Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Иванов, Поведение ограниченных решений квазилинейных эллиптических уравнений на многообразии, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 1, 51–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5265>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:02:06

УДК 517.9

Поведение ограниченных решений квазилинейных эллиптических уравнений на многообразии

А. Б. Иванов

В работе рассматривается поведение ограниченных решений квазилинейных эллиптических уравнений на специальном классе римановых многообразий. Получены достаточные условия стремления решений к нулю.

Библиография: 1 название.

Пусть M – гладкое (т.е. класса C^∞) связное полное некомпактное риманово многообразие размерности n .

Мы будем рассматривать следующий оператор:

$$\Delta_p u = \nabla_i (g^{ij} |\nabla u|^{p-2} \nabla_j u),$$

где g^{ij} – контравариантные коэффициенты римановой метрики, а

$$|\nabla u| = (g^{ij} \nabla_i u \nabla_j u)^{1/2}.$$

Будем говорить, что $u \in W_{p,\text{loc}}^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_p u = 0 \tag{1}$$

или, другими словами, является p -гармонической, если

$$-\int_{\Omega} g^{ij} |\nabla u|^{p-2} \nabla_i u \nabla_j \varphi \, dV = 0$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Будем говорить, что многообразие M является H_p -многообразием, если для любых двух непустых открытых множеств $\omega \subset \Omega \subset M$ таких, что

$$\gamma_1 \leq \frac{\text{diam}(\omega)}{\text{diam}(\Omega)} \leq \gamma_2, \quad \gamma_1 \leq \frac{\text{dist}(\omega, \partial\Omega)}{\text{diam}(\omega)} \leq \gamma_2,$$

где $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ – некоторые вещественные числа, и для всякой p -гармонической на множестве Ω функции $u \geq 0$ справедливо неравенство Харнака

$$\sup_{\omega} u \leq h \inf_{\omega} u,$$

где константа h зависит только от γ_1, γ_2 .

Фиксируем произвольную точку $O \in M$.

Договоримся о следующих обозначениях: $Q_R = \{x : \text{dist}(O, x) < R\}$ – геодезический шар радиуса R с центром в точке O , $S_R = \{x : \text{dist}(O, x) = R\}$ – геодезическая сфера радиуса R с центром в точке O , $B_k = Q_{2^k}$. Для любого множества Ω обозначим $P_k = \overline{B}_k \setminus \Omega$, $D_k = B_{k+5} \setminus \overline{B}_k$, $G_k = \overline{B}_{k+4} \setminus B_{k+1}$ и $d_k = B_{k+3} \setminus \overline{B}_{k+2}$.

Пусть A – компактное, а B – открытое подмножество M и $A \subset B$. Определим p -емкость множества A относительно B как

$$\text{cap}(A, B) = \inf_{\varphi} \int_B |\nabla \varphi|^p dV,$$

где нижняя грань берется по всем функциям $\varphi \in C_0^\infty(B)$, тождественно равным единице в некоторой окрестности A .

Открытое множество Ω называется p -массивным, если

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\text{cap}(P_{2k}, B_{2k+2})}{\text{cap}(\overline{B}_{2k+1}, B_{2k+2})} \right)^{1/(p-1)} < \infty.$$

Пусть K – компактное подмножество M . Будут изучаться ограниченные решения уравнения

$$\Delta_p u = c(x)|u|^{p-2}u \quad (2)$$

в области $M \setminus K$, где $c(x) \in L_{\infty, \text{loc}}(M)$ – неотрицательная функция, а $p > 1$ – некоторое вещественное число. Под *ограниченным решением* уравнения (2) подразумевается функция $u \in W_{p, \text{loc}}^1(M \setminus K) \cap L_\infty(M \setminus K)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$- \int_{M \setminus K} g^{ij} |\nabla u|^{p-2} \nabla_i u \nabla_j \varphi dV = \int_{M \setminus K} c(x) |u|^{p-2} u \varphi dV$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(M \setminus K)$.

Основным результатом является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M является H_p -многообразием и функция $c(x)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{d_k \cap \Omega} \frac{c(x)}{\text{cap}(G_k, D_k)} dV \right)^{1/(p-1)} = \infty$$

для любого p -массивного множества Ω . Тогда любое ограниченное решение $u(x)$ уравнения (2) в $M \setminus K$ стремится к нулю при $\text{dist}(O, x) \rightarrow \infty$.

Для любого вещественного $\varepsilon \geq 0$ обозначим

$$\Delta_{p, \varepsilon} u = \nabla_i (g^{ij} (\varepsilon^2 + |\nabla u|^2)^{(p-2)/2} \nabla_j u).$$

Пусть $c_\varepsilon(x) \in C^\infty(\Omega)$, $c_\varepsilon(x) \geq 0$, такие, что $c_\varepsilon(x) \rightarrow c(x)$ в $L_{p/(p-1)}(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Такие функции, очевидно, существуют. Например, можно взять в качестве $c_\varepsilon(x)$ средние функции по Стеклову.

