Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Багис, Некоторые новые результаты относительно простых сумм, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 1, 11–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5263>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 10:24:33

Некоторые новые результаты относительно простых сумм

Н. Багис

В данной работе изучаются суммы простых чисел с помощью теоремы Эйлера о простых числах и значения зета-функции Римана используются для построения аппроксимаций. Также дается оценка точности этих аппроксимаций.

Библиография: 5 названий.

1. Конечные суммы и произведения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть f – аналитическая функция на $A \supseteq (-1, 1]$ и $f(0) = 0$. Пусть a_n – некоторая произвольная последовательность такая, что $|a_n| < 1$ при $n = 1, 2, 3, \dots$. Тогда имеем

$$\sum_{k \leq x} f(a_k) = - \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(\prod_{k \leq x} (1 - a_k^n) \right) \frac{1}{n} \sum_{d|n} \frac{f^{(d)}(0)}{\Gamma(d)} \mu \left(\frac{n}{d} \right), \quad (1)$$

где x – некоторое положительное число и μ – мю-функция Мёбиуса, которая определяется следующим образом:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ (-1)^r, & \text{если } k \text{ равно произведению } r \text{ различных простых чисел,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \log \left(\prod_{k \leq x} (1 - a_k^n) \right) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} \sum_{k=1}^x \log(1 - a_k^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} \sum_{k=1}^x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} a_k^{mn} \\ &= \sum_{k=1}^x \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_n}{nm} a_k^{mn} = \sum_{k=1}^x \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} a_k^r \sum_{d|r} c_d. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть теперь

$$\frac{1}{r} \sum_{d|r} c_d = \frac{f^{(r)}(0)}{r!}.$$

Из теоремы об обращении функции Мёбиуса (см. теорему (ii) данной статьи или, более подробно, [1; гл. 2]) получим

$$c_r = \sum_{d|r} \frac{f^{(d)}(0)}{\Gamma(d)} \mu\left(\frac{r}{d}\right).$$

Следовательно, уравнение (3) принимает вид

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\prod_{k \leq x} (1 - a_k^n)\right) \frac{1}{n} \sum_{d|n} \frac{f^{(d)}(0)}{\Gamma(d)} \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{k=1}^x \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f^{(r)}(0)}{r!} (a_k)^r = \sum_{k=1}^x f(a_k).$$

2. Обобщение теоремы Эйлера.

ТЕОРЕМА 2. Если f – аналитическая функция на $A \supseteq (-1, 1]$ и $f(0) = 0$, то

$$A(s) := \sum_{p - \text{простое}} f\left(\frac{1}{p^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(\zeta(ns))}{n} \sum_{d|n} \frac{f^{(d)}(0)}{\Gamma(d)} \mu\left(\frac{n}{d}\right), \quad (4)$$

где первая сумма берется по всем простым числам и ζ – дзета-функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $a_n = 1/p_n^s$, где p_n – n -е простое число, $s > 1$, и $x = \infty$. Тогда, применяя теорему Эйлера,

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p - \text{простое}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right),$$

$s > 1$, легко получим нужное утверждение из теоремы 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Ошибка аппроксимации для суммы (3) равна

$$E(f, M, s) := \left| \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{\log(\zeta(ns))}{n} \sum_{d|n} \frac{f^{(d)}(0)}{\Gamma(d)} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \right|. \quad (5)$$

Тогда

$$E(f, M, s) \leq \frac{2^{s+1}(2^s + 1)(s + 1)M^2}{\pi(2^s - 1)^3(sM + s - 1)2^{sM}} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| dt. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$E = \left| \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{\log(\zeta(ns))}{n} \sum_{d|n} \frac{f^{(d)}(0)}{\Gamma(d)} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \right|.$$

Сначала из формулы Пуассона получим

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-itk} dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f^k(0)}{\Gamma(k)} \right| &\leq \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| dt, \\ \left| \sum_{d|n} \frac{f^{(d)}(0)}{\Gamma(d)} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \right| &\leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k)} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| dt \sum_{k=1}^n k, \end{aligned}$$

