелинейных аппроксимаций Паде–Фабера, оба примера вытекают из широко известных контрпримеров В. И. Буслаева соответственно к гипотезе Бейкера–Грейвс–Морриса и к гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса для аппроксимаций Паде степенного ряда. В частности, первая из этих функций – рациональная функция типа $(2, 3)$, а вторая также задается явным аналитическим выражением.

Библиография: 36 названий.

1. Введение

1.1. Аппроксимации Паде–Чебышёва являются одним из наиболее естественных обобщений классических аппроксимаций Паде степенного ряда (см. прежде всего [1] и приведенную там литературу, а также [2]–[5]). В последнее время такие рациональные аппроксимации нашли самые разнообразные применения в различных задачах прикладной математики, теоретической физики, механики, геофизики (см., например, [6]–[12]). Фактически аппроксимации Паде–Чебышёва (далее – АПЧ) наряду с классическими аппроксимациями Паде уже стали неотъемлемой частью научных и технических расчетов, отражением чего стало исследование оптимальных методов их вычисления (см. обзор [13]) и создание специальных программ для их нахождения в системах MAPLE (см. [14]) и MATLAB (см. [9]).

Вместе с тем, хорошо известно [15]–[19], что с существованием, единственностью и построением АПЧ дело обстоит не так просто, как с классическими аппроксимациями Паде степенного ряда. Этой теме и посвящена настоящая работа. Точнее, в работе приводятся примеры двух аналитических на отрезке $\Delta = [-1, 1]$ функций таких, что ни при одном $n = 2, 3, \dots$ для первой из них не существует нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва типа $(n, 2)$, а для второй – типа (n, n) (т.е. диагональных аппроксимаций). Эти примеры вытекают из хорошо известных контрпримеров Буслаева соответственно к гипотезе Бейкера–Грейвс–Морриса и к гипотезе

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00317) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3906.2008.1).

Бейкера–Гаммеля–Уиллса для классических аппроксимаций Паде степенного ряда (см. [20]–[22]). В частности, первая из этих функций – рациональная функция типа $(2, 3)$, вторая также задается явным аналитическим выражением и является алгебраической функцией. Отметим, что связь между нелинейными аппроксимациями Паде–Чебышёва и аппроксимациями Паде степенного ряда является частным случаем связи между нелинейными аппроксимациями Паде–Фабера и классическими аппроксимациями Паде, установленной автором в [15] (см. ниже п. 3.3, утверждение 2). Тем самым, благодаря контрпримерам Буслаева указанные примеры отсутствия нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва распространяются и на общий случай нелинейных аппроксимаций Паде–Фабера.

1.2. Приведем некоторые хорошо известные (см. [1], [23]–[25]) свойства классических аппроксимаций Паде степенного ряда, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Пусть

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (1)$$

– (формальный) степенной ряд, n, m – произвольные целые неотрицательные числа. Аппроксимацией Паде типа (n, m) ряда f называется рациональная¹ функция $P_{n,m}/Q_{n,m}$, где полиномы $P_{n,m}$, $\deg P_{n,m} \leq n$, и $Q_{n,m}$, $\deg Q_{n,m} \leq m$, $Q_{n,m} \neq 0$, определяются (не единственным образом) из соотношения

$$(Q_{n,m}f - P_{n,m})(z) = O(z^{n+m+1}), \quad z \rightarrow 0 \quad (2)$$

(в правой части (2) стоит ряд по степеням z , начинающийся с z^{n+m+1}). Из соотношения (2) рациональная функция $[n/m]_f = P_{n,m}/Q_{n,m}$ определяется единственным образом. Вычисление функции $[n/m]_f$ сводится к решению системы линейных уравнений, коэффициенты которых выражаются через коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_{n+m}$ заданного ряда f . Полином $P_{n,m}$ называется *числителем*, а $Q_{n,m}$ – *знаменателем* функции $[n/m]_f$. Отметим, что в качестве определения аппроксимаций Паде соотношение (2), причем для общего случая многочечной интерполяции, было предложено Фробениусом [26]. Поэтому при распространении классической конструкции Паде на случай общих полиномиальных разложений с помощью аналога формулы (2) соответствующие рациональные аппроксимации называют обычно аппроксимациями Паде–Фробениуса (см. ниже п. 2.2).

Если отличен от нуля *определитель Адамара*

$$H_{n,m} = \begin{vmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+m-1} \end{vmatrix} \quad (3)$$

(полагаем $c_k = 0$ при $k < 0$), то для знаменателя $Q_{n,m}$ имеет место явная формула

$$Q_{n,m}(z) = \frac{1}{H_{n,m}} \begin{vmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+m} \\ z^m & z^{m-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

¹Все полиномы и рациональные функции рассматриваются над полем $\mathbb{C}$.

с нормировкой $Q_{n,m}(0) = 1$; аналогичная формула имеет место и для $P_{n,m}$. В этом случае из (2) вытекает, что

$$[n/m]_f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{n+m} z^{n+m} + O(z^{n+m+1}). \quad (4)$$

Последнее соотношение по предложению Бейкера (см. [1]) принимают иногда за определение аппроксимаций Паде; при таком подходе аппроксимации Паде для некоторых n, m могут не существовать.

Таблица $\{[n/m]_f, n, m = 0, 1, \dots\}$ называется *таблицей Паде* ряда f . Последовательность $\{[n/m]_f, n = 0, 1, \dots\}$, где m фиксировано, называется *m -й строкой* таблицы Паде; нулевая строка состоит из частичных сумм ряда f . Последовательность $\{[n/n]_f, n = 0, 1, \dots\}$ называется *главной диагональной последовательностью* или *главной диагональю* таблицы Паде.