Для доказательства нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть Ω – ограниченная область в M , $c(\cdot) \in L_{\infty, \text{loc}}(M)$ и $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Тогда существует последовательность ε_k , $k = 1, 2, \dots$, такая, что $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и решения u_{ε_k} задач

$$\Delta_{p, \varepsilon_k} u_{\varepsilon_k} = c_{\varepsilon_k}(x) \quad \text{в } \Omega, \quad (3)$$

$$u_{\varepsilon_k}|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega} \quad (4)$$

сходятся в $C(\Omega)$ при $k \rightarrow \infty$ к решению задачи

$$\Delta_p u = c(x) \quad \text{в } \Omega, \quad (5)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного $\varepsilon \in (0, 1)$ рассмотрим следующие функционалы:

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u) &= \int_{\Omega} (\varepsilon^2 + |\nabla u|^2)^{p/2} dV + p \int_{\Omega} c_\varepsilon(x) u dV, \\ J(u) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^p dV + p \int_{\Omega} c(x) u dV. \end{aligned}$$

Заметим, что функции, на которых достигаются нижние грани функционалов J_ε и J при условии $u|_{\partial\Omega} = \varphi$, являются решениями задач (3), (4) и (5), (6) соответственно. Пусть u_ε – функции, на которых достигается $\inf_{u \in W_p^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = \varphi} J_\varepsilon(u)$. Покажем, что множество $\{u_\varepsilon\}$ ограничено в $W_p^1(\Omega)$. Если это не так, то без потери общности можно считать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon\|_{W_p^1(\Omega)} = \infty. \quad (7)$$

Покажем, что

$$\|u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} \leq c_1 \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} + c_2, \quad (8)$$

где постоянная c_1 не зависит от ε .

Действительно, рассмотрим $w_\varepsilon = u_\varepsilon - \varphi$; тогда $w_\varepsilon \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$.

Согласно неравенству Минковского

$$\|u_\varepsilon\|_{L_p} = \left(\int_{\Omega} |u_\varepsilon|^p dV \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega} |w_\varepsilon|^p dV \right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |\varphi|^p dV \right)^{1/p}.$$

В то же время, в силу неравенства Фридрихса

$$\left(\int_{\Omega} |w_\varepsilon|^p dV \right)^{1/p} \leq c_1 \left(\int_{\Omega} |\nabla w_\varepsilon|^p dV \right)^{1/p},$$

где $c_1 > 0$ не зависит от ε . Учитывая два последних неравенства, а также оценку

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |\nabla w_\varepsilon|^p dV \right)^{1/p} &= \left(\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon - \nabla \varphi|^p dV \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^p dV \right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^p dV \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

приходим к соотношению (8).

Далее, ввиду того, что нормы $\|c_\varepsilon\|_{L_{p/(p-1)}(\Omega)}$ ограничены некоторой константой, не зависящей от ε , имеем

$$\begin{aligned}
 J_\varepsilon(u_\varepsilon) &\geq \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^p dV + p \int_{\Omega} c_\varepsilon(x) u_\varepsilon(x) dV \\
 &\geq \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)}^p - p \left(\int_{\Omega} |c_\varepsilon(x)|^{p/(p-1)} dV \right)^{(p-1)/p} \left(\int_{\Omega} |u_\varepsilon(x)|^p dV \right)^{1/p} \\
 &\geq \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)}^p - p(c_1 \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} + c_2) \left(\int_{\Omega} |c_\varepsilon(x)|^{p/(p-1)} dV \right)^{(p-1)/p} \\
 &\geq \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)}^p - c_3 \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} + c_4,
 \end{aligned} \tag{9}$$

где c_3, c_4 – константы, не зависящие от ε .

Согласно (7) и (8) правая часть (9) стремится к бесконечности при $k \rightarrow \infty$. Мы пришли к противоречию и показали, что множество $\{u_{\varepsilon_k}\}$ ограничено в $W_p^1(\Omega)$.

Таким образом, существует последовательность $\varepsilon_k \in (0, 1)$, $k = 1, 2, \dots$, такая, что $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и при этом u_{ε_k} сходится слабо в $W_p^1(\Omega)$ и сильно в $L_p(\Omega)$ при $k \rightarrow \infty$ к некоторой функции $u_0 \in W_p^1(\Omega)$. Для завершения доказательства нам осталось показать, что функция u_0 минимизирует функционал J .

Заметим, что функционал J выпуклый. Тогда

$$J(u + \psi) - J(u_0) \geq J'(u_0)\psi$$

для любой функции $\psi \in W_p^1(\Omega)$, где

$$J'(u_0)\psi = \frac{d}{dt} J(u_0 + t\psi)|_{t=0} = \int_{\Omega} g^{ij} |\nabla u|^{p-2} \nabla_i u \nabla_j \psi dV + \int_{\Omega} c(x) \psi(x) dV.$$

Возьмем $\psi = u_{\varepsilon_k} - u_0$; получим

$$J(u_{\varepsilon_k}) - J(u_0) \geq J'(u_0)(u_{\varepsilon_k} - u_0) = \bar{o}(1) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \tag{10}$$

т.е.

$$J(u_0) \leq J(u_{\varepsilon_k}) + \bar{o}(1). \tag{11}$$

Покажем теперь, что

$$J_{\varepsilon_k}(w) \leq J(w) + \bar{o}(1) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \tag{12}$$

причем $\bar{o}(1)$ в правой части стремится к нулю равномерно по w на всяком ограниченном подмножестве $W_p^1(\Omega)$. Рассмотрим два множества

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : |\nabla w| < \sqrt{\varepsilon_k}\}, \quad \Omega_2 = \{x \in \Omega : |\nabla w| \geq \sqrt{\varepsilon_k}\}.$$

На Ω_2 имеем

$$\int_{\Omega_2} (\varepsilon_k^2 + |\nabla w|^2)^{p/2} dV \leq \int_{\Omega_2} |\nabla w|^p (1 + \varepsilon_k) dV.$$

На Ω_1 имеем

$$\int_{\Omega_1} (\varepsilon_k^2 + |\nabla w|^2)^{p/2} dV \leq \int_{\Omega_1} (\varepsilon_k^2 + \varepsilon_k)^{p/2} dV,$$

что немедленно приводит нас к соотношению (12).