и для ошибки аппроксимации получим

$$E \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| dt \left| \sum_{n=M+1}^{\infty} (n+1) \log(\zeta(sn)) \right|.$$

Из неравенства $\log(x) \leq x - 1$ следует, что

$$E \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| dt \sum_{n=M+1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{1}{2^{sn}} + \frac{1}{3^{sn}} + \frac{1}{4^{sn}} + \cdots \right). \quad (7)$$

Теперь оценим ряд

$$A(x) := \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots,$$

где $x = sn$:

$$A(x) = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots \leq \frac{1}{2^x} + \int_2^{\infty} \frac{1}{t^x} dt = \frac{1}{2^{sn}} + \frac{2}{(sn-1)2^{sn}} = \frac{(sn+1)}{2^{sn}(sn-1)}.$$

Таким образом, можно записать

$$E \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| dt \sum_{n=M+1}^{\infty} (n+1) \frac{sn+1}{2^{sn}(sn-1)}.$$

Заметим, что $n+1 \leq 2n$, $1/(sn-1) \leq 1/(s(M+1)-1)$, и таким образом, получим

$$\begin{aligned} E &\leq \frac{2}{4\pi(sM+s-1)} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| dt \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{n(sn+1)}{2^{sn}} \\ &\leq \frac{s+1}{2\pi(sM+s-1)} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| dt \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{sn}} \\ &= \frac{s+1}{2\pi(sM+s-1)2^{sM}} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| dt \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+M)^2}{2^{sn}} \\ &= \frac{s+1}{2\pi(sM+s-1)2^{sM}} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2nM + M^2}{2^{sn}} \\ &\leq \frac{s+1}{2\pi(sM+s-1)2^{sM}} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| dt \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 M^2}{2^{sn}} \\ &\leq \frac{2^{s+1}(2^s+1)(s+1)M^2}{\pi(2^s-1)^3(sM+s-1)2^{sM}} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| dt, \end{aligned}$$

что и дает оценку ряда.

Общие соображения и мотивация. (i) Пусть $\phi(q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2}$, $|q| < 1$. Тогда

$$\sum_{p - \text{простое}} \log \left(\phi \left(\frac{1}{p^s} \right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(\zeta(sn))}{n} \sum_{d|n} \frac{f^{(d)}(0)}{\Gamma(d)} \mu \left(\frac{n}{d} \right), \quad (8)$$

где $f(x) = \log(\phi(x))$. Нужно вычислить

$$X(n) := \frac{1}{n} \sum_{d|n} \frac{f^{(d)}(0)}{\Gamma(d)} \mu \left(\frac{n}{d} \right).$$

Из [2; с. 36] имеем следующее представление для ϕ :

$$\phi(q) = \frac{(-q, -q)_{\infty}}{(q, -q)_{\infty}},$$

где $(a; q)_{\infty} := \prod_{n=0}^{\infty} (1 - aq^n)$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \log(\phi(q)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - (-q)^n) - \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + (-q)^n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} (-q)^{nm} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (-q)^{nm} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{d|n} \frac{(-1)^d - 1}{d} \right) q^n. \end{aligned}$$

Поэтому,

$$X(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} (-1)^d \left(\sum_{\delta|d} ((-1)^{d/\delta} - 1) \delta \right) \mu \left(\frac{n}{d} \right),$$

откуда после вычислений получим

$$X_2(n) = \begin{cases} 2, & n \equiv 1 \pmod{4}, \\ -3, & n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2, & n \equiv 3 \pmod{4}, \\ -1, & n \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases} \quad (9)$$

Докажем, что X – величина периодическая по модулю 4.

