Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Новые распределения в классической физике, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 2, 312–317

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5267>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 17:27:00

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Новые распределения в классической физике

В. П. Маслов

Мы будем рассматривать достаточно общую классическую функцию Гамильтона $H(p, q)$ и сделаем относительно нее три предположения.

Пусть $H(p, q)$, где $q \in \mathbb{R}^3$, $p \in \mathbb{R}^3$, достаточно гладкая функция такая, что

- 1) $H(p, q) \rightarrow \infty$ при $|p| + |q| \rightarrow \infty$ не медленнее, чем $(|p| + |q|)^\alpha$ при некотором $\alpha > 0$;
- 2) $\int_0^A dp dy / H(p, q)$ сходится для любого фиксированного A , $p_i \leq A$, $q_i \leq A$; $i = 1, 2, 3$;
- 3) рассмотрим функцию

$$V(\Lambda) = \int_{H(p, q) \leq \Lambda} dp dq$$

и предположим, что $V'(\Lambda)$ – достаточно гладкая функция.

Пусть E_0 – некоторое исходное значение энергии такое, что оно много меньше средней энергии молекул газа.

Пусть имеется N не взаимодействующих между собой частиц, каждая из которых имеет гамильтониан $H(p, q)$, и пусть энергия N частиц ограничена константой $\mathcal{E}_N \gg E_0$, т.е. $\mathcal{E}_N / E_0 \rightarrow \infty$. Определим величину b из соотношения

$$\int H(p, q)(e^{bH(p, q)} - 1)^{-1} dp dq = \mathcal{E}_N, \quad b \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mathcal{E}_N \rightarrow \infty.$$

Обозначим через $\mathbf{N} = 1/(mE_0)^{3/2} \int (e^{bH(p, q)} - 1)^{-1} dp dq$ число, которое мы будем называть числом частиц, “насыщающих” объем Ω , и предположим, что число частиц $N \leq \mathbf{N}$.

Подобно тому, как это было сделано в работе [1], разобьем фазовое пространство p, q на конечное число областей

$$E_l \leq H(p, q) \leq E_{l+1}, \quad l = 0, \dots, s-1, \quad E_0 > 0, \quad E_s = E; \quad p \in \mathbb{R}^3. \quad (1)$$

Далее, аналогично той же работе, произведем неупорядоченную выборку с возвращением N_l из N частиц в “ящик” $E_l \leq H(p, q) \leq E_{l+1}$ при условии

$$\sum_{i=1}^N H(p, q) \leq E = \frac{\mathcal{E}_N}{N}. \quad (2)$$

Обозначим через ρ_{E_l} – плотность числа частиц в интервале большем или равном E_l , а именно $\rho_{E_l} = \sum_{j=l}^{\infty} N_j / N$.

Приведем теорему, аналогичную теореме, сформулированной в работе [1]. Так же как в упомянутой работе, P означает меру фазового объема, определенного в скобках (3), относительно всего объема (2).

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место соотношение*

$$P\left(\left|\rho_{E_l} - \int_{H(p,q) \geq c/b} (e^{bH(p,q)} - 1)^{-1} dp dq \right| / \int (e^{bH(p,q)} - 1)^{-1} dp dq \right) \geq N^{-1/2+\varepsilon} = O(N^{-k}), \quad (3)$$

где k – любое целое, $c > \varepsilon$, ε – сколь угодно малое, не зависящее от b , число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема следует из общей теоремы о бозе-распределении [2]. Уточнение оценок приводится в [3], [4]. Выберем такое разбиение, что $E_{l+1} - E_l = E_0$ и $(E_{l+1} - E_l)/E > N^{-1/4}$. Тогда

$$E_l = E_0(l+1). \quad (4)$$

Пусть N_l – неупорядоченная выборка с возвращением в ячейку $E_{l+1} - E_l$. Неупорядоченная выборка с возвращением из N шаров по ячейкам (“энергетическим ящикам”)

$$\int_{E_l}^{E_{l+1}} H(p, q) dp dq = \int_{E_0 l}^{E_0(l+1)} \lambda V'(\lambda) d\lambda$$

приводит к соотношению

$$\sum_l N_l E_l q_l \leq \mathcal{E}_N, \quad q_l \cong C[V'(E_0 l)], \quad (5)$$

C – константа.

Это значит, что для “кратностей вида $[V'(E_0 l)]$ ” для “чисел заполнения” N_l выполняется теорема 1 работы [4].