Пусть u^* – функция, на которой достигается $\inf_{u \in W_p^1(\Omega), u|_{\partial\Omega}=\varphi} J(u)$. Тогда

$$J(u^*) \leq J(u_{\varepsilon_k}). \quad (13)$$

Из вида функционалов J и J_{ε_k} имеем

$$J(u_{\varepsilon_k}) \leq J_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}) + \bar{o}(1) \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (14)$$

По определению функций u_{ε_k}

$$J_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \leq J_{\varepsilon}(u^*). \quad (15)$$

Наконец, из (12) следует

$$J_{\varepsilon_k}(u^*) \leq J(u^*) + \bar{o}(1) \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (16)$$

В то же время

$$J(u_{\varepsilon_k}) + \bar{o}(1) \leq J_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}) \leq J(u_{\varepsilon_k}) + \bar{o}(1) \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (17)$$

В самом деле, первое неравенство в (17) следует из (16), а второе из формулы (12), в которой следует взять $w = u_{\varepsilon_k}$. В свою очередь, из (17) и (10) получим, что $J_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}) \rightarrow J(u_0)$ при $k \rightarrow \infty$. С другой стороны, из (13)–(16) следует

$$J(u^*) + \bar{o}(1) \leq J_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}) \leq J(u^*) + \bar{o}(1) \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

что приводит к $J_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}) \rightarrow J(u^*)$ при $k \rightarrow \infty$.

Таким образом, мы заключаем, что $J(u^*) = J(u_0)$, т.е. на u_0 достигается нижняя грань функционала J . Другими словами, u_0 является решением задачи (5), (6).

Заметим теперь [1], что все функции u_{ε} и u_0 удовлетворяют условию Гёльдера с общей константой, которая не зависит от k . Отсюда и из сходимости в $L_p(\Omega)$ следует сходимость решений (3), (4) к решению задачи (5), (6) в $C(\Omega)$ при $k \rightarrow \infty$.

Докажем теперь следующую лемму о возрастании.

ЛЕММА 2. Пусть $\Delta_p u \geq 0$ в $\Omega \cap Q_{4R}$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ и $u \geq 0$ в Ω . Тогда

$$\sup_{Q_{4R} \cap \Omega} u - \sup_{Q_R \cap \Omega} u \geq h \left(\frac{\text{cap}(\bar{Q}_R \setminus \Omega, Q_{4R})}{\text{cap}(\bar{Q}_{2R}, Q_{4R})} \right)^{1/(p-1)} \sup_{Q_{4R} \cap \Omega} u, \quad (18)$$

где $h > 0$ – некоторая константа, не зависящая от u , R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию v такую, что

$$\Delta_p v = 0 \quad \text{в } (Q_{4R} \setminus Q_R) \cap \Omega, \quad (19)$$

$$v|_{S_{4R}} = \sup_{Q_{4R}} u, \quad (20)$$

$$v|_{\bar{Q}_R \setminus \Omega} = 0. \quad (21)$$

Тогда по принципу максимума в $\Omega \cap Q_{4R}$ имеем

$$v|_{Q_{4R} \setminus (\bar{Q}_{4R} \setminus \Omega)} \geq 0, \quad v \geq u. \quad (22)$$

Из последнего неравенства и из (20), вновь пользуясь принципом максимума, получаем, что

$$\sup_{Q_{4R}} v - \sup_{S_{2R}} v \leq \sup_{Q_{4R} \cap \Omega} u - \sup_{S_{2R} \cap \Omega} u \leq \sup_{Q_{4R} \cap \Omega} u - \sup_{Q_R \cap \Omega} u. \quad (23)$$

Наряду с функцией v рассмотрим семейство функций $\{v_\varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0, 1)$, таких, что

$$\Delta_{p,\varepsilon} v_\varepsilon = 0 \quad \text{в } (Q_{4R} \setminus Q_R) \cap \Omega, \quad (24)$$

$$v_\varepsilon|_{S_{4R}} = \sup_{Q_{4R}} u, \quad (25)$$

$$v_\varepsilon|_{\overline{Q_R} \setminus \Omega} = 0. \quad (26)$$

Пусть далее

$$w(x) = \frac{1}{\sup_{Q_{4R}} v} \left(\sup_{Q_{4R}} v - v(x) \right), \quad w_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sup_{Q_{4R}} v_\varepsilon} \left(\sup_{Q_{4R}} v_\varepsilon - v_\varepsilon(x) \right).$$

Обозначим

$$\begin{aligned} D &= \overline{Q_R} \setminus \Omega, \\ D_0 &= \left\{ x \in Q_{4R} : w(x) \geq \sup_{S_{2R}} w \right\}, \\ D_{0,\varepsilon} &= \left\{ x \in Q_{4R} : w_\varepsilon(x) \geq \sup_{S_{2R}} w_\varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

Определим

$$\tilde{w}(x) = \begin{cases} 1, & x \in D_0, \\ \frac{w(x)}{\sup_{S_{2R}} w}, & x \in Q_{4R} \setminus D_0, \end{cases} \quad \tilde{w}_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in D_0, \\ \frac{w_\varepsilon(x)}{\sup_{S_{2R}} w_\varepsilon}, & x \in Q_{4R} \setminus D_{0,\varepsilon}. \end{cases}$$

