Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Красильщиков, А. В. Шутов, Описание и точные значения максимума и минимума остаточного члена проблемы распределения дробных долей, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 1, 43–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5266>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:56:37

УДК 511.43

Описание и точные значения максимума и минимума остаточного члена проблемы распределения дробных долей

В. В. Красильщиков, А. В. Шутов

В работе получено описание и вычислены точные значения максимума и минимума остаточного члена проблемы распределения дробных долей, независимые от величины интервала ограниченного остатка. Показано, что эти значения могут быть вычислены за $O(m)$ операций. Также дано описание остаточного члена, как функции от аргумента α .

Библиография: 17 названий.

1. Введение. Пусть α является вещественным иррациональным числом. Введем обозначения: $\langle \cdot \rangle$ – дробная часть числа, I – интервал такой, что $I \subset [0; 1]$. Рассмотрим величины

$$N(\alpha, a, n, I) = \#\{i : 0 \leq i < n, \langle i\alpha + a \rangle \in I\}, \quad r(\alpha, a, n, I) = N(\alpha, a, n, I) - n|I|.$$

Величина $r(\alpha, a, n, I)$ называется *остаточным членом* в проблеме равномерного распределения дробных долей $\langle n\alpha \rangle$.

В работе [1] Гекке поставил задачу нахождения интервалов I , для которых остаточный член $r(\alpha, a, n, I)$ принимает наименьшее значение. Им было введено понятие интервала ограниченного остатка, т.е. интервала I , для которого

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |r(\alpha, a, n, I)| < \infty.$$

Сам Гекке на основе полученной им точной формулы для остаточного члена доказал, что при $|I| \in \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ справедливо неравенство

$$|r(\alpha, a, n, I)| < |h(I)|, \tag{1.1}$$

где $h(I)$ – единственное целое число, для которого $|I| - h(I)\alpha \in \mathbb{Z}$. Другое доказательство оценки (1.1) было получено Островским в работе [2] на основе введенной им системы счисления. Особенность оценки (1.1) состоит в том, что $|h(I)| \rightarrow \infty$ при $|I| \rightarrow 0$.

В работе [3] Кестен доказал, что интервал I является интервалом ограниченного остатка тогда и только тогда, когда $|I| \in \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. Впоследствии в работах [4]–[6] были получены и другие доказательства этого результата.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00435).

В дальнейшем этой задачей занимались Лиарде [7], Розы [8], Ференци [9], Берте [10], а также данная проблема исследовалась в работах [1], [11] и [12]. В работе [13] Шутовым были получены точные по порядку оценки остаточного члена $r(\alpha, a, n, I)$ для всех α на интервалах ограниченного остатка.

Пусть функция $N(\alpha, n, I)$ определяет количество точек последовательности $\langle i\alpha \rangle$, попадающих в интервал I :

$$N(\alpha, n, I) = \#\{i : 0 \leq i < n, \langle i\alpha \rangle \in I\}.$$

Остаток $r(\alpha, n, I)$ определяется по формуле

$$r(\alpha, n, I) = N(\alpha, n, I) - n|I|.$$

Введем обозначения максимума и минимума остаточного члена проблемы распределения дробных долей $r(\alpha, n, I)$:

$$r^+(\alpha) = \sup_n r(\alpha, n, I_1), \quad (1.2)$$

$$r^-(\alpha) = \inf_n r(\alpha, n, I_1). \quad (1.3)$$

Для некоторых конкретных интервалов I_1 точные значения $r^+(\alpha)$ и $r^-(\alpha)$ были вычислены в работах [14] и [15].

В теореме 1 настоящей работы получены точные формулы $r^+(\alpha)$ и $r^-(\alpha)$ для интервалов ограниченного остатка вида $I_1 = [\delta; \delta + \langle m\alpha \rangle)$, где δ – некоторое действительное число такое, что $0 \leq \delta + \langle m\alpha \rangle < 1$.

В теореме 2 показано, что значения функций $r^+(\alpha)$ и $r^-(\alpha)$ могут быть вычислены за $O(m)$ операций. Также в настоящей работе дано описание $r(\alpha, n, I)$, как функции от аргумента α .