Известно [2; с. 36], что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + q^{2n+1})(1 - q^{2n+2})}{(1 - q^{2n+1})(1 + q^{2n+2})} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + q^{2n-1})(1 - q^{2n})}{(1 - q^{2n-1})(1 + q^{2n})}.$$

Таким образом, из соотношений

$$\prod_{p - \text{простое}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) = \frac{1}{\zeta(s)}, \quad \prod_{p - \text{простое}} \left(1 + \frac{1}{p^s} \right) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}, \quad s > 1,$$

следует, что

$$\begin{aligned} \prod_{p - \text{простое}} \phi\left(\frac{1}{p^s}\right) &= \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{p - \text{простое}} \left(1 + \frac{1}{p^{(2n-1)s}}\right) \left(1 - \frac{1}{p^{2ns}}\right) \\ &\quad \times \left(1 - \frac{1}{p^{(2n-1)s}}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{p^{2ns}}\right)^{-1} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^2((2n-1)s)\zeta^2(4ns)}{\zeta(2(2n-1)s)\zeta^2(2ns)} = \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^2(ns)\zeta^2(4ns)}{\zeta^5(2ns)}. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\prod_{p - \text{простое}} \phi\left(\frac{1}{p^s}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^2(ns)\zeta^2(4ns)}{\zeta^5(2ns)} = \prod_{n=1}^{\infty} \zeta(sn)^{X_2(n)}, \quad (10)$$

где $s > 1$.

Аналогично доказывается периодичность величины X_2 . Осталось еще доказать единственность разложения, но это следует из непрерывности функции $\zeta(s)$ при $s > 1$ (см. [3; с. 15]).

Заметим, что здесь мы имеем дело с суммой $\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2}$, а не с $\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k(k+1)/2}$.

(ii) Рассмотрим случай $\psi(q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k(k+1)/2}$, $|q| < 1$. Имеем

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \frac{\mu(n/d)}{\Gamma(d)} \frac{\partial^d}{\partial x^d} (\log(\psi(x)))_{x=0} = -(-1)^n. \quad (11)$$

Покажем, что если $\theta(q)$ – тета-функция, удовлетворяющая некоторым условиям, то $X(n)$ – периодическая последовательность, принимающая только значения 0 и 1.

Из [4; с. 178] получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА (i) (Тождество Якоби для тройного произведения). *Имеет место следующая формула факторизации:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{kn^2+hn} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{2kn+2k})(1 - q^{2kn+k-h})(1 - q^{2kn+k+h}). \quad (12)$$

Из [1] получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА (ii) (Формула обращения Мёбиуса). *Если f и g – арифметические функции, то*

$$\sum_{d|n} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) = g(n) \quad \Longleftrightarrow \quad f(n) = \sum_{d|n} g(d). \quad (13)$$

ТЕОРЕМА 3. *Если положить $\theta(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{kn^2+hn}$, где $k, h \in \mathbb{N}$, $k > h > 0$, то имеет место следующее соотношение:*

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \frac{\mu(n/d)}{\Gamma(d)} \left(\frac{\partial^d}{\partial x^d} \log(\psi(x)) \right)_{x=0} = X_{k,h}(n), \quad (14)$$

где

$$X_{k,h}(n) = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod{p}, \\ 1, & n \equiv k + h \pmod{p}, \\ 1, & n \equiv k - h \pmod{p}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{kn^2+hn} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{2kn+2k})(1 - q^{2kn+k-h})(1 - q^{2kn+k+h}). \quad (16)$$

Заметим, что

$$\theta(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{kn^2+hn} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{X_{k,h}(n)}. \quad (17)$$

Тогда можно записать

$$\begin{aligned} \log(\theta(q)) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_{k,h}(n) \log(1 - q^n) = - \sum_{n=1}^{\infty} X_{k,h}(n) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} q^{mn} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} X_{k,h}(n) q^{mn} \end{aligned}$$

или

$$\log(\theta(q)) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} \frac{X_{k,h}(d)}{n/d} \right) q^n = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} X_{k,h}(d) d \right) \frac{q^n}{n}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n \log(\theta(q))}{\partial q^n} \right)_{q=0} = - \frac{1}{n} \sum_{d|n} X_{k,h}(d) d.$$

Применяя теорему (ii), получим эквивалентное представление

$$- \frac{1}{n} \sum_{d|n} \frac{\mu(n/d)}{\Gamma(d)} \left(\frac{\partial^d \log(\theta(q))}{\partial q^d} \right)_{q=0} = X_{k,h}(n). \quad (18)$$