Рассмотрим интеграл

$$I_\varepsilon = \int_{Q_{4R} \setminus D_{0,\varepsilon}} (\varepsilon^2 + |\nabla \tilde{w}_\varepsilon|^2)^{(p-2)/2} |\nabla \tilde{w}_\varepsilon|^2 dV.$$

Так как в силу принципа максимума $D_{0,\varepsilon} \subseteq Q_{2R}$, имеем

$$I_\varepsilon \leq \int_{Q_{4R} \setminus Q_{2R}} (\varepsilon^2 + |\nabla \tilde{w}_\varepsilon|^2)^{p/2} dV.$$

Повторяя доказательство леммы 1, получим, что

$$\int_{Q_{4R} \setminus Q_{2R}} (\varepsilon_k^2 + |\nabla \tilde{w}_{\varepsilon_k}|^2)^{p/2} dV \rightarrow \text{cap}(Q_{2R}, Q_{4R}) \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

для некоторой последовательности $\varepsilon_k \in (0, 1)$, $k = 1, 2, \dots$, такой, что $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и $v_{\varepsilon_k} \rightarrow v$ в $C(\Omega)$. Последнее соотношение приводит нас к неравенству

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_{\varepsilon_k} \leq \text{cap}(Q_{2R}, Q_{4R}). \quad (27)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 I_{\varepsilon_k} &= \int_{\partial D_{0,\varepsilon_k}} (\varepsilon_k^2 + |\nabla \tilde{w}_{\varepsilon_k}|^2)^{(p-2)/2} \frac{\partial \tilde{w}_{\varepsilon_k}}{\partial \nu} dV \\
 &= \int_{S_{4R}} (\varepsilon_k^2 + |\nabla \tilde{w}_{\varepsilon_k}|^2)^{(p-2)/2} \frac{\partial \tilde{w}_{\varepsilon_k}}{\partial \nu} dV \\
 &= \left(\frac{1}{\sup_{S_{2R}} w_{\varepsilon_k}} \right)^{p-1} \int_{S_{4R}} \left(\varepsilon_k^2 \left(\sup_{S_{2R}} w_{\varepsilon_k} \right)^2 + |\nabla w_{\varepsilon_k}|^2 \right)^{(p-2)/2} \frac{\partial w_{\varepsilon_k}}{\partial \nu} dV \\
 &= \left(\frac{1}{\sup_{S_{2R}} w_{\varepsilon_k}} \right)^{p-1} \int_{Q_{4R} \setminus D} \left(\varepsilon_k^2 \left(\sup_{S_{2R}} w_{\varepsilon_k} \right)^2 + |\nabla w_{\varepsilon_k}|^2 \right)^{(p-2)/2} |\nabla w_{\varepsilon_k}|^2 dV \\
 &\geq \left(\frac{1}{\sup_{S_{2R}} w_{\varepsilon_k}} \right)^{p-1} \int_{Q_{4R} \setminus D} |\nabla w_{\varepsilon_k}|^p dV.
 \end{aligned}$$

По определению емкости имеем

$$I_{\varepsilon_k} \geq \left(\frac{1}{\sup_{S_{2R}} w_{\varepsilon_k}} \right)^{p-1} \text{cap}(D, Q_{4R}). \quad (28)$$

Из (28) и неравенства Харнака получим

$$\inf_{S_{2R}} w_{\varepsilon_k} \geq h \left(\frac{\text{cap}(D, Q_{4R})}{I_{\varepsilon_k}} \right)^{1/(p-1)}.$$

Учитывая последнюю оценку и пользуясь определением функции w_{ε_k} , будем иметь

$$\sup_{Q_{4R}} v_{\varepsilon_k} - \sup_{S_{2R}} v_{\varepsilon_k} \geq h \left(\frac{\text{cap}(D, Q_{4R})}{I_{\varepsilon_k}} \right)^{1/(p-1)} \sup_{Q_{4R}} v_{\varepsilon_k}.$$

Ввиду равномерной сходимости v_{ε_k} к v при $k \rightarrow \infty$ на $\overline{Q_{4R}}$ соотношение (27) позволяет утверждать, что

$$\sup_{Q_{4R}} v - \sup_{S_{2R}} v \geq h \left(\frac{\text{cap}(D, Q_{4R})}{\text{cap}(Q_{2R}, Q_{4R})} \right)^{1/(p-1)} \sup_{Q_{4R}} v,$$

откуда согласно (22) получим

$$\sup_{Q_{4R}} v - \sup_{S_{2R}} v \geq \left(\frac{\text{cap}(D, Q_{4R})}{\text{cap}(Q_{2R}, Q_{4R})} \right)^{1/(p-1)} \sup_{Q_{4R} \cap \Omega} u.$$

Для завершения доказательства осталось воспользоваться неравенством (23).

Воспользуемся только что полученным утверждением для доказательства следующей леммы.