Пусть $\mathcal{R}_{n,m}$ – класс всех рациональных функций вида p/q , где $\deg p \leq n$, $\deg q \leq m$, $q \neq 0$. Если $[n/m]_f = P_{n,m}^*/Q_{n,m}^*$, где $\text{НОД}(P_{n,m}^*, Q_{n,m}^*) = 1$, то из (2) вытекает, что

$$(f - [n/m]_f)(z) = O(z^{n+m+1-\lambda_{n,m}}), \quad (5)$$

где $\lambda_{n,m} = \min(n - \deg P_{n,m}^*, m - \deg Q_{n,m}^*)$ – *дефект* рациональной функции в классе $\mathcal{R}_{n,m}$. Тем самым, аппроксимация Паде типа (n, m) ряда f доставляет максимально возможный порядок касания к этому ряду (в точке $z = 0$) в классе $\mathcal{R}_{n,m}$; иными словами, она является единственной (локально) *наилучшей рациональной аппроксимацией заданного степенного ряда в классе $\mathcal{R}_{n,m}$* .

Если $\deg P_{n,m}^* = n$, $\deg Q_{n,m}^* = m$, то индекс (n, m) называется *нормальным* в таблице Паде, *Критерий нормальности* индекса выражается условием

$$H_{n,m} \cdot H_{n+1,m} \cdot H_{n,m+1} \neq 0.$$

Для такого индекса при условии, что $f \notin \mathcal{R}_{n,m}$, выполняется соотношение

$$(f - [n/m]_f)(z) = A_{n,m} z^{n+m+1+\ell_{n,m}} + \dots, \quad (6)$$

где $A_{n,m} \neq 0$, $\ell_{n,m} \geq 0$. Нормальными индексами таблица Паде произвольного ряда f разбивается на (непересекающиеся) квадратные *блоки* размера $\ell_{n,m} \times \ell_{n,m}$:

$$[n'/m']_f = [n/m]_f \quad \text{для всех} \quad n \leq n' \leq n + \ell_{n,m}, \quad m \leq m' \leq m + \ell_{n,m}$$

(при $f \in \mathcal{R}_{n,m}$ полагают $\ell_{n,m} = \infty$). Нетрудно понять, что для аппроксимаций Паде, лежащих в некотором блоке над и на его побочной диагонали, выполняется соотношение (4); для остальных аппроксимаций в блоке это соотношение не имеет места. Отметим, что в некоторых работах нормальными называют именно те индексы (n, m) , для которых выполняется соотношение (4). Такое определение неудачно: оно неправильно отражает блочную структуру таблицы Паде степенного ряда и, кроме того, не может быть так же явно выражено в терминах определителей Адамара, как и общепринятое определение.

Индекс n называется *нормальным для главной диагонали*, если порядок рациональной функции² $[n/n]_f$ равен n ; для произвольного n справедливо равенство $[n/n]_f = [n_k/n_k]_f$, где n_k – наибольший нормальный индекс, не превосходящий n .

²Напомним, что порядок рациональной функции равен числу ее полюсов или, эквивалентно, числу нулей, в $\mathbb{C}$.

2. Аппроксимации Паде–Чебышёва

2.1. Хорошо известно [27], что полиномы Чебышёва (первого рода)

$$T_n(x) = 2 \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1], \quad (7)$$

обладают многими замечательными свойствами. В частности, они ортогональны на отрезке $\Delta = [-1, 1]$ с весом $(1 - x^2)^{-1/2}$:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad \text{при } n \neq k, \quad \int_{-1}^1 \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 2\pi, & n \neq 0, \\ 4\pi, & n = 0, \end{cases} \quad (8)$$

удовлетворяют трехчленным рекуррентным соотношениям

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad T_1(x) = 2x, \quad T_0(x) = 2, \quad (9)$$

и являются *полиномами Фабера* для отрезка Δ (см. [28]). Именно в связи с этим последним свойством мы выбрали для полиномов Чебышёва представление (7), при котором $T_n(x) = 2^n x^n + \dots = \Phi_n(z; \Delta)$, так как $\text{cap } \Delta = 1/2$. Тем самым,

$$T_n(z) = \Phi^n(z) + \Phi^{-n}(z) = \zeta^n + \zeta^{-n},$$

где $\Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ – функция, обратная функции Жуковского $z = (\zeta + 1/\zeta)/2$, $|\zeta| > 1$. Таким образом, в настоящей работе мы будем рассматривать полиномы Чебышёва прежде всего как полиномы Фабера (16) для компакта $E = \Delta$, $\Delta = [-1, 1]$. Свойство ортогональности (8) носит вспомогательный характер. Необходимые нам в дальнейшем свойства общих полиномов Фабера приводятся в разделе 3.

2.2. Пусть функция F , голоморфная на отрезке Δ , $F \in \mathcal{H}(\Delta)$, задана разложением в ряд Фурье–Чебышёва по полиномам $\{T_k(x)\}$:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x), \quad (10)$$

где

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{1/k} < 1. \quad (11)$$

Тем самым, ряд (10) сходится локально равномерно в области D_R : $|\Phi(z)| < R$ – внутренности эллипса Γ_R : $|\Phi(z)| = R$. Отметим, что из (8) вытекают следующие формулы для вычисления коэффициентов $c_k = c_k(F)$ по функции F , использующие значения этой функции только на отрезке Δ :

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad k = 1, 2, \dots, \quad c_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(x)T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Зафиксируем произвольные числа $n, m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Хорошо известно (см. [1]–[3], [24]), что существует два способа определения (обобщенных) аппроксимаций Паде типа (n, m) ряда (10) (или, аппроксимаций Паде–Чебышёва функции F , заданной на Δ), приводящих, вообще говоря, к различным рациональным функциям. Первый основан на “линейном” соотношении типа Фробениуса (2), второй – на соотношении

типа Бейкера (4). Соответствующие рациональные функции в первом случае называются *линейными*³ аппроксимациями Паде–Чебышёва, во втором – *нелинейными* аппроксимациями Паде–Чебышёва.