Пусть $p(f)$ – число точек нелинейности кусочно-линейной функции f . В теореме 3 получены оценки $p(r^+(\alpha))$ и $p(r^-(\alpha))$.

2. Кусочно-линейные функции. Приведем вспомогательные результаты о кусочно-линейных на отрезке $[0; 1]$ функциях. Введем обозначения: PL – класс кусочно-линейных на отрезке $[0; 1]$ функций, L – класс линейных на отрезке $[0; 1]$ функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Точка x_0 называется *точкой нелинейности* кусочно-линейной функции $f(x) \in PL$, определенной на отрезке $[0; 1]$, если либо функция в точке x_0 терпит разрыв 1-го рода, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x),$$

либо производная $f'(x)$ в точке x_0 не является непрерывной.

Обозначим $p(f)$ – число точек нелинейности кусочно-линейной функции $f \in PL$, $I(f)$ – множество точек нелинейности функции $f \in PL$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть функции $f_1, f_2 \in PL$. Тогда $I(f_1 \pm f_2) \subseteq I(f_1) \cup I(f_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если множества точек нелинейности функций f_1 и f_2 не имеют пересечений, то $I(f_1 \pm f_2) = I(f_1) \cup I(f_2)$; если $I(f_1) \cap I(f_2) \neq \emptyset$, то $I(f_1 \pm f_2) \subset I(f_1) \cup I(f_2)$, поскольку некоторые совпавшие точки нелинейности функций f_1, f_2 могут не быть точками нелинейности функций $f_1 \pm f_2$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть функции $f_1, f_2 \in PL$. Тогда функция $f_1 \pm f_2 \in PL$, причем $p(f_1 \pm f_2) \leq p(f_1) + p(f_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вытекает из условия предложения 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть функции $f_1, \dots, f_n \in L$. Тогда выполнено неравенство $p(\max(f_1, \dots, f_n)) \leq n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A(f_1, \dots, f_n)$ есть множество точек вида

$$A(f_1, \dots, f_n) = \{(x, y) : y \geq \max(f_1(x), \dots, f_n(x))\}.$$

Тогда $A(f_1, \dots, f_n)$ – бесконечный многоугольник с числом сторон $p(f_1, \dots, f_n)$. Многоугольник $A(f_1, \dots, f_n)$ является выпуклым, как пересечение конечного числа полуплоскостей. Исходя из определения множества $A(f_1, \dots, f_n)$, верно следующее равенство: $A(f_1, \dots, f_n, f_{n+1}) = A(f_1, \dots, f_n) \cap A(f_{n+1})$. Поскольку $A(f_1, \dots, f_n)$ – выпуклый многоугольник, любая прямая пересекает $A(f_1, \dots, f_n)$ не более, чем в двух точках. Тогда число вершин в многоугольнике $A(f_1, \dots, f_n, f_{n+1})$ не более, чем на одну превышает число вершин в $A(f_1, \dots, f_n)$. Граница многоугольника $A(f_1, \dots, f_n)$ представляет собой функцию $\max(f_1, \dots, f_n)$. Число вершин многоугольника $A(f_1, \dots, f_n)$ меньше или равно $n - 1$ и является количеством точек нелинейности для функции $\max(f_1, \dots, f_n)$, поэтому верно утверждение предложения.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть функции $f_1, f_2 \in L$. Тогда функция $\max(f_1, f_2)$ является кусочно-линейной на отрезке $[0; 1]$ и $p(\max(f_1, f_2)) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получается непосредственным применением предложения 2 к случаю функции $\max(f_1, f_2) \in PL$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть функции $f_1, \dots, f_n \in PL$. Тогда верно неравенство

$$p(\max(f_1, \dots, f_n)) \leq n \sum_{i=1}^n p(f_i) + n - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I = \bigcup_{i=1}^n I(f_i)$, где $I(f_i)$ – множество точек нелинейности функции f_i . Тогда