ЛЕММА 3. Пусть $\Omega \subset M$ не является p -массивным, а функция $c(x)$ неотрицательна в Ω . Тогда любое ограниченное решение задачи

$$\begin{aligned}
 \Delta_p u &= c(x) \quad \text{в } \Omega, \\
 u|_{\partial\Omega} &= 0
 \end{aligned}$$

стремится к нулю при $\text{dist}(O, x) \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $u \equiv 0$ в $M \setminus \Omega$ и, пользуясь ограниченностью u , обозначим

$$E = \sup_M u.$$

Допустим теперь, что утверждение леммы не выполнено. Тогда существует $\alpha > 0$ такое, что

$$\sup_{B_{2k}} u \geq \alpha \quad \text{для всех } k = 0, 1, 2, \dots$$

Выберем целое неотрицательное l таким образом, чтобы

$$\sum_{k=0}^l \left(\frac{\text{cap}(P_{2k}, B_{2k+2})}{\text{cap}(\bar{B}_{2k+1}, B_{2k+2})} \right)^{1/(p-1)} > \frac{E}{\alpha h}, \quad (29)$$

где $h > 0$ – константа из леммы 2. Последнее возможно в силу того, что Ω не является p -массивным. Применим лемму 2 для $R = 2^{2k}$, получим

$$\sup_{B_{2k+2} \cap \Omega} u - \sup_{B_{2k} \cap \Omega} u \geq h \left(\frac{\text{cap}(P_{2k}, B_{2k+2})}{\text{cap}(\bar{B}_{2k+1}, B_{2k+2})} \right)^{1/(p-1)} \sup_{B_{2k+2} \cap \Omega} u. \quad (30)$$

Суммируя (30) по всем $k = 0, 1, 2, \dots, l$, имеем

$$E \geq h\alpha \sum_{k=0}^l \left(\frac{\text{cap}(P_{2k}, B_{2k+2})}{\text{cap}(\bar{B}_{2k+1}, B_{2k+2})} \right)^{1/(p-1)}, \quad (31)$$

что, согласно (29), приводит нас к противоречию.

Следующая лемма является разновидностью хорошо известной леммы Гервера–Ландиса.

ЛЕММА 4. Пусть $\omega \Subset \Omega \subset M$ – кусочно-гладкие области, а $u \in C^\infty(\Omega \setminus \omega)$ – неотрицательная функция. Пусть также

$$\text{osc}_{\Omega \setminus \omega} u < A.$$

Тогда для всякого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует гладкая гиперповерхность Γ , разделяющая ω и $\partial\Omega$ такая, что

$$\int_{\Gamma} (\varepsilon^2 + |\nabla u|^2)^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \leq \frac{1}{A} \int_{\Omega \setminus \omega} (\varepsilon^2 + |\nabla v_\varepsilon|^2)^{(p-2)/2} |\nabla v_\varepsilon|^2 dV, \quad (32)$$

где $\partial u / \partial \nu$ – производная по нормали к Γ , направленной в сторону ω , а функция v является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} \Delta_{p,\varepsilon} v_\varepsilon &= 0 & \text{в } \Omega \setminus \omega, \\ v_\varepsilon|_{\partial\Omega} &= 0, & v_\varepsilon|_{\partial\omega} &= A. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что

$$\inf_{\Omega \setminus \omega} u = 0, \quad \sup_{\Omega \setminus \omega} u < A.$$

Рассмотрим $w = v_\varepsilon - u$. Очевидно, что $w|_{\partial\omega} > 0$, $w|_{\partial\Omega} < 0$. Тогда существует поверхность уровня $\Gamma = \{x \in \Omega \setminus \omega : w(x) = 0\}$, которая разделяет ω и Ω . Мы можем также предполагать, что Γ – бесконечно гладкая гиперповерхность. В противном случае, ничто не мешает нам заменить функцию u на $u + \delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало, и при этом воспользоваться леммой Сарда.

Для любых векторов $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ очевидно имеем

$$((\varepsilon^2 + |\nabla\xi|^2)\xi - (\varepsilon^2 + |\nabla\eta|^2)\eta, \xi - \eta) \geq 0, \quad (33)$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Взяв в (33) $\xi = \nabla u$ и $\eta = \nabla v_\varepsilon$ и принимая во внимание, что $\nu = \nabla w/|w|$ на поверхности уровня Γ , имеем

$$\begin{aligned} & (\varepsilon^2 + |\nabla u|^2)^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial \nu} - (\varepsilon^2 + |\nabla v_\varepsilon|^2)^{(p-2)/2} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} \\ &= ((\varepsilon^2 + |\nabla u|^2)^{(p-2)/2} \nabla u - (\varepsilon^2 + |\nabla v_\varepsilon|^2)^{(p-2)/2} \nabla v_\varepsilon, \nu) \\ &= \left((\varepsilon^2 + |\nabla u|^2)^{(p-2)/2} \nabla u - (\varepsilon^2 + |\nabla v_\varepsilon|^2)^{(p-2)/2} \nabla v_\varepsilon, \frac{\nabla w}{|w|} \right) \leq 0, \end{aligned}$$

откуда получим, что

$$\int_{\Gamma} (\varepsilon^2 + |\nabla u|^2)^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \leq \int_{\Gamma} (\varepsilon^2 + |\nabla v_\varepsilon|^2)^{(p-2)/2} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} ds.$$

Применив к правой части последнего неравенства формулу Грина, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\varepsilon^2 + |\nabla v_\varepsilon|^2)^{(p-2)/2} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} ds &= \int_{\partial\omega} (\varepsilon^2 + |\nabla v_\varepsilon|^2)^{(p-2)/2} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} ds \\ &= \frac{1}{A} \int_{\partial\omega} (\varepsilon^2 + |\nabla v_\varepsilon|^2)^{(p-2)/2} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} v_\varepsilon ds \\ &= \frac{1}{A} \int_{\Omega \setminus \omega} (\varepsilon^2 + |\nabla v_\varepsilon|^2)^{(p-2)/2} |\nabla v_\varepsilon|^2 dV, \end{aligned}$$

что приводит нас к (32). Лемма полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Обозначим $u_+ = \max(u, 0)$, $u_- = \min(u, 0)$. Покажем, что u_+ стремится к нулю при $\text{dist}(O, x) \rightarrow \infty$. Имеем

$$\Delta_p u_+ \geq c(x) u_+^{p-1} \quad \text{в } M \setminus K.$$

Пусть

$$m_+(r) = \text{ess sup}_{S_r} u_+(x).$$

Вследствие принципа максимума, возможны только два случая:

- 1) $m_+(r)$ начиная с некоторого r_0 не возрастает;
- 2) $m_+(r)$ начиная с некоторого r_0 не убывает.