А именно: положим $\Delta N = N^{1/2+\varepsilon}$, где ε – достаточно малое положительное число. Существуют такие постоянные C_k , $k = 1, 2, \dots$, что для любого $l \in \mathbb{Z}_+$ справедлива оценка

$$P\left(\left|\sum_{l=1}^s (N_l - \bar{N}_l)\right| > \Delta N\right) \leq C_k N^{-k}, \quad (6)$$

где $\bar{N}_l = q_l/(e^{bl} - 1)$, $l = 1, 2, \dots$, (q_l в нашем случае равно $q_l = [V'(E_0 l)]$).

Поскольку по определению $\rho_{E_l} = \sum_{j=1}^l N_j/N$, то отсюда следует, что после применения формул Эйлера–Маклорена к ряду $\sum_{l=l_0}^s \bar{N}_j = \sum_{l=l_0}^s q_l/(e^{bl} - 1)$, мы можем перейти от ряда к интегралу, после чего поделив (5) на N , получим утверждение теоремы аналогично [1].

Вычислим константы b и c как функции от $\mathcal{E}_N$ и N исходя из следующих соотношений

$$\int H(p, q) (ce^{bH(p,q)} - 1)^{-1} dp dq = \mathcal{E}_N, \quad (7)$$

$$\int (ce^{bH(p,q)} - 1)^{-1} dp dq = N. \quad (8)$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место соотношение*

$$P\left(\left|\rho_{E_l} - \int_{H(p,q) \geq E_l} (ce^{bH(p,q)} - 1)^{-1} dp dq \right| / \int (ce^{bH(p,q)} - 1)^{-1} dp dq \right) \geq \sqrt{\frac{\ln N}{N}} \psi(N) = O(N^{-k}), \quad (9)$$

где k – любое целое, $E_l = \varepsilon/b$, $\varepsilon > 0$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Для классического идеального газа, т.е. в случае $\mathbf{N}/N \gg 1$, выполняется соотношение

$$\frac{P}{n\theta} = 1, \quad (10)$$

где P – давление газа, $n = N/V$ – концентрация, θ – температура в энергетических единицах, $\theta = kT$, где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура (в Кельвинах). Это уравнение состояния идеального классического газа.

Для $\mathbf{N}/N = 1$ получаем

$$\frac{P}{n\theta} = \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)} \approx \frac{1.341}{2.612} \approx 0.523,$$

где ζ – функция Римана.

Аналогично теоремам 1 и 2 доказывается нижеследующая теорема.

Пусть функция Гамильтона $H(p, q) = p^2/2m + V(q)$, где $p, q \in \mathbb{R}^3$, $V(q) \leq |q|^6$ при $q \rightarrow \infty$. И пусть при заданных $\mathcal{E}_N$ и N константы $b > 0$ и $c \geq 1$ вычисляются из условий

$$\int \frac{p^2}{2m} (ce^{b(p^2/2m+V(q))} - 1)^{-1} dp dq = \mathcal{E}_N, \quad (11)$$

$$\int (ce^{b(p^2/2m+V(q))} - 1)^{-1} dp dq = N. \quad (12)$$

$$\int (e^{b(p^2/2m+V(q))} - 1)^{-1} dp dq = \mathbf{N}. \quad (13)$$

ТЕОРЕМА 3. *Имеет место соотношение*

$$\mathbf{P} \left(\left| \rho_{E_l} - \int_{p^2/2m+V(q) \geq E_l} (ce^{b(p^2/2m+V(q))} - 1)^{-1} dp dq \right| \int (ce^{b(p^2/2m+V(q))} - 1)^{-1} dp dq \right) \geq \frac{\ln N}{\sqrt{N}} \psi(N) = O(N^{-k}), \quad (14)$$

где k – любое целое, $N \leq \mathbf{N}$.

При $N > \mathbf{N}$ вместо N в неравенстве и оценке (14) нужно поставить $\mathbf{N}$. Разность $N - \mathbf{N}$ кластеризуются, а $c = 1$.

Далее предположим, что задано ограничение на гамильтониан $H(p, q)$, которое мы будем называть жестким.

Предположим, например, что частицы находятся в сосуде с объемом Ω и стенками $\delta\Omega$. Тогда жесткое ограничение на координаты q будет заключаться в том, что вне объема Ω вероятность нахождения частицы равна нулю.

В общем случае пусть задана функция $\phi(p, q)$, задающая жесткое ограничение

$$\phi(p, q) \geq 0,$$

т.е. при $\phi < 0$ вероятность нахождения частиц равна нулю.