$$|I| \leq \sum_{i=1}^n |I(f_i)| = \sum_{i=1}^n p(f_i).$$

Пусть множество I имеет вид $I = \{i_k\}_{k=1}^{|I|}$, где $i_0 = 0$, $i_{|I|+1} = 1$. Множество I дает разбиение полуинтервала $[0; 1) = J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_{|I|+1}$, где $J_k = [i_{k-1}; i_k)$ при $k = 1, \dots, |I| + 1$. На каждом из интервалов J_k все функции $f_1, \dots, f_n$ линейны. Поэтому по предложению 2 функция $\max(f_1, \dots, f_n)$ имеет не более, чем $n - 1$ точку нелинейности на интервале J_k . Тогда получаем, что

$$p(\max(f_1, \dots, f_n)) \leq |I| + (|I| + 1)(n - 1) = n|I| + n - 1,$$

где $|I| + 1$ – количество интервалов J_k .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть функции $f_1, \dots, f_n \in L$. Тогда выполнено неравенство $p(\min(f_1, \dots, f_n)) \leq n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства рассмотрим

$$A(f_1, \dots, f_n) = \{(x, y) : y \geq \min(f_1(x), \dots, f_n(x))\}$$

– бесконечный выпуклый многоугольник с числом сторон, равным $p(f_1, \dots, f_n)$. Исходя из определения множества $A(f_1, \dots, f_n)$, верно следующее: $A(f_1, \dots, f_n, f_{n+1}) = A(f_1, \dots, f_n) \cap A(f_{n+1})$. Поскольку $A(f_1, \dots, f_n)$ – выпуклый многоугольник, любая прямая пересекает $A(f_1, \dots, f_n)$ не более, чем в двух точках. Тогда число вершин в многоугольнике $A(f_1, \dots, f_n, f_{n+1})$ не более, чем на одну превышает число вершин в $A(f_1, \dots, f_n)$. Граница многоугольника $A(f_1, \dots, f_n)$ представляет собой функцию $\min(f_1, \dots, f_n)$. Число вершин многоугольника $A(f_1, \dots, f_n)$ меньше или равно $n - 1$ и является количеством точек нелинейности для функции $\min(f_1, \dots, f_n)$, поэтому верно утверждение предложения.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть функции $f_1, f_2 \in L$. Тогда функция $\min(f_1, f_2)$ является кусочно-линейной на отрезке $[0; 1]$ и $p(\min(f_1, f_2)) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получается непосредственным применением предложения 3 к случаю функции $\min(f_1, f_2) \in PL$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть функции $f_1, \dots, f_n \in PL$. Тогда верно неравенство

$$p(\min(f_1, \dots, f_n)) \leq n \sum_{i=1}^n p(f_i) + n - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I = \bigcup_{i=1}^n I(f_i)$. Тогда

$$|I| \leq \sum_{i=1}^n |I(f_i)| = \sum_{i=1}^n p(f_i).$$

Пусть множество I имеет вид $I = \{i_k\}_{k=1}^{|I|}$, где $i_0 = 0$, $i_{|I|+1} = 1$. Множество I дает разбиение полуинтервала $[0; 1) = J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_{|I|+1}$, где $J_k = [i_{k-1}; i_k)$ при $k = 1, \dots, |I| + 1$. На каждом из интервалов J_k все функции $f_1, \dots, f_n$ линейны. Поэтому по предложению 3 функция $\min(f_1, \dots, f_n)$ имеет не более, чем $n - 1$ точку нелинейности на интервале J_k . Тогда получаем, что

$$p(\min(f_1, \dots, f_n)) \leq |I| + (|I| + 1)(n - 1) = n|I| + n - 1,$$

где $|I| + 1$ – количество интервалов J_k .

3. Алгоритм вычисления функции $r(\alpha, n, I_1)$. В работе Гекке [1] доказано следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Значения остатка $r(\alpha, n, I_1)$ вычисляются по формуле

$$r(\alpha, n, I_1) = \langle m\alpha \rangle + \sum_{i=1}^m (\langle (i - n - 1)\alpha + \delta \rangle - \langle i\alpha + \delta \rangle) \quad (3.1)$$

для всех натуральных n .