3. Функция Эйлера (тотиент). Пусть n – некоторое положительное целое число. Функция Эйлера (тотиент) $\phi(n)$ определяется как натуральное число, равное числу положительных целых чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n . Интересные константы получаются, если рассмотреть сумму чисел, обратных числам $\phi(n)$. Ландау доказал, что

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\phi(n)} = a \log(N) + b + O\left(\frac{\log(N)}{N}\right),$$

где

$$\begin{aligned} a &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)^2}{k\phi(k)} = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} = \frac{315\zeta(3)}{2\pi^4} = 1.9435964368\dots, \\ b &= \frac{315\zeta(3)}{2\pi^4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)^2 \log(k)}{k\phi(k)} = -0.06057\dots \end{aligned}$$

В этих формулах $\zeta(x)$ – дзета-функция Римана, а $\zeta(3)$ – константа Аперри.

Другое выражение для константы b имеет вид

$$b = \frac{315\zeta(3)}{2\pi^4} \left(\gamma - \sum_{p-\text{простое}} \frac{\log(p)}{p^2 - p + 1} \right) = -0.06057 \dots$$

Покажем, как можно оценить величину ряда простых чисел таких, как

$$\sum_{p-\text{простое}} \frac{\log(p)}{p^2 - p + 1}. \quad (19)$$

Для этого, положим

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2} \log(1-x+x^2). \quad (20)$$

Тогда

$$b = \frac{315}{2\pi^4} \zeta(3) \left(\gamma + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta'(n)}{\zeta(n)} \sum_{d|n} \frac{f_1^{(d)}(0)}{\Gamma(d)} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \right).$$

Вычислим (19), беря f_1 из (4) и дифференцируя по s . Тогда

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \sum_p f_1' \left(\frac{1}{p^s} \right) \frac{\log(p)}{p^s} = \sum_p \frac{\log(p)}{p^2 - p + 1}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если

$$E_1 = E(f_1, M) := \left| \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{\zeta'(n)}{\zeta(n)} \sum_{d|n} \frac{f_1^{(d)}(0)}{\Gamma(d)} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \right|$$

при $M \gg 1$, то

$$E(f_1, M) \leq (2M+4)\zeta'(M+1),$$

где ζ' – производная дзета-функции Римана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $a(k) = f_1'(0)k/k!$, то $f(0) = 0$ и

$$a(n) = \begin{cases} 0, & n \equiv 1 \pmod{6}, \\ 1, & n \equiv 2 \pmod{6}, \\ 1, & n \equiv 3 \pmod{6}, \\ 0, & n \equiv 4 \pmod{6}, \\ -1, & n \equiv 5 \pmod{6}, \\ -1, & n \equiv 0 \pmod{6}. \end{cases} \quad (21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Значения функции $a(k)$ можно вычислить по формулам

$$h(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{x}\right) + \frac{1}{2} \log(1-x+x^2) \right) = \frac{x}{(x^2-x+1)},$$

$$h(x) = h\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$h(x) = \frac{x}{(x-p_1)(x-p_2)} = \frac{(\sum_{k=0}^{\infty} (xp_1)^k - \sum_{k=0}^{\infty} (xp_2)^k)}{(p_1-p_2)} = \dots,$$

где p_1, p_2 – корни уравнения $x^2 - x + 1 = 0$.

Также легко получить, что

$$a(k) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{(k-1)\pi}{3}\right) \quad \text{при } k = 1, 2, 3, \dots$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{d|n} \frac{f_1^{(d)}(0) \mu(n/d)}{\Gamma(d)} \right| < \sum_{d|n} |\mu(d)| \leq d(n) \leq n,$$

где $d(n) = \sum_{d|n} 1$. Таким образом,

$$\begin{aligned} E(f_1, M) &\leq \sum_{n=M+1}^{\infty} \left| \frac{\zeta'(n)}{\zeta(n)} \right| d(n) \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} |\zeta'(n)| n = \sum_{n=M+1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log(k)}{k^n} n \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log(k)}{k} \sum_{n=M}^{\infty} \frac{n+1}{k^n} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log(k)}{k^M} \left(\frac{k-M+1}{(k-1)^2} \right) \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log(k)}{k^M} \left(\frac{4}{k} + \frac{2M}{k} \right) = (2M+4) \zeta'(M+1). \end{aligned}$$