Рассмотрим первый случай. Доказательство будем проводить от противного. Предположим, что для некоторого $\delta > 0$, некоторого целого k_0 и всех $k > k_0$

$$m_+(2^k) > \delta. \quad (34)$$

Рассмотрим

$$v = \left(u_+ - \frac{\delta}{2}\right)_+, \quad \Omega = \left\{x : u_+ - \frac{\delta}{2} > 0\right\}.$$

Тогда

$$\Delta_p v \geq c(x) \left(\frac{\delta}{2}\right)^{p-1} \chi_\Omega(x) \quad \text{в } M \setminus K,$$

где χ_Ω – функция индикатора множества Ω .

Можно считать, что множество Ω p -массивное. В противном случае мы применим лемму 3 и придем к противоречию с предположением (34).

Рассмотрим решение w следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta_p w = c(x) \left(\frac{\delta}{2}\right)^{p-1} \chi_{D_k \cap \Omega} & \text{в } D_k, \\ w|_{\partial B_k} = w|_{\partial B_{k+5}} = m_+(2^k). \end{cases} \quad (35)$$

По принципу максимума

$$w(x) \geq v(x) \quad \text{в } D_k. \quad (36)$$

Пусть $c_\varepsilon(x) \in C^\infty(\Omega)$, $c_\varepsilon(x) \geq 0$ такие, что $c_\varepsilon(x) \rightarrow c(x) \chi_{D_k \cap \Omega}$ в $L_{p/(p-1)}(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Согласно лемме 1 существует последовательность ε_j , $j = 1, 2, \dots$, такая, что $\varepsilon_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ и решения w_{ε_j} задач

$$\begin{cases} \Delta_{p, \varepsilon_j} w_{\varepsilon_j} = c_{\varepsilon_j}(x) \left(\frac{\delta}{2}\right)^{p-1} \chi_{D_k \cap \Omega} & \text{в } D_k, \\ w_{\varepsilon_j}|_{\partial B_k} = w_{\varepsilon_j}|_{\partial B_{k+5}} = m_+(2^k) \end{cases} \quad (37)$$

сходятся в $C(D_k)$ к решению задачи (35). Обозначим

$$w^* = m_+(2^k) - w, \quad w_{\varepsilon_j}^* = m_+(2^k) - w_{\varepsilon_j}.$$

Заметим, что $w_{\varepsilon_j}^*$ сходятся к w^* в $C(D_k)$ при $k \rightarrow \infty$.

Применим лемму 4 к функции $w_{\varepsilon_j}^*$ и областям G_k и D_k . Из нее следует, что существует гиперповерхность $\Gamma \subset D_k$, разделяющая G_k и ∂D_k , причем

$$\int_\Gamma (\varepsilon_j^2 + |\nabla w_{\varepsilon_j}^*|^2)^{(p-2)/2} \frac{\partial w_{\varepsilon_j}^*}{\partial \nu} ds \leq \frac{1}{A_j} \int_{D_k \setminus G_k} (\varepsilon_j^2 + |\nabla v_{\varepsilon_j}|^2)^{(p-2)/2} |\nabla v_{\varepsilon_j}|^2 dV, \quad (38)$$

где

$$A_j = \operatorname{osc}_{D_k \setminus G_k} w_{\varepsilon_j}^* + \frac{1}{j},$$

ν – нормаль к Γ , направленная в сторону G_k , а функция v_{ε_j} является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta_{p, \varepsilon_j} v_{\varepsilon_j} = 0 & \text{в } D_k \setminus G_k, \\ v_{\varepsilon_j}|_{\partial D_k} = 0, \quad v_{\varepsilon_j}|_{\partial G_k} = A_j. \end{cases}$$

Гиперповерхность Γ разбивает D_k на компоненты связности, одна из которых содержит множество G_k . Обозначим эту компоненту через $\tilde{G}_k$. Согласно формуле Грина будем иметь

$$\int_\Gamma (\varepsilon_j^2 + |\nabla w_{\varepsilon_j}^*|^2)^{(p-2)/2} \frac{\partial w_{\varepsilon_j}^*}{\partial \nu} ds = \int_{\tilde{G}_k} \Delta_{p, \varepsilon_j} w_{\varepsilon_j}^* dV.$$

Последнее равенство и уравнение (37) дают нам неравенство

$$\left(\frac{\delta}{2}\right)^{p-1} \int_{d_k} c_{\varepsilon_j}(x) dV \leq \frac{1}{A_j} \int_{D_k \setminus G_k} (\varepsilon_j^2 + |\nabla v_{\varepsilon_j}|^2)^{(p-2)/2} |\nabla v_{\varepsilon_j}|^2 dV. \quad (39)$$

Заметим, что в силу принципа максимума и определения функции w_ε^*

$$\operatorname{osc}_{D_k \setminus G_k} w_\varepsilon^* = \max \left(\sup_{S_{2k+1}} w_\varepsilon^*, \sup_{S_{2k+4}} w_\varepsilon^* \right).$$