Приведем соответствующие определения. *Линейной* аппроксимацией Паде–Чебышева типа (n, m) функции F называется рациональная функция вида $R_{n,m} = U_{n,m}/V_{n,m}$, где $\deg U_{n,m} \leq n$, $\deg V_{n,m} \leq m$, $V_{n,m} \neq 0$,

$$(V_{n,m}F - U_{n,m})(z) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} a_k^{(n,m)} T_k(z), \quad z \in \Delta. \quad (12)$$

Нелинейной аппроксимацией Паде–Чебышёва типа (n, m) функции F называется рациональная функция $F_{n,m} \in \mathcal{R}_{n,m} \cap \mathcal{H}(\Delta)$ такая, что

$$(F - F_{n,m})(z) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} b_k^{(n,m)} T_k(z), \quad z \in \Delta. \quad (13)$$

Как известно линейные АПЧ всегда существуют, но, вообще говоря, не единственны (см., например, [18]); нелинейные АПЧ существуют не всегда (см. [1], [15]–[17], [13]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно привести (см. [29], [24]) пример сходящегося *ряда* (10), для которого нелинейная АПЧ типа $(n, 1)$ существует и единственна при всех n , но ни при одном n не является линейной АПЧ этого ряда.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если F – вещественнозначная функция на Δ , то может существовать только одна вещественная нелинейная АПЧ. Действительно, если соотношение (13) выполняется для двух вещественных рациональных функций $F_{n,m}$ и $\tilde{F}_{n,m}$, то их разность $F_{n,m} - \tilde{F}_{n,m}$ ортогональна полиномам $T_0, T_1, \dots, T_{n+m}$. Следовательно, эта разность не меньше, чем $n + m + 1$ раз меняет знак на отрезке Δ . Значит, $F_{n,m} - \tilde{F}_{n,m} \equiv 0$, т.е. $F_{n,m} \equiv \tilde{F}_{n,m}$.

Из рекуррентного соотношения (9) легко вытекает, что соотношение (12) эквивалентно следующему:

$$V_{n,m}(z) \sum_{k=0}^{n+2m+1} c_k T_k(z) - U_{n,m}(z) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} A_k^{(n,m)} T_k(z), \quad z \in \Delta; \quad (14)$$

соотношение (13) переписывается в виде

$$\sum_{k=0}^{n+m+1} c_k T_k(z) - F_{n,m}(z) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} B_k^{(n,m)} T_k(z), \quad z \in \Delta. \quad (15)$$

Таким образом, при заданных $n, m \in \mathbb{N}_0$ для построения линейной АПЧ типа (n, m) требуется задать $n + 2m + 1$ первых коэффициентов $c_0, c_1, \dots, c_{n+2m}$ ряда (10),

³Такое название выглядит не совсем удачным, поскольку так же, как и в классическом случае степенного ряда, соответствующая конструкция *нелинейна* относительно аппроксимируемой *функции*. Более естественно было бы использовать здесь термины “аппроксимация Паде–Фробениуса ряда (10)” и “аппроксимация Паде–Бейкера ряда (10)”. Однако поскольку термины “линейная” и “нелинейная” аппроксимации Паде–Чебышёва стали уже общепринятым (см. [13], [6], [18], [19], [33]), мы в настоящей работе придерживаемся этой устоявшейся терминологии.

а для построения нелинейной АПЧ типа (n, m) – $n + m + 1$ первых коэффициентов $c_0, c_1, \dots, c_{n+m}$. Тем самым, при заранее заданных коэффициентах $c_0, c_1, \dots, c_N$, $N = n + m$, ряда (10) и степени знаменателя m можно построить нелинейную АПЧ типа (n, m) , а линейную – только типа $(n - m, m)$. Особенно существенно это различие сказывается при использовании *диагональных* АПЧ, где преимущество в скорости сходимости нелинейных АПЧ над линейными (в определенных классах функций) весьма существенно (см. [34], [35], где приводится количественная характеристика скорости сходимости таких аппроксимаций). Хорошо известно [1], что даже при современном уровне развития вычислительной техники наиболее трудоемкой процедурой при научных расчетах остается вычисление коэффициентов степенных рядов или иных более общих полиномиальных разложений. Таким образом, с точки зрения “оптимального” использования уже найденных коэффициентов $c_0, \dots, c_N$ ряда (10) применение нелинейных АПЧ представляется гораздо логичнее, чем линейных (см. также обзор [13]). Видимо, исходя из этих соображений в системе MAPLE реализована программа вычисления именно нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва. Однако, как уже отмечалось ранее, с существованием и построением нелинейных АПЧ дело обстоит не так просто, как с классическими аппроксимациями Паде степенного ряда. В дальнейшем мы будем рассматривать только *нелинейные* аппроксимации Паде–Чебышёва.