4. Конечные суммы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть x – целое число больше единицы, s – действительное число, $s > 1$, и g – аналитическая функция на $A \supseteq (-1, 1]$ такая, что величины $g^{(a)}(0)/a!$ ограничены сверху. Тогда

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} g\left(\frac{1}{p_k^{snl}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{p_k^s}\right) + O\left(xg\left(\frac{1}{2^{s(x+1)}}\right)\right) \quad (22)$$

при $x \gg 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k^s} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log\left(\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^{sn}}\right)\right) \\ &= - \sum_{n=1}^M \frac{\mu(n)}{n} \log\left(\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^{sn}}\right)\right) - \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log\left(\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^{sn}}\right)\right) \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{p_k^{sn}}\right) + \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log(\zeta(sn)) \\ &= \sum_{n=1}^M \frac{\mu(n)}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{p_k^{snl}} + \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log(\zeta(sn)). \end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k^s} - \sum_{n=1}^M \frac{\mu(n)}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{p_k^{snl}} = \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log(\zeta(sn)).$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k^s} - \sum_{n=1}^M \frac{\mu(n)}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{lp_k^{snl}} \right| = \left| \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log(\zeta(sn)) \right| \leq \frac{C2^s(2^s+1)(s+1)M^2}{(2^s-1)^3(sM+s-1)2^{sM}} \leq C \frac{M}{2^{s(M+1)}}.$$

Теперь предположим, что $g^{(a)}(0)/a!$, $a = 1, 2, 3, \dots$, ограничены сверху. Тогда имеем

$$\frac{g^{(a)}(0)}{a!} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k^{sa}} - \sum_{n=1}^M \frac{\mu(n)}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{lp_k^{snla}} \right) = O\left(\frac{M}{2^{sa(M+1)}} \frac{g^{(a)}(0)}{a!} \right). \quad (23)$$

Просуммируем полученную оценку по a . Так как $g^{(a)}(0)/a!$ ограничены сверху, получаем утверждение теоремы.

5. Асимптотические суммы простых чисел. В данном разделе, нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА. *Имеем*

$$\log\left(\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right) = \log(\zeta(s)) + O\left(\frac{x}{x^s \log(x)}\right), \quad (24)$$

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log(p)}{p^s - 1} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + O\left(\frac{1}{x^{s-1}}\right) \quad (25)$$

при $x \gg 1$ и $s > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) Сначала рассмотрим соотношение

$$- \sum_{p - \text{простое}} \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \log(\zeta(s))$$

или

$$- \sum_{p \leq x} \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) - \log(\zeta(s)) = \sum_{p > x} \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Однако,

$$\begin{aligned} \sum_{p > x} \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) &= O\left(\sum_{p \geq x} \frac{1}{p^s}\right) = O\left(\sum_{n=\pi(x)}^{\infty} \frac{1}{p_n^s}\right) \\ &= O\left(\sum_{n=\pi(x)}^{\infty} \frac{1}{(n \log(n))^s}\right) = O\left(\frac{x}{x^s \log(x)}\right), \end{aligned}$$

где использованы соотношения $C_1 n \log(n) < p_n < C_2 n \log(n)$ и $A_1 n / \log(n) < \pi(x) < A_2 n / \log(n)$ при $n \gg 1$ и при некоторых константах A_1, A_2, C_1, C_2 .

(b) Из [5; с. 129] имеем

$$\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k)}{k^s} = \sum_{p - \text{простое}} \frac{\log(p)}{p^s - 1} = \sum_{p \leq x} \frac{\log(p)}{p^s - 1} + \sum_{p > x} \frac{\log(p)}{p^s - 1}. \quad (26)$$

Осталось только оценить $\sum_{p>x} \log(p)/(p^s - 1)$ при больших x . Имеем

$$\sum_{p>x} \frac{\log(p)}{p^s - 1} = O\left(\sum_{p>x} \frac{p}{p^s}\right) = O\left(\sum_{n=\pi(x)} \frac{p_n}{p_n^s}\right) = O\left(\sum_{n=\pi(x)} \frac{1}{(n \log(n))^{s-1}}\right) = O\left(\frac{1}{x^{s-1}}\right).$$