Поскольку последовательность $\langle n\alpha \rangle$ равномерно распределена по модулю 1 (классический результат Вейля [16]), то

$$r^+(\alpha) = \langle m\alpha \rangle + \sup_x R(\alpha, x), \quad r^-(\alpha) = \langle m\alpha \rangle + \inf_x R(\alpha, x), \quad (3.2)$$

где

$$R(\alpha, x) = C_m(\alpha, x) - C_m(\alpha, -\alpha), \quad (3.3)$$

$$C_m(\alpha, x) = \sum_{i=1}^m \langle (i-1)\alpha + \delta - x \rangle. \quad (3.4)$$

ЛЕММА 1. Функция $\langle (i-1)\alpha + \delta - x \rangle \in PL(x)$ является кусочно-линейной на отрезке $[0; 1]$, точка нелинейности имеет вид $x_i = \langle (i-1)\alpha + \delta \rangle$ и

$$p(\langle (i-1)\alpha + \delta - x \rangle) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точками нелинейности могут быть только точки, в которых значение функции $\langle (i-1)\alpha + \delta - x \rangle$ обращается в нуль. Тогда x найдем из уравнения

$$(i-1)\alpha + \delta - x = C,$$

где $C \in \mathbb{Z}$. Получим, что $x = (i-1)\alpha + \delta + C$. Так как $0 \leq x < 1$, то

$$-(i-1)\alpha - \delta \leq C < 1 - (i-1)\alpha - \delta.$$

Тогда $C = 0$. Точка нелинейности имеет вид $x_i = \langle (i-1)\alpha + \delta \rangle$, так как

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} \langle (i-1)\alpha + \delta - x \rangle = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_i^+} \langle (i-1)\alpha + \delta - x \rangle = 1.$$

СЛЕДСТВИЕ 6. Функция $C_m(\alpha, x)$ является кусочно-линейной на отрезке $[0; 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из определения (3.4) функции $C_m(\alpha, x)$ и условия следствия 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Функция $C_m(\alpha, x)$, как функция от x , имеет $m-1$ точку нелинейности вида $x_i = \langle (i-1)\alpha + \delta \rangle$, где $i = 2, 3, \dots, m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из определения (3.4) функции $C_m(\alpha, x)$, леммы 1 и условия следствия 1.

Определим функции

$$\langle x \rangle^* = \begin{cases} \langle x \rangle, & \text{если } x \notin \mathbb{Z}, \\ 1, & \text{если } x \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad C_m^*(\alpha, x) = \sum_{i=1}^m \langle (i-1)\alpha + \delta - x \rangle^*.$$

Функция $\langle x \rangle$ непрерывна слева, а функция $\langle x \rangle^*$ непрерывна справа в точках $x_0 \in \mathbb{Z}$. Функция $C_m(\alpha, x)$ непрерывна слева, а функция $C_m^*(\alpha, x)$ непрерывна справа в точках $x_i = \langle (i-1)\alpha + \delta \rangle$.

ЛЕММА 2. Справедливы следующие равенства:

$$\max(C_m(\alpha, x), C_m^*(\alpha, x)) = C_m^*(\alpha, x), \quad \min(C_m(\alpha, x), C_m^*(\alpha, x)) = C_m(\alpha, x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим в точках $x_i = \langle (i-1)\alpha + \delta \rangle$ односторонние пределы функции $C_m(\alpha, x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_i -} C_m(\alpha, x) &= \lim_{x \rightarrow x_i -} C_m^*(\alpha, x) = C_m(\alpha, x_i), \\ \lim_{x \rightarrow x_i +} C_m(\alpha, x) &= \lim_{x \rightarrow x_i +} C_m^*(\alpha, x) = C_m^*(\alpha, x_i).\end{aligned}$$