Отметим в заключение этого раздела, что при формальном определении нелинейных АПЧ ряда (10) можно было бы по аналогии со случаем степенного ряда (см. (5)) исходить из понятия максимальности “касания” рациональной функцией, принадлежащей фиксированному классу $\mathcal{R}_{n,m}$, заданного ряда (10) (см., например, [17] и описание программы нахождения нелинейных АПЧ в системе MAPLE [14]). Тогда автоматически отпал бы вопрос о существовании таких аппроксимаций. Однако в отличие от классического случая степенного ряда, для ряда Фурье–Чебышёва при таком определении нет, насколько нам известно, независимого алгоритма нахождения АПЧ.⁴ В результате в системе MAPLE построение АПЧ все равно сводится к построению аппроксимаций Паде соответствующего степенного ряда. Тем самым, для приводимых ниже в разделе 4 функций эта программа не дает результата.⁵ Определение (13) было впервые дано в [3], где был предложен и алгоритм для построения таких рациональных аппроксимаций (при условии, что они существуют). Это определение нелинейных АПЧ используется и в работах [16], [6], [5].

3. Некоторые свойства аппроксимаций Паде–Фабера

3.1. Приведем необходимые нам в дальнейшем свойства полиномов Фабера, соответствующих континууму $E \in \mathbb{C}$ (см. [28]).

Пусть E – произвольный континуум в $\mathbb{C}$, не разбивающий плоскость и не вырождающийся в точку, $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus E$, $w = \Phi(z)$ – функция, конформно (и однолистно) отображающая область D на внешность единичного круга $\{w : |w| > 1\}$ так, что $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$, $z = \Psi(w)$ – обратная функция. Для произвольного $\rho > 1$ положим $\Gamma_\rho = \{z : |\Phi(z)| = \rho\}$ – линия уровня отображающей функции Φ , D_ρ –

⁴Напомним, что соотношение (5) является *характеристическим* для аппроксимаций Паде, определенных *конструктивным* соотношением Фробениуса (2).

⁵Более точно, отрицательный результат вычисления был прокомментирован программой следующим образом: “Error, singularity in or near interval”.

внутренность кривой Γ_ρ , $D_1 := E$. Тогда полиномы Фабера $\Phi_n(z) = \Phi_n(z; E)$ определяются по формуле

$$\Phi_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{\Phi^n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D_\rho, \quad \rho > 1 \quad (16)$$

($\Phi_n(z)$ – главная часть разложения функции $\Phi^n(z)$ в ряд Лорана в бесконечно удаленной точке $z = \infty$).

Из (16) легко вытекает, что $\Phi_n(z) = \Phi^n(z)(1 + o(1))$, $n \rightarrow \infty$, локально равномерно в D . Следовательно, существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Phi_n(z)|^{1/n} = |\Phi(z)|, \quad z \in D. \quad (17)$$

Из (16) и (17) легко вытекает, что если функция F голоморфна на E , $F \in \mathcal{H}(E)$, то F разлагается в ряд Фабера (ср. (10))

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Phi_k(z), \quad c_k = c_k(F), \quad (18)$$

сходящийся к F локально равномерно в канонической области $D_0(F) := D_{\rho_0(F)}$, где

$$\frac{1}{\rho_0(F)} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{1/k} < 1; \quad (19)$$

область $D_0(F)$ – максимальная каноническая область голоморфности⁶ функции F .

3.2. В классе функций $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, $\mathbb{D} := \{w : |w| < 1\}$, стандартным образом определим (линейный) оператор Фабера $\mathcal{F}$ по формуле

$$\mathcal{F}(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Phi_k(z), \quad (20)$$

где $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ задана разложением $f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k$. В силу (19) функция $F = \mathcal{F}(f) \in \mathcal{H}(E)$, при этом $\rho_0(F) = R_0(f)$, где $R_0(f)$ – радиус голоморфности f . Тем самым, $\mathcal{F}: \mathcal{H}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{H}(E)$. Нетрудно видеть, что отображение $\mathcal{F}$ ограничено, биективно и справедлива формула

$$\mathcal{F}(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\Phi(\zeta))}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D_\rho, \quad 1 < \rho < R_0(f). \quad (21)$$

Для произвольных $n, m \in \mathbb{N}_0$ положим

$$\mathcal{R}_{n,m}(E) = \mathcal{R}_{n,m} \cap \mathcal{H}(E), \quad \mathcal{R}_{n,m}(\mathbb{D}) = \mathcal{R}_{n,m} \cap \mathcal{H}(\mathbb{D}).$$

Для фиксированных $m \in \mathbb{N}$ и $\rho > 1$ обозначим через $\mathcal{M}_m(D_\rho)$ класс функций $F \in \mathcal{H}(E)$, допускающих мероморфное продолжение в каноническую область D_ρ и имеющих там ровно⁷ m полюсов; аналогичным образом определяется и $\mathcal{M}_m(K_\rho)$ для $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, где $K_\rho = \{w : |w| < \rho\}$.

⁶Голоморфное и мероморфное продолжение функции F также обозначается через F .

⁷Как обычно, нули и полюсы функций считаются с учетом их кратностей.

Справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Оператор Фабера $\mathcal{F}$ отображает:

- 1) при $n \geq m$ множество $\mathcal{R}_{n,m}(\mathbb{D})$ линейно и взаимно однозначно на множество $\mathcal{R}_{n,m}(E)$, причем точка w_0 является полюсом кратности $\mu \geq 1$ функции $r(w) \in \mathcal{R}_{n,m}(\mathbb{D})$ тогда и только тогда, когда точка $z_0 = \Psi(w_0)$ является полюсом кратности μ функции $R(z) = \mathcal{F}(r)(z)$;
- 2) множество $\mathcal{M}_m(D_\rho)$, $\rho > 1$, линейно и взаимно однозначно на множество $\mathcal{M}_m(K_\rho)$, причем точка w_0 является полюсом кратности $\mu \geq 1$ функции $f(w) \in \mathcal{M}_m(K_\rho)$ тогда и только тогда, когда точка $z_0 = \Psi(w_0)$ является полюсом кратности μ функции $F(z) = \mathcal{F}(f)(z)$.