Тогда положив Θ как функцию от $\phi(p, q)$, рассмотрим произведение

$$H_1(p, q) = H(p, q)\Theta(\phi(p, q)) \quad (15)$$

и сформулируем теоремы (аналогичные изложенным выше) для этого случая.

Логика рассуждений совершенно аналогична вышеизложенному.

Пусть $H_1(p, q)$, где $p, q \in \mathbb{R}^3$, достаточно гладкая функция такая, что

1) $H_1(p, q) \rightarrow \infty$ при $|p| + |q| \rightarrow \infty$ не медленнее, чем $(|p| + |q|)^\alpha$ при некотором $\alpha > 0$;

2) $\int_0^A dp dy / H_1(p, q)$ сходится для любого фиксированного A , $p_i \leq A$, $q_i \leq A$; $i = 1, 2, 3$.

3) Если положить

$$V(\Lambda) = \int_{H_1(p, q) \leq \Lambda} dp dq,$$

то $V'(\Lambda)$ – достаточно гладкая функция.

Аналогично положим, что E_0 – энергия, связанная со средней поступательной скоростью молекул в жидкости, находящейся в равновесном состоянии газ–жидкость. Эта скорость много меньше средней скорости молекул газа.

Пусть N – число частиц с гамильтонианом $H_1(p, q)$ и пусть энергия N частиц ограничена константой $\mathcal{E}_N \gg E_0$, т.е. $\mathcal{E}_N / E_0 \rightarrow \infty$. Найдем величину b из соотношения

$$\int H_1(p, q) (e^{bH_1(p, q)} - 1)^{-1} dp dq = \mathcal{E}_N, \quad b \rightarrow 0 \text{ при } \mathcal{E}_N \rightarrow \infty.$$

Определим через $\mathbf{N} = 1/(mE_0)^{3/2} \int \Theta(\phi(p, q)) (e^{bH_1(p, q)} - 1)^{-1} dp dq$ число частиц, “насыщающих” объем Ω , а $N \leq \mathbf{N}$.

Разобьем пространство p, q на конечное число областей

$$E_l \leq H_1(p, q) \leq E_{l+1}, \quad l = 0, \dots, s-1, \quad E_0 > 0, \quad E_s = E; \quad p \in \mathbb{R}^3. \quad (16)$$

Произведем неупорядоченную выборку с возвращением N_l из N частиц (шаров) в “ящик” $E_l \leq H_1(p, q) \leq E_{l+1}$ при условии

$$\sum_{i=1}^N H_1(p, q) \leq E = \frac{\mathcal{E}_N}{N}. \quad (17)$$

Пусть ρ_{E_l} – плотность числа частиц в интервале большем или равном E_l : $\rho_{E_l} = \sum_{j=l}^{\infty} N_j / \mathbf{N}$.

В нижеприводимой теореме, как и в теореме 1, P есть лебегова мера фазового объема, определенного в скобках (18), относительно всего объема (17).

ТЕОРЕМА 4. *Имеет место соотношение*

$$P \left(\left| \rho_{E_l} - \int_{H_1(p, q) \geq c/b} \Theta(\phi(p, q)) (e^{bH_1(p, q)} - 1)^{-1} dp dq \right| \right. \\ \left. \int \Theta(\phi(p, q)) (e^{bH_1(p, q)} - 1)^{-1} dp dq \right| \geq N^{-1/2+\varepsilon} \Big) = O(\mathbf{N}^{-k}), \quad (18)$$

где k – любое целое, $c > \varepsilon$, ε – сколь угодно малое, не зависящее от b число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в случае теоремы 1, теорема 4 следует из общей теоремы о бозе-распределении [2]. Выберем такое разбиение, что $E_{l+1} - E_l = E_0$ и $(E_{l+1} - E_l)/E > \mathbf{N}^{-1/4}$. Тогда

$$E_l = E_0(l + 1). \quad (19)$$

Пусть N_l – неупорядоченная выборка с возвращением в ячейку $E_{l+1} - E_l$. Иными словами, неупорядоченная выборка с возвращением из N шаров по ячейкам (“энергетическим ящикам”)

$$\int_{E_l}^{E_{l+1}} H_1(p, q) dp dq = \int_{E_0 l}^{E_0(l+1)} \lambda V'(\lambda) d\lambda$$

приводит к соотношению

$$\sum_l N_l E_l q_l \leq \mathcal{E}_N, \quad q_l \cong C[V'(E_0 l)], \quad (20)$$

C – константа.