Тогда, учитывая определения функций $C_m^*(\alpha, x)$ и $C_m(\alpha, x)$, получим лемму 2.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы следующие равенства:*

$$r^+(\alpha) = \langle m\alpha \rangle + \max_{j=1, \dots, m} C_m^*(\alpha, \langle (j-1)\alpha + \delta \rangle) - C_m(\alpha, -\alpha), \quad (3.5)$$

$$r^-(\alpha) = \langle m\alpha \rangle + \min_{j=1, \dots, m} C_m(\alpha, \langle (j-1)\alpha + \delta \rangle) - C_m(\alpha, -\alpha). \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем равенство (3.5). Согласно следствию 6 функция $C_m^*(\alpha, x)$ является кусочно-линейной. Следовательно, она достигает своего максимума в точках нелинейности, которые по предложению 5 имеют вид $x_i = \langle (i-1)\alpha + \delta \rangle$, где $i = 2, 3, \dots, m$. Поэтому, учитывая первое равенство леммы 2 и формулу (3.2), получаем (3.5).

Докажем теперь равенство (3.6). По следствию 6 функция $C_m(\alpha, x)$ является кусочно-линейной. Поэтому она достигает своего минимума в точках нелинейности, которые по предложению 5 имеют вид $x_i = \langle (i-1)\alpha + \delta \rangle$, где $i = 2, 3, \dots, m$. Тогда, учитывая второе равенство леммы 2 и формулу (3.2), получаем (3.6).

СЛЕДСТВИЕ 7. *Функции $r^+(\alpha)$, $r^-(\alpha)$ являются кусочно-линейными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается применением следствия 1 к равенствам (3.5), (3.6) и следствию 6.

ТЕОРЕМА 2. *Для функций $r^+(\alpha)$ и $r^-(\alpha)$ существует алгоритм вычисления их значений за $O(m)$ операций.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе Пиннер [17] показано, что $C_m(\alpha, 0)$ и $C_m(\alpha, \delta)$ вычисляются за $O(\log m)$ операций. Рассмотрим функцию $C_m(\alpha, \langle \alpha + \delta \rangle)$. По определению имеем, что

$$\begin{aligned}C_m(\alpha, \langle \alpha + \delta \rangle) &= \sum_{i=1}^m \langle (i-1)\alpha + \delta - \alpha - \delta \rangle = \sum_{i=1}^m \langle (i-2)\alpha \rangle \\ &= \langle -\alpha \rangle + C_m(\alpha, \delta) - \langle (m-1)\alpha \rangle,\end{aligned}$$

где $C_m(\alpha, \delta)$ уже вычислено. Поэтому количество операций, за которое вычисляется функция $C_m(\alpha, \langle \alpha + \delta \rangle)$, меньше или равно некоторой константе C_1 . Рассмотрим функцию $C_m(\alpha, \langle j\alpha + \delta \rangle)$. По определению имеем, что

$$C_m(\alpha, \langle j\alpha + \delta \rangle) = \langle -j\alpha \rangle + C_m(\alpha, \langle (j-1)\alpha + \delta \rangle) - \langle (m-j-1)\alpha \rangle,$$

где $C_m(\alpha, \langle (j-1)\alpha + \delta \rangle)$ уже вычислено. Поэтому количество операций, за которое вычисляется функция $C_m(\alpha, \langle j\alpha + \delta \rangle)$, меньше или равно константе C_1 при любых $j > 1$. Тогда значения функций $r^+(\alpha)$ и $r^-(\alpha)$ вычисляются за число операций, меньшее или равное

$$C_0 \log m + C_1(m-1) \leq C_2 m = O(m).$$

4. Исследование $r(\alpha, n, I_1)$, как функции от α .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для кусочно-линейной на отрезке $[0; 1]$ функции $\langle i\alpha + \delta - \gamma \rangle \in PL(\alpha)$, как функции от аргумента α , при любом $i \in \mathbb{Z}$, $i \neq 0$ выполняется равенство

$$p(\langle i\alpha + \delta - \gamma \rangle) = |i|.$$

Точки нелинейности при $i > 0$ имеют вид

$$\alpha = \frac{\gamma - \delta + k}{i},$$

где $k = 0, 1, \dots, i-1$ при $(\gamma - \delta) \in [0; 1]$ и $k = 1, \dots, i$ при $(\gamma - \delta) \in [-1; 0)$; точки нелинейности при $i < 0$ имеют вид

$$\alpha = \frac{k - \gamma + \delta}{|i|},$$

где $k = 1, \dots, |i|$ при $(\gamma - \delta) \in [0; 1]$ и $k = 0, 1, \dots, |i| - 1$ при $(\gamma - \delta) \in [-1; 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначив $\gamma' = \gamma - \delta$, рассмотрим функцию $\langle i\alpha - \gamma' \rangle \in PL(\alpha)$, как функцию от аргумента α . Рассмотрим случай, когда $i > 0$.