Начнем со следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 5. Пусть f – аналитическая функция на $(-1, 1]$, $f(0) = 0$ и

$$c_n(f) := \sum_{d|n} \frac{f^{(d)}(0)}{\Gamma(d)} \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Если $c_n(f)/n$ ограничена сверху, то

$$\sum_{p \leq x} f\left(\frac{1}{p^s}\right) = A(s) + O\left(\frac{1}{x^{s-1} \log(x)} f'\left(\frac{1}{x^s}\right)\right), \quad (27)$$

где $s > 1$ и $x \gg 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства

$$\log\left(\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right) = \log(\zeta(s)) + O\left(\frac{1}{x^{s-1} \log(x)}\right)$$

и теоремы 1 получим

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} f\left(\frac{1}{p^s}\right) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p^{sn}}\right)\right) \frac{c_n(f)}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(f)}{n} \log\left(\zeta(sn) + O\left(\frac{x}{x^{sn} \log(x)}\right)\right) \\ &= \sum_p f\left(\frac{1}{p^s}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{x}{x^{sn} \log(x)}\right) \frac{c_n(f)}{n}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left|\sum_{p \geq x} f\left(\frac{1}{p^s}\right)\right| &= \sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{x}{x^{sn} \log(x)}\right) \frac{c_n(f)}{n} \\ &= O\left(\frac{x}{\log(x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(f)}{e^{s \log(x)n} - 1}\right) = O\left(\frac{x}{\log(x)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} c_d(f)\right) e^{-s \log(x)n}\right) \\ &= O\left(\frac{x}{\log(x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{\Gamma(n)} e^{-s \log(x)n}\right) = O\left(\frac{x}{x^s \log(x)} f'\left(\frac{1}{x^s}\right)\right), \end{aligned}$$

где использовано (i),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{e^{ny} - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} A_d\right) e^{-ny},$$

и (ii),

$$\begin{aligned} A_n = \sum_{d|n} c_d(f) &\iff c_n(f) = \sum_{d|n} A_d \mu\left(\frac{n}{d}\right) \\ &\iff \sum_{d|n} \frac{f(d)(0)}{\Gamma(d)} \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} A_d \mu\left(\frac{n}{d}\right) \end{aligned}$$

или

$$A_n = \frac{f^{(n)}(0)}{\Gamma(n)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть f – аналитическая функция на $A \supseteq (-1, 1]$, $f(0) = 0$ и $c_n(f)/n$ ограничена сверху. Тогда

$$\left| \sum_p f\left(\frac{1}{p^s}\right) \right| < +\infty$$

при $s > 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть f – аналитическая функция на $A \supseteq (-1, 1]$, $f(0) = 0$ и $c_n(f)/n$ ограничена сверху. Тогда

$$\sum_{p \leq x} f\left(\frac{1}{p^s}\right) = f(0)\pi(x) + A(s) + O\left(\frac{x}{x^s \log(x)} f'\left(\frac{1}{x^s}\right)\right),$$

где $s > 1$ и $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$.

Применяя асимптотическую формулу (25) как в доказательстве теоремы 5, получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6. Пусть f – аналитическая функция на $A \supseteq (-1, 1]$, $f(0) = 0$ и $c_n(f)/n$ ограничена сверху. Тогда

$$\sum_{p \leq x} f'\left(\frac{1}{p^s}\right) \frac{\log(p)}{p^s} = -A'(s) + O\left(\frac{1}{x^{s-1}} f'\left(\frac{1}{x^s}\right)\right)$$

при $s > 1$ и $x \gg 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Т. М. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Undergrad. Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 1976.
- [2] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks*, Part III, Springer Verlag, New York, 1991.
- [3] T. W. Körner, *Fourier Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.
- [4] G. E. Andrews, *Number Theory*, Dover Publ., New York, 1994.
- [5] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks*, Part I, Springer-Verlag, New York, 1985.

Н. Багис

Aristotle University of Thessaloniki, Греция

E-mail: bagkis@hotmail.com

Поступило

28.06.2008