Это простое утверждение, по-видимому, впервые было сформулировано автором в [15] (см. также [29]). Позднее эти свойства оператора Фабера и вытекающие из них следствия (в том числе, аналог теоремы Монтеcssу) были переоткрыты другими авторами [30], [31].

Приведем схему доказательства утверждения 1, ограничившись при этом лишь случаем простых полюсов, так как здесь нам понадобится только этот частный случай.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1. В силу определения (20) оператора Фабера очевидно, что в случае простых полюсов утверждение леммы достаточно проверить лишь для функции вида $f(w) = r(w) = \alpha/(w - \beta)$. Для такой функции в силу формулы (21) и теоремы о вычетах имеем

$$\begin{aligned} F(z) &= \mathcal{F}(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\Phi(\zeta))}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{\alpha}{(\Phi(\zeta) - \Phi(b))(\zeta - z)} d\zeta \\ &= -\frac{\alpha}{\Phi'(b)(b - z)} = \frac{\alpha}{\Phi'(b)} \frac{1}{z - b} = \frac{A}{z - b}, \end{aligned}$$

где $b = \Psi(\beta)$, $A = \alpha/\Phi'(b) = \alpha\Psi'(\beta)$. Тем самым,

$$\mathcal{F}: f(w) = \frac{\alpha}{w - \beta} \mapsto F(z) = \frac{A}{z - b} = \frac{\alpha\Psi'(\beta)}{z - \Psi(\beta)}. \quad (22)$$

Явная формула (22) понадобится нам в дальнейшем. Из (22) легко вытекает, что отображение Фабера сохраняет степень знаменателя рациональной функции, но, вообще говоря, не сохраняет степень числителя.

3.3. Для функции $F \in \mathcal{H}(E)$, заданной рядом (18), и произвольных фиксированных $n, m \in \mathbb{N}_0$ определим нелинейную аппроксимацию Паде–Фабера $F_{n,m}$ типа (n, m) функции F как рациональную функцию $F_{n,m} \in \mathcal{R}_{n,m}(E)$, обладающую следующим свойством:

$$c_k(F) = c_k(F_{n,m}) \quad \text{при } k = 0, 1, \dots, n + m, \quad (23)$$

или, эквивалентно,

$$(F - F_{n,m})(z) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} b_k^{(n,m)} \Phi_k(z), \quad z \in E. \quad (24)$$

Соотношения (23) представляют собой систему из $n + m + 1$ нелинейных уравнений относительно $n + m + 1$ неизвестных – свободных коэффициентов рациональной функции $F_{n,m} \in \mathcal{R}_{n,m}(E)$. Для произвольной функции $F \in \mathcal{H}(E)$ решение этой системы существует не при любых n и m .

Непосредственно из утверждения 1 вытекает следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 (критерий существования нелинейной аппроксимации Паде–Фабера). *При $n \geq m$ для существования нелинейной аппроксимации Паде–Фабера $F_{n,m}$ типа (n, m) функции $F \in \mathcal{H}(E)$ необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий:*

- 1) для аппроксимации Паде $[n/m]_f$ функции $f = \mathcal{F}^{-1}(F)$ имеет место соотношение (см. (4))

$$[n/m]_f(w) = c_0 + c_1 w + \dots + c_{n+m} w^{n+m} + O(w^{n+m+1}), \quad w \rightarrow 0; \quad (25)$$

- 2) рациональная функция $[n/m]_f$ не имеет полюсов в замкнутом единичном круге, т.е. $[n/m]_f \in \mathcal{R}_{n,m}(\mathbb{D})$.

При выполнении условий 1), 2) справедливо равенство $F_{n,m} = \mathcal{F}([n/m]_f)$.

Действительно, из утверждения 1 вытекает, что если для функции $f = \mathcal{F}^{-1}(F)$ и индекса (n, m) , $n \geq m$, выполняется соотношение (25) и $[n/m]_f \in \mathcal{R}_{n,m}(\mathbb{D})$, то $R_{n,m} = \mathcal{F}([n/m]_f) \in \mathcal{R}_{n,m}(E)$ и

$$R_{n,m}(z) = c_0 + c_1 \Phi_1(z) + \dots + c_{n+m} \Phi_{n+m}(z) + \dots \quad (26)$$

Следовательно, $R_{n,m} = F_{n,m}$ – нелинейная аппроксимация Паде–Фабера функции F .

Обратное утверждение доказывается аналогично.

При этом функция $F_{n,m}$ явно выражается через $[n/m]_f$ и единственна. Как уже отмечалось, явная формула, связывающая $F_{n,m}$ и $[n/m]_f$, получена в [29] (см. также (22)).

Благодаря утверждению 1 доказательство теоремы Монтессу для нелинейных аппроксимаций Паде–Фабера, а значит, и для нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышева, легко сводится к классической теореме Монтессу для степенных рядов (см. [15], [29]). Совершенно аналогично обстоит дело и с обобщением на случай нелинейных аппроксимаций Паде–Фабера теоремы Гончара – обратной по отношению к теореме Монтессу (см. [32; §3, п.4], [15]). Отметим, что для нелинейных аппроксимаций Паде *общих ортогональных разложений* теорема Монтессу также справедлива (при определенных естественных предположениях о мере ортогональности), однако ее доказательство требует независимых рассуждений (см. [36], [24]).

Таким образом, для случая отрезка $E = \Delta$ благодаря приведенному выше критерию вопрос о существовании нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва решается с помощью хорошо известных результатов о классических аппроксимациях Паде степенного ряда, приведенных в п. 1.2 (ср. [16], [17]).