При $i = 1$ найдем α , которые могут быть точками нелинейности из уравнения $\alpha - \gamma' = C$, где $C \in \mathbb{Z}$: $\alpha = \gamma' + C$. Учитывая, что $0 \leq \alpha < 1$, при $\gamma' \in [0; 1]$ получим $C = 0$, при $\gamma' \in [-1; 0)$ получим $C = 1$. Функция $\langle \alpha - \gamma' \rangle$ будет иметь одну точку нелинейности: $\alpha_0 = \gamma'$ при $\gamma' \in [0; 1]$ и $\alpha_0 = \gamma' + 1$ при $\gamma' \in [-1; 0)$.

При $i = 2$ из уравнения $2\alpha - \gamma' = C$, где $C \in \mathbb{Z}$, найдем α , которые могут быть точками нелинейности: $\alpha = (\gamma' + C)/2$. Учитывая, что $0 \leq \alpha < 1$, получим $0 \leq \gamma' + C < 2$. Тогда при $\gamma' \in [0; 1]$ получим, что $C = 0$ и $C = 1$; при $\gamma' \in [-1; 0)$ получим, что $C = 1$ и $C = 2$. Функция $\langle 2\alpha - \gamma' \rangle$ будет иметь две точки нелинейности.

При произвольном $i > 0$ из уравнения $i\alpha - \gamma' = C$, где $C \in \mathbb{Z}$, найдем α , которые могут быть точками нелинейности: $\alpha = (\gamma' + C)/i$. Учитывая, что $0 \leq \alpha < 1$, получим $0 \leq \gamma' + C < i$. Тогда при $\gamma' \in [0; 1]$ получим, что $C = 0, \dots, i-1$; при $\gamma' \in [-1; 0)$ получим, что $C = 1, \dots, i$. Функция $\langle i\alpha - \gamma' \rangle$ будет иметь i точек нелинейности: $\alpha = (\gamma' + k)/i$, где $k = 0, 1, \dots, i-1$ при $\gamma' \in [0; 1]$ и $k = 1, \dots, i$ при $\gamma' \in [-1; 0)$.

Рассмотрим случай, когда $i < 0$.

При $i = -1$ найдем α , которые могут быть точками нелинейности из уравнения $-\alpha - \gamma' = C$, где $C \in \mathbb{Z}$: $\alpha = C - \gamma'$. Учитывая, что $0 \leq \alpha < 1$, при $\gamma' \in [0; 1]$ получим $C = 1$, при $\gamma' \in [-1; 0)$ получим $C = 0$. Функция $\langle -\alpha - \gamma' \rangle$ будет иметь одну точку нелинейности: $\alpha_0 = 1 - \gamma'$ при $\gamma' \in [0; 1]$ и $\alpha_0 = -\gamma'$ при $\gamma' \in [-1; 0)$.

При $i = -2$ из уравнения $-2\alpha - \gamma' = C$, где $C \in \mathbb{Z}$ найдем α , которые могут быть точками нелинейности: $\alpha = (C - \gamma')/2$. Учитывая, что $0 \leq \alpha < 1$, получим $0 \leq C - \gamma' < 2$. Тогда при $\gamma' \in [0; 1]$ получим, что $C = 1$ и $C = 2$; при $\gamma' \in [-1; 0)$ получим, что $C = 0$ и $C = 1$. Функция $\langle -2\alpha - \gamma' \rangle$ будет иметь две точки нелинейности.