С помощью рассуждений, приведенных в доказательстве леммы 1, легко получить, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{A_j} \int_{D_k \setminus G_k} (\varepsilon_j^2 + |\nabla v_{\varepsilon_j}|^2)^{(p-2)/2} |\nabla v_{\varepsilon_j}|^2 dV = \left(\operatorname{osc}_{D_k \setminus G_k} w_\varepsilon^* \right)^{p-1} \operatorname{cap}(G_k, D_k).$$

Переходя к пределу в (39) при $j \rightarrow \infty$, имеем в силу предыдущего соотношения

$$\max \left(\sup_{S_{2k+1}} w^*, \sup_{S_{2k+4}} w^* \right) \geq \frac{\delta}{2} \left(\frac{\int_{d_k} c(x) dV}{\operatorname{cap}(G_k, D_k)} \right)^{1/(p-1)}. \quad (40)$$

Пользуясь неравенством Харнака и (36), находим

$$\sup_{S_{2k+1}} w^* \leq h \inf_{S_{2k+1}} w^* \leq h(m_+(2^k) - m_+(2^{k+1})) \leq h(m_+(2^k) - m_+(2^{k+5})).$$

Аналогично,

$$\sup_{S_{2k+4}} w^* \leq h \inf_{S_{2k+4}} w^* \leq h(m_+(2^k) - m_+(2^{k+4})) \leq h(m_+(2^k) - m_+(2^{k+5})),$$

что вместе с (40) приводит к оценке

$$(m_+(2^k) - m_+(2^{k+5})) \geq \frac{\delta}{2h} \left(\frac{\int_{d_k} c(x) dV}{\operatorname{cap}(G_k, D_k)} \right)^{1/(p-1)}. \quad (41)$$

Суммируя (41) по всем k от k_0 до $k_0 + N$, где N – некоторое неотрицательное число, получим

$$\sum_{i=0}^4 m_+(2^{k_0+i}) - \sum_{i=1}^5 m_+(2^{k_0+N+i}) \geq \frac{h\delta}{2} \sum_{k=k_0}^{k_0+N} \left(\frac{\int_{d_k} c(x) dV}{\operatorname{cap}(G_k, D_k)} \right)^{1/(p-1)}.$$

В силу условия теоремы правая часть последнего неравенства стремится к бесконечности при $N \rightarrow \infty$, в то время как левая остается ограниченной. Мы пришли к противоречию с предположением (34) в том случае, когда $m_+(r)$, начиная с некоторого r_0 , не возрастает.

Рассмотрим второй случай: $m_+(r)$, начиная с некоторого r_0 , не убывает. Предположим, что для некоторого $\delta > 0$, некоторого целого k_0 и всех $k > k_0$

$$m_+(2^k) > \delta. \quad (42)$$

Рассмотрим

$$v = \left(u_+ - \frac{\delta}{2}\right)_+, \quad \Omega = \left\{x : u_+ - \frac{\delta}{2} > 0\right\}.$$

Тогда

$$\Delta_p v \geq c(x) \left(\frac{\delta}{2}\right)^{p-1} \chi_\Omega(x) \quad \text{в } M \setminus K,$$

где χ_Ω – функция индикатора множества Ω .

Можно считать, что множество Ω p -массивное. В противном случае мы применим лемму 3 и придем к противоречию с предположением (42).

Рассмотрим решение w следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta_p w = c(x) \left(\frac{\delta}{2}\right)^{p-1} \chi_{d_k \cap \Omega} & \text{в } D_k, \\ w|_{\partial B_k} = w|_{\partial B_{k+5}} = m_+(2^{k+5}). \end{cases} \quad (43)$$

По принципу максимума

$$w(x) \geq v(x) \quad \text{в } D_k. \quad (44)$$

Пусть $c_\varepsilon(x) \in C^\infty(\Omega)$, $c_\varepsilon(x) \geq 0$ такие, что $c_\varepsilon(x) \rightarrow c(x) \chi_{d_k \cap \Omega}$ в $L_{p/(p-1)}(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Согласно лемме 1 существует последовательность ε_j , $j = 1, 2, \dots$, такая, что $\varepsilon_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ и решения w_{ε_j} задач

$$\begin{cases} \Delta_{p, \varepsilon_j} w_{\varepsilon_j} = c_{\varepsilon_j}(x) \left(\frac{\delta}{2}\right)^{p-1} \chi_{d_k \cap \Omega} & \text{в } D_k, \\ w_{\varepsilon_j}|_{\partial B_k} = w_{\varepsilon_j}|_{\partial B_{k+5}} = m_+(2^{k+5}) \end{cases} \quad (45)$$

сходятся в $C(D_k)$ к решению задачи (43). Обозначим

$$w^* = m_+(2^{k+5}) - w, \quad w_{\varepsilon_j}^* = m_+(2^{k+5}) - w_{\varepsilon_j}.$$

Заметим, что $w_{\varepsilon_j}^*$ сходятся к w^* в $C(D_k)$ при $k \rightarrow \infty$. Применим лемму 4 к функции $w_{\varepsilon_j}^*$ и областям G_k и D_k . Из нее следует, что существует гиперповерхность $\Gamma \subset D_k$, разделяющая G_k и ∂D_k , причем

$$\int_\Gamma (\varepsilon_j^2 + |\nabla w_{\varepsilon_j}^*|^2)^{(p-2)/2} \frac{\partial w_{\varepsilon_j}^*}{\partial \nu} ds \leq \frac{1}{A_j} \int_{D_k \setminus G_k} (\varepsilon_j^2 + |\nabla v_{\varepsilon_j}|^2)^{(p-2)/2} |\nabla v_{\varepsilon_j}|^2 dV, \quad (46)$$