4. Построение примеров

4.1. Соотношение (13), определяющее нелинейную АПЧ типа (n, m) ряда (10), эквивалентно системе уравнений

$$c_k(F) = c_k(F_{n,m}) \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \dots, n + m. \quad (27)$$

Соотношения (27) представляют собой систему из $n + m + 1$ нелинейных уравнений относительно $n + m + 1$ неизвестных – свободных коэффициентов рациональной функции $F_{n,m} \in \mathcal{R}_{n,m}(\Delta)$. Решение этой системы существует не при любых n и m . Отметим, что в [3] (см. также [13]) предложен алгоритм, позволяющий по заданным коэффициентам $c_0, c_1, \dots, c_{n+m}$ однозначно решить вопрос о существовании нелинейной АПЧ типа (n, m) и найти ее, если такая функция существует. Тем не менее, в системе MAPLE, как вытекает из описания [14], реализована программа построения АПЧ, основанная на связи таких рациональных функций с классическими аппроксимациями Паде, т.е. фактически на соотношениях типа (22).

Как уже говорилось выше, наши примеры основаны на утверждениях 1 и 2 и известных контрпримерах Буслаева.

4.2. Приведем первый контрпример (к гипотезе Бейкера–Грейвс–Морриса) в виде следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [20]). *Для функции*

$$B_1(w) = \frac{1 + \sqrt[3]{2}w}{1 - w^3} = 1 + \sqrt[3]{2}w + w^3 + \sqrt[3]{2}w^4 + \dots \quad (28)$$

имеем

$$R_0 = R_2 = 1, \quad H_{n,2} \neq 0 \quad \text{для всех } n = 1, 2, \dots$$

При любом n функция $[n/2]_{B_1}$ имеет по меньшей мере один полюс, модуль которого $\leq 1/\sqrt[3]{2}$. Тем самым, не существует последовательностей вида $[n/2]_{B_1}$, $n \in \Lambda \subset \mathbb{N}$, равномерно сходящихся в круге $|w| \leq 1/\sqrt[3]{2}$ (компактно принадлежащем $D_0 = D_2 = \{w : |w| < 1\}$).

Полюсы $\zeta_{n,j}$, $j = 1, 2$, аппроксимаций Паде $[n/2]_{B_1}$ легко вычисляются:

$$\zeta_{n,j} = \begin{cases} \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}} & \text{при } n = 3l, \\ \frac{1 \pm 3}{2\sqrt[3]{2}} & \text{при } n = 3l + 1, \\ \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}} & \text{при } n = 3l + 2. \end{cases} \quad (29)$$

Положим $f(w) := B_1(w/R)$, где $R = \sqrt[6]{2} > 1$. Тогда $f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$,

$$f(w) = \frac{R + \sqrt[3]{2}w}{R^3 - w^3} R^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k, \quad (30)$$

где

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}^l}, & k = 3l, \\ \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}^l}, & k = 3l + 1, \\ 0, & k = 3l + 2. \end{cases} \quad (31)$$

Следовательно, радиус сходимости ряда (30) равен $R = \sqrt[6]{2} > 1$ и функция f голоморфна в круге $|w| < R$. Вместе с тем, из (29) вытекает, что при любом n аппроксимация Паде $[n/2]_f$ имеет по крайней мере один полюс в круге $|w| \leq 1/\sqrt[6]{2} < 1$.

Для $E = [-1, 1]$ имеем

$$w = \Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1} \quad \text{при } z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E$$

(здесь и далее выбирается ветвь корня такая, что $\sqrt{z^2 - 1} > 0$ при $z > 1$),

$$z = \Psi(w) = \frac{w + 1/w}{2} \quad \text{при } |w| > 1.$$

Поэтому для $E = [-1, 1]$ из (22) находим, что

$$F(z) = \mathcal{F}(f)(z) = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \frac{1 + \sqrt[3]{2}\varepsilon_j}{a_j - z} \sqrt{a_j - 1}, \quad (32)$$

где $\varepsilon_j = e^{i\varphi_j}$, $\varphi_j = 2\pi j/3$,

$$a_j = \frac{1}{2} \left(A_j + \frac{1}{A_j} \right), \quad \sqrt{a_j - 1} = \frac{1}{2} \left(A_j - \frac{1}{A_j} \right), \quad A_j = R\varepsilon_j,$$

$j = 1, 2, 3$, или в другом представлении

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{1}{2} \left(R + \frac{1}{R} \right) \cos \varphi_j + \frac{i}{2} \left(R - \frac{1}{R} \right) \sin \varphi_j, \\ \sqrt{a_j - 1} &= \frac{1}{2} \left(R - \frac{1}{R} \right) \cos \varphi_j + \frac{i}{2} \left(R + \frac{1}{R} \right) \sin \varphi_j, \end{aligned}$$

$R = \sqrt[6]{2}$. Коэффициенты соответствующего функции F ряда (10) задаются формулой (31).

Отсюда уже легко вытекает

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для функции $F = \mathcal{F}(f)$, заданной равенством (32), ни при каком $n \geq 2$ не существует нелинейной АПЧ типа $(n, 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в противном случае непосредственно из определения АПЧ вытекало бы соотношение

$$F_{n,2}(z) = c_0 T_0(z) + c_1 T_1(z) + \dots + c_{n+2} T_{n+2}(z) + \dots, \quad (33)$$

где $F_{n,2} \in \mathcal{R}_{n,2}(E)$. Следовательно, мы имели бы равенство

$$\mathcal{F}^{-1}(F_{n,2})(w) = c_0 + c_1 w + \dots + c_{n+2} w^{n+2} + \dots, \quad (34)$$

т.е. функция $\mathcal{F}^{-1}(F_{n,2})$ была бы классической аппроксимацией Паде $[n/2]_f$ ряда f и при этом $\mathcal{F}^{-1}(F_{n,2}) \in \mathcal{R}_{n,2}(\overline{\mathbb{D}})$. Однако как показано выше последнее соотношение для $[n/2]_f$ не имеет места. Полученное противоречие доказывает утверждение 3.