При произвольном $i < 0$ из уравнения $i\alpha - \gamma' = C$, где $C \in \mathbb{Z}$, найдем α , которые могут быть точками нелинейности: $\alpha = (C - \gamma')/|i|$. Учитывая, что $0 < \alpha < 1$, получим $0 < C - \gamma' < |i|$. Тогда при $\gamma' \in [0; 1]$ получим, что $C = 1, \dots, |i|$; при $\gamma' \in [-1; 0)$ получим, что $C = 0, \dots, |i| - 1$. Функция $\langle i\alpha - \gamma' \rangle$ будет иметь $|i|$ точек нелинейности: $\alpha = (k - \gamma')/|i|$, где $k = 1, \dots, |i|$ при $\gamma' \in [0; 1]$ и $k = 0, 1, \dots, |i| - 1$ при $\gamma' \in [-1; 0)$.

ЛЕММА 3. *Справедливо следующее равенство:*

$$\bigcup_{j=1}^m I(C_m(\alpha, \langle (j-1)\alpha + \delta \rangle)) = \bigcup_{j=1-m}^{m-1} I(\langle j\alpha \rangle).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 1, учитывая определение (3.4) функции $C_m(\alpha, x)$, получим

$$\bigcup_{j=1}^m I(C_m(\alpha, \langle (j-1)\alpha + \delta \rangle)) = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{i=1}^m I(\langle (i-1)\alpha + \delta - (j-1)\alpha - \delta \rangle).$$

Тогда

$$\bigcup_{j=1}^m I(C_m(\alpha, \langle (j-1)\alpha + \delta \rangle)) = \bigcup_{k=0}^{m-1} \bigcup_{l=0}^{m-1} I(\langle (l-k)\alpha \rangle) = \bigcup_{j=1-m}^{m-1} I(\langle j\alpha \rangle).$$

ТЕОРЕМА 3. *Для кусочно-линейных на отрезке $[0; 1]$ функций $r^+(\alpha)$ и $r^-(\alpha)$ справедливы следующие неравенства:*

$$p(r^+(\alpha)) \leq (m+1) \sum_{j=1}^{m-1} \varphi(j) + m, \quad p(r^-(\alpha)) \leq (m+1) \sum_{j=1}^{m-1} \varphi(j) + m,$$

где $\varphi(x)$ – функция Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3, учитывая предложение 6 и равенство $I(\langle j\alpha \rangle) = I(\langle -j\alpha \rangle)$, получим, что

$$\left| \bigcup_{j=1}^m I(C_m(\alpha, \langle (j-1)\alpha + \delta \rangle)) \right| = \left| \bigcup_{j=1-m}^{m-1} I(\langle j\alpha \rangle) \right| = \left| \bigcup_{j=1}^{m-1} I(\langle j\alpha \rangle) \right|.$$

Откуда следует, что

$$\left| \bigcup_{j=1}^m I(C_m(\alpha, \langle (j-1)\alpha + \delta \rangle)) \right| = \sum_{j=1}^{m-1} \varphi(j). \quad (4.1)$$

По следствию 3 получим, что количество точек нелинейности функции

$$\max_{j=1, \dots, m} C_m^*(\alpha, \langle (j-1)\alpha + \delta \rangle)$$

удовлетворяет следующему неравенству:

$$p\left(\max_{j=1, \dots, m} C_m^*(\alpha, \langle (j-1)\alpha + \delta \rangle)\right) \leq m \sum_{j=1}^{m-1} \varphi(j) + m - 1.$$

Учитывая, что вычитание $C_m(\alpha, -\alpha) - \langle m\alpha \rangle$ добавляет не более, чем $\sum_{j=1}^{m-1} \varphi(j) + 1$ новых точек нелинейности, получим первое неравенство теоремы.

По следствию 5 получим, что количество точек нелинейности функции

$$\min_{j=1, \dots, m} C_m(\alpha, \langle (j-1)\alpha + \delta \rangle)$$

удовлетворяет следующему неравенству:

$$p\left(\min_{j=1,\dots,m} C_m(\alpha, \langle (j-1)\alpha + \delta \rangle)\right) \leq m \sum_{j=1}^{m-1} \varphi(j) + m - 1.$$

Учитывая, что вычитание $C_m(\alpha, -\alpha) - \langle m\alpha \rangle$ добавляет не более, чем $\sum_{j=1}^{m-1} \varphi(j) + 1$ новых точек нелинейности, получим второе неравенство теоремы.