где

$$A_j = \operatorname{osc}_{D_k \setminus G_k} w_{\varepsilon_j}^* + \frac{1}{j},$$

ν – нормаль к Γ , направленная в сторону G_k , а функция v_{ε_j} является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta_{p, \varepsilon_j} v_{\varepsilon_j} = 0 & \text{в } D_k \setminus G_k, \\ v_{\varepsilon_j}|_{\partial D_k} = 0, \quad v_{\varepsilon_j}|_{\partial G_k} = A_j. \end{cases}$$

Гиперповерхность Γ разбивает D_k на компоненты связности, одна из которых содержит множество G_k . Обозначим эту компоненту через $\tilde{G}_k$. Согласно формуле Грина будем иметь

$$\int_{\Gamma} (\varepsilon_j^2 + |\nabla w_{\varepsilon_j}^*|^2)^{(p-2)/2} \frac{\partial w_{\varepsilon_j}^*}{\partial \nu} ds = \int_{\tilde{G}_k} \Delta_{p, \varepsilon_j} w_{\varepsilon_j}^* dV.$$

Последнее равенство и уравнение (45) дают нам неравенство

$$\left(\frac{\delta}{2}\right)^{p-1} \int_{d_k} c_{\varepsilon_j}(x) dV \leq \frac{1}{A_j} \int_{D_k \setminus G_k} (\varepsilon_j^2 + |\nabla v_{\varepsilon_j}|^2)^{(p-2)/2} |\nabla v_{\varepsilon_j}|^2 dV. \quad (47)$$

Заметим, что в силу принципа максимума и определения функции w_{ε}^*

$$\operatorname{osc}_{D_k \setminus G_k} w_{\varepsilon}^* = \max \left(\sup_{S_{2^{k+1}}} w_{\varepsilon}^*, \sup_{S_{2^{k+4}}} w_{\varepsilon}^* \right).$$

С помощью рассуждений, приведенных в доказательстве леммы 1, легко получить, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{A_j} \int_{D_k \setminus G_k} (\varepsilon_j^2 + |\nabla v_{\varepsilon_j}|^2)^{(p-2)/2} |\nabla v_{\varepsilon_j}|^2 dV = \left(\operatorname{osc}_{D_k \setminus G_k} w_{\varepsilon}^* \right)^{p-1} \operatorname{cap}(G_k, D_k).$$

Переходя к пределу в (47) при $j \rightarrow \infty$, имеем в силу предыдущего соотношения

$$\max \left(\sup_{S_{2^{k+1}}} w^*, \sup_{S_{2^{k+4}}} w^* \right) \geq \frac{\delta}{2} \left(\frac{\int_{d_k} c(x) dV}{\operatorname{cap}(G_k, D_k)} \right)^{1/(p-1)}. \quad (48)$$

Пользуясь неравенством Харнака и (44), находим

$$\sup_{S_{2^{k+1}}} w^* \leq h \inf_{S_{2^{k+1}}} w^* \leq h(m_+(2^{k+5}) - m_+(2^{k+1})) \leq h(m_+(2^{k+5}) - m_+(2^k)).$$

Аналогично,

$$\sup_{S_{2^{k+4}}} w^* \leq h \inf_{S_{2^{k+41}}} w^* \leq h(m_+(2^{k+5}) - m_+(2^{k+4})) \leq h(m_+(2^{k+5}) - m_+(2^k)),$$

что вместе с (48) приводит к оценке

$$(m_+(2^{k+5}) - m_+(2^k)) \geq \frac{\delta}{2h} \left(\frac{\int_{d_k} c(x) dV}{\operatorname{cap}(G_k, D_k)} \right)^{1/(p-1)}. \quad (49)$$

Суммируя (49) по всем k от k_0 до $k_0 + N$, где N – некоторое неотрицательное число, получим

$$\sum_{i=1}^5 m_+(2^{k_0+N+i}) - \sum_{i=0}^4 m_+(2^{k_0+i}) \geq \frac{h\delta}{2} \sum_{k=k_0}^{k_0+N} \left(\frac{\int_{d_k} c(x) dV}{\operatorname{cap}(G_k, D_k)} \right)^{1/(p-1)}.$$

В силу условия теоремы правая часть последнего неравенства стремится к бесконечности при $N \rightarrow \infty$, в то время как левая остается ограниченной. Мы пришли

к противоречию с предположением (42) в том случае, когда $m_+(r)$, начиная с некоторого r_0 , не убывает.

Таким образом, мы показали, что u_+ стремится к нулю при $\text{dist}(O, x) \rightarrow \infty$. Проведя полностью аналогичные рассуждения, мы можем показать, что u_- также стремится к нулю при $\text{dist}(O, x) \rightarrow \infty$.

Значит, и сама функция $u = u_+ + u_-$ стремится к нулю при $\text{dist}(O, x) \rightarrow \infty$, и утверждение теоремы доказано.

Выражаю благодарность проф., д.ф.-м.н. А. А. Конькову за постановку задачи и внимание, оказанное автору в процессе ее решения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1964.

А. Б. Иванов

Центр новых информационных технологий МГУ
им. М. В. Ломоносова

E-mail: Andrei.Ivanov@nicotech.ru

Поступило

18.06.2008