Таким образом, для рациональной функции F типа $(2, 3)$, заданной формулой (32) и голоморфной на отрезке $\Delta = [-1, 1]$, нелинейная АПЧ типа $(n, 2)$ в смысле определения (13) не существует ни при одном $n \geq 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если при определении АПЧ типа (n, m) по аналогии со случаем степенного ряда исходить из понятия максимальности “касания” рациональной функций, принадлежащей фиксированному классу $\mathcal{R}_{n,m}$, заданного ряда (10), то нужная функция существовала бы всегда. Однако из приведенного примера вытекает, что при таком подходе нет, вообще говоря, никакой связи между нелинейными АПЧ и классическими аппроксимациями Паде степенного ряда.

4.3. В этом пункте мы приведем пример функции, голоморфной на отрезке Δ , для которой ни при каком $n = 1, 2, \dots$ не существует нелинейной диагональной АПЧ. Этот пример основан на широко известном контрпримере Буслаева [21], [22] к гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса для аппроксимаций Паде степенного ряда [1].

Функция Буслаева [22] имеет следующий вид:

$$B_2(w) = \frac{p_3(w) + \sqrt{h_6(w)}}{q_3(w)}, \quad (35)$$

где полиномы

$$\begin{aligned} p_3(w) &= -27 + 6w^2 + 3(9 + \varepsilon)w^3, & q_3(w) &= 2w(9 + 9w + (9 + \varepsilon)w^2), \\ h_6(w) &= 81(3 - (3 + \varepsilon)w^3)^2 + 4w^6, \end{aligned}$$

величина $\varepsilon = \exp(2\pi i/3)$, ветвь корня выбрана так, что функция $B_2 \in \mathcal{H}(0)$, при этом $B_2(0) = 0$. Функция B_2 определена на гиперэллиптической римановой поверхности рода $g = 2$. Полином $q_3(w) = cw(w - a)(w - b)$, где $a \approx 0.993587 - 0.0646718i$, $|a| < 0.9957 < 1$, $|b| > 1.057 > 1$. Функция B_2 голоморфна в точке $w = a \in \mathbb{D}$ и имеет простой полюс в точке $w = b \notin \mathbb{D}$. Тем самым, $B_2 \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$, но в то же время при каждом $n \in \mathbb{N}$ диагональная аппроксимация Паде $[n/n]_{B_2}$ имеет полюс хотя бы в одной из трех точек $a, \varepsilon a, \varepsilon^2 a$ из круга $\mathbb{D}$.

Таким образом, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (см. [21], [22]). Для функции $B_2 \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ диагональная аппроксимация Паде $[n/n]_{B_2}$ при каждом $n = 1, 2, \dots$ имеет полюс, лежащий внутри единичного круга $\mathbb{D}$.

Отсюда с помощью утверждения 2 и рассуждений, подобных тем, которые использовались при доказательстве утверждения 3, легко вытекает

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Для функции $F = \mathcal{F}(B_2)$ ни при каком $n \geq 1$ не существует нелинейной АПЧ типа (n, n) .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В [22] показано, что функция B_2 разлагается в периодическую с периодом 3 непрерывную дробь, а компакт Шталя Σ для функции $\sqrt{h_6}$ (см. (35)) имеет вид

$$\Sigma = \{w \in \mathbb{C} : w = 3(27 + 9\varepsilon \pm 2it)^{-1/3}, 0 \leq t \leq 1\}$$