По результату компьютерного эксперимента можно сформулировать гипотезу.

ГИПОТЕЗА. Для кусочно-линейных на отрезке $[0; 1]$ функций $r^+(\alpha)$ и $r^-(\alpha)$ точками нелинейности являются i/j , где $i < j < m$.

Авторы выражают благодарность профессору В. Г. Журавлеву за постановку задачи, постоянное внимание к работе и многочисленные ценные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Hecke, “Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins”, *Hamb. Abh.*, **1** (1921), 54–76.
- [2] A. Ostrowski, “Notiz zur Theorie der Diophantischen Approximationen und zur Theorie der linearen Diophantischen Approximationen”, *Math. Miszellen XVI. Jahresber. Deutschen Math. Ver.*, **39** (1939), 34–46.
- [3] H. Kesten, “On a conjecture of Erdős and Szüsz related to uniform distribution mod 1”, *Acta Arithmetica*, **12** (1966), 193–212.
- [4] H. Furstenberg, H. Keynes, L. Shapiro, “Prime flows in topological dynamics”, *Israel J. Math.*, **14**:1 (1973), 26–38.
- [5] I. Oren, “Admissible functions with multiple discontinuities”, *Israel J. Math.*, **42**:4 (1982), 353–360.
- [6] K. Petersen, “On a series of cosecants related to a problem in ergodic theory”, *Compositio Math.*, **26** (1973), 313–317.
- [7] P. Liardet, “Regularities of distribution”, *Compositio Math.*, **61**:3 (1987), 267–293.
- [8] G. Rauzy, “Ensembles à restes bornés”, *Seminaire de theorie des nombres de Bordeaux 1983/1984*, Exp. No. 24, Univ. Bordeaux I, Talence, 1984.
- [9] S. Ferenczi, “Bounded remainder sets”, *Acta Arithmetica*, **61**:4 (1992), 319–326.
- [10] V. Berthé, R. Tijdeman, “Balance properties of multi-dimensional words”, *Theoret. Comput. Sci.*, **273**:1-2 (2002), 197–224.
- [11] А. В. Шутов, “О распределении дробных долей”, *Чебышевский сб.*, **5**:3 (2004), 112–121.
- [12] А. В. Шутов, “О распределении дробных долей. II”, *Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: межвузовский сборник научных трудов*. т. 3, Изд-во Саратовск. ун-та, Саратов, 2005, 146–158.
- [13] А. В. Шутов, “Оптимальные оценки в проблеме распределения дробных долей $n\alpha$ на множествах ограниченного остатка”, *Вестник Самарск. гос. ун-та. Естественнонаучн. сер.*, 2007, № 7, 168–175.
- [14] В. В. Красильщиков, А. В. Шутов, “Вложение решеток в квазипериодические решетки”, *Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: межвузовский сборник научных трудов*. т. 4, Изд-во Саратовск. ун-та, Саратов, 2007, 45–55.
- [15] В. В. Красильщиков, А. В. Шутов, В. Г. Журавлев, “Одномерные квазипериодические разбиения, допускающие вложение прогрессий”, *Изв. вузов. Матем.*, 2009, № 7, 3–9.

- [16] Г. Вейль, “О равномерном распределении чисел по модулю 1”, *Избранные труды. Математика. Теоретическая физика*, Классики науки, Наука, М., 1984, 58–93.
- [17] С. Pinner, “On sums of fractional parts $\{n\alpha + \gamma\}$ ”, *J. Number Theory*, **65**:1 (1997), 48–73.

В. В. Красильщиков

Владимирский государственный гуманитарный университет,

г. Владимир

E-mail: krasilshchikovvv@mail.ru

Поступило

08.07.2008

Исправленный вариант

18.03.2010

А. В. Шутов

Владимирский государственный гуманитарный университет,

г. Владимир

E-mail: shutov@vladgggu.ru