и состоит из трех непересекающихся аналитических дуг, $\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2 \sqcup \Sigma_3$. Отсюда, учитывая, что для $E = [-1, 1]$ функция $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$, нетрудно показать, что $\mathcal{F}(B_2)$ – алгебраическая функция. Можно также найти для нее и явное аналитическое (т.е. формульное) представление.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Благодаря приведенному в настоящей работе критерию существования нелинейной аппроксимации Паде–Фабера (см. утверждение 2) и примерам Буслаева, утверждения 3 и 4 очевидным образом обобщаются и на случай нелинейных аппроксимаций Паде–Фабера, соответствующих произвольному континууму E .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Паде*. Ч. 1. *Основы теории*. Ч. 2. *Обобщения и приложения*, Мир, М., 1986.
- [2] H. J. Maehly, “Rational approximations for transcendental functions”, *Information Processing*, Proceedings of the International Conference on Information Processing (15–20 June 1959, Paris), UNESCO, Paris, 1960, 57–62.
- [3] C. W. Clenshaw, K. Lord, “Rational approximations from Chebyshev series”, *Studies in Numerical Analysis*, Papers in honour of Cornelius Lanczos on the occasion of his 80th birthday, Academic Press, London, 1974, 95–113.
- [4] J. C. Mason, A. Crampton, “Laurent–Padé approximants to four kinds of Chebyshev polynomial expansions. I. Maehly type approximants”, *Numer. Algorithms*, **38**:1–3 (2005), 3–18.
- [5] J. C. Mason, A. Crampton, “Laurent–Padé approximants to four kinds of Chebyshev polynomial expansions. II. Clenshaw–Lord type approximants”, *Numer. Algorithms*, **38**:1–3 (2005), 19–29.
- [6] I. V. Andrianov, “Application of Padé-approximants in perturbation methods”, *Adv. in Mech.*, **14**:2 (1991), 3–25.
- [7] I. V. Andrianov, J. Awrejcewicz, “New trends in asymptotic approaches: summation and interpolation methods”, *Appl. Mech. Rev.*, **54**:1 (2001), 69–92.
- [8] Л. А. Книжнерман, “Выделение полюсов потенциальных полей с помощью разложения в ряды Фурье–Чебышёва”, *Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли*, 1984, № 11, 119–123.
- [9] T. W. Tee, L. N. Trefethen, “A rational spectral collocation method with adaptively transformed Chebyshev grid points”, *SIAM J. Sci. Comput.*, **28**:5 (2006), 1798–1811.
- [10] V. Druskin, L. Knizhnerman, “Gaussian spectral rules for the three-point second differences. I. A two-point positive definite problem in a semi-infinite domain”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **37**:2 (2000), 403–422.
- [11] К. М. Ермохин, “Продолжение геофизических полей в область источников аномалий методом аппроксимации цепными дробями”, *Геофизика*, 2007, № 1, 51–55.
- [12] Л. А. Книжнерман, “Квадратура Гаусса–Арнольди для функции $\langle (zI - A)^{-1} \varphi, \varphi \rangle$ и Паде-подобная рациональная аппроксимация функций марковского типа”, *Матем. сб.*, **199**:2 (2008), 27–48.
- [13] G. L. Litvinov, “Error autocorrection in rational approximation and interval estimates. A survey of results”, *Cent. Eur. J. Math.*, **1**:1 (2003), 36–60.
- [14] Г. Прохоров, В. Колбеев, К. Желнов, М. Леденев, *Математический пакет Maple V Release 4: Руководство пользователя*, <http://www.exponenta.ru/soft/maple/kaluga/1.asp>.
- [15] С. П. Суетин, “О теореме Монтессу де Болора для нелинейных аппроксимаций Паде ортогональных разложений и рядов Фабера”, *Докл. АН СССР*, **253**:6 (1980), 1322–1325.
- [16] K. O. Geddes, “Block structure in the Chebyshev–Padé table”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **18**:5 (1981), 844–861.
- [17] L. N. Trefethen, M. H. Gutknecht, “Padé, stable Padé, and Chebyshev–Padé approximation”, *Algorithms for Approximation* (Shrivenham, 1985), Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Ser., **10**, Oxford Univ. Press, New York, 1987, 227–264.

- [18] О. Л. Ибряева, “Достаточное условие единственности линейной аппроксимации Паде–Чебышева”, *Изв. Челябинск. научн. центра*, 2002, №4, 1–5.
- [19] В. М. Адуков, О. Л. Ибряева, “О вычислении аппроксимаций Паде и Паде–Чебышёва в системе MAPLE”, *Тезисы докладов международной конференции “Системы компьютерной математики и их приложения”* (19–21 мая 2008, Смоленск), Смоленск. гос. ун-т, Смоленск, 2008, 17–19.
- [20] В. И. Буслаев, А. А. Гончар, С. П. Суетин, “О сходимости подпоследовательностей m -й строки таблицы Паде”, *Матем. сб.*, **120**:4 (1983), 540–545.
- [21] V. I. Buslaev, “Simple counterexample to the Baker–Gammel–Wills conjecture”, *East J. Approx.*, **7**:4 (2001), 515–517.
- [22] В. И. Буслаев, “О гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса в теории аппроксимаций Паде”, *Матем. сб.*, **193**:6 (2002), 25–38.
- [23] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988.
- [24] С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда”, *УМН*, **57**:1 (2002), 45–142.
- [25] A. P. Holub, “The method of generalized moment representations in the theory of rational approximation. A survey”, *Ukrainian Math. J.*, **55**:3 (2003), 377–433.
- [26] G. Frobenius, “Üeber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen”, *Borchardt J.*, **90** (1880), 1–17.
- [27] Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962.
- [28] В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев, *Конструктивная теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1964.
- [29] С. П. Суетин, *Вопросы сходимости аппроксимаций Паде–Фабера*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1981.
- [30] S. W. Ellacott, “On the Faber transform and efficient numerical rational approximation”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **20**:5 (1983), 989–1000.
- [31] S. W. Ellacott, E. B. Saff, “Computing with the Faber transform”, *Rational Approximation and Interpolation* (Tampa, FL, 1983), *Lecture Notes in Math.*, **1105**, Springer-Verlag, Berlin, 1984, 412–418.
- [32] А. А. Гончар, “О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **97**:4 (1975), 607–629.
- [33] В. М. Адуков, О. Л. Ибряева, “Асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде–Чебышёва для последней промежуточной строки. Рациональный случай”, *Вестник ЮУрГУ. Сер. матем., физ., хим.*, **6**:6 (2005), 11–18.
- [34] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, “О сходимости аппроксимаций Паде ортогональных разложений”, *Теория чисел, алгебра, математический анализ и их приложения*, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Ивана Матвеевича Виноградова, Тр. МИАН, **200**, Наука, М., 1991, 136–146.
- [35] A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, “On the rate of convergence of Padé approximants of orthogonal expansions”, *Progress in Approximation Theory* (Tampa, FL, 1990), *Springer Ser. Comput. Math.*, **19**, Springer-Verlag, New York, 1992, 169–190.
- [36] С. П. Суетин, “О теореме Монтеcssу де Болора для рациональных аппроксимаций ортогональных разложений”, *Матем. сб.*, **114**:3 (1981), 451–464.

С. П. Суетин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: suetin@mi.ras.ru

Поступило

16.07.2008