Это значит, что для “кратностей вида $[V'(E_0 l)]$ ” для “чисел заполнения” N_l выполняется теорема 1 работы [4].

Положим $\Delta N = \mathbf{N}^{1/2+\varepsilon}$, где ε – достаточно малое положительное число. Существуют такие постоянные C_k , $k = 1, 2, \dots$, что для любого $l \in \mathbb{Z}_+$ справедлива оценка

$$P\left(\left|\sum_{l=1}^s (N_l - \bar{N}_l)\right| > \Delta N\right) \leq C_k \mathbf{N}^{-k}, \quad (21)$$

где $\bar{N}_l = q_l/(e^{bl} - 1)$, $l = 1, 2, \dots$ (q_l в нашем случае равно $q_l = [V'(E_0 l)]$).

Так как $\rho_{E_l} = \sum_{j=1}^l N_j/\mathbf{N}$, то отсюда следует, что после применения формул Эйлера–Маклорена к ряду $\sum_{l=l_0}^s \bar{N}_j = \sum_{l=l_0}^s q_l/(e^{bl} - 1)$, и поделив (20) на $\mathbf{N}$, получим утверждение теоремы.

Пусть при заданных $\mathcal{E}_N$ и N константы b и c вычисляются из условий

$$\int H_1(p, q)(ce^{bH_1(p, q)} - 1)^{-1} dp dq = \mathcal{E}_N, \quad (22)$$

$$\int \Theta(\phi(p, q))(ce^{bH_1(p, q)} - 1)^{-1} dp dq = N. \quad (23)$$

Справедлива теорема

ТЕОРЕМА 5. *Имеет место соотношение*

$$P\left(\left|\rho_{E_l} - \int_{H_1(p, q) \geq E_l} \Theta(\phi(p, q))(ce^{bH_1(p, q)} - 1)^{-1} dp dq \right| \int \Theta(\phi(p, q))(ce^{bH_1(p, q)} - 1)^{-1} dp dq \right) \geq \sqrt{\frac{\ln N}{N}} \psi(N) = O(N^{-k}), \quad (24)$$

где k – любое целое, $E_l = \varepsilon/b$, $\varepsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 4.

Отсюда при $N/\mathbf{N} \rightarrow 0$, $c \rightarrow \infty$, что приводит к существенной поправке за счет жесткого ограничения к распределению Гиббса.

Рассмотрим задачу рассеяния двух частиц с координатами x_1 , p_1 и x_2 , p_2 массы m с потенциалом взаимодействия $U(x_1 - x_2)$.

Фиксируем четыре константы

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}, \quad x_1, \quad p_1, \quad p_2,$$

а также прицельный параметр ρ и точку r_0 , которые являются функциями от θ и $p_1 - p_2$. Распределение величины x_2 представляется в виде

$$F(x_1, \theta_1, p_1, x_2, p_2) = \Theta(r - r_0) \left[\left\{ \frac{1}{m} (p_1 - p_2)^2 - \frac{1}{m} \frac{(p_1 - p_2)^2 \rho^2}{(x_2 - x_1)^2} - U(x_2 - x_1) \right\}^{-1/2} - \sqrt{\frac{1}{m}} \frac{1}{|p_1 - p_2|} \right] / \int_{r_0}^{\infty} \left[\left\{ \frac{1}{m} (p_1 - p_2)^2 - \frac{1}{m} \frac{(p_1 - p_2)^2 \rho^2}{r^2} - U(r) \right\}^{-1/2} - \left(\frac{1}{m} (p_1 - p_2)^2 \right)^{-1/2} \right] dr \quad (25)$$

и прибавим к нему

$$\chi = \frac{\sqrt{m}}{|p_1 - p_2|} \cdot \Theta(r - r_0) R / \int_{r_0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{m} (p_1 - p_2)^2 - \frac{1}{m} \frac{(p_1 - p_2)^2 \rho^2}{r^2} - U(r) \right]^{-1/2} - \left(\frac{1}{m} (p_1 - p_2)^2 \right)^{-1/2} \right\} dr. \quad (26)$$

Член $\Theta(r - r_0)$, умноженный на распределение типа Бозе–Эйнштейна R , дает жесткое ограничение. Как и ранее [1], мы полагаем, что искомый потенциал не зависит от x , а значит, распределение типа Бозе–Эйнштейна R не зависит от x . Поэтому интеграл от FR (проинтегрированный вначале по x_2 , а затем по p_2) равен единице. Значит, первый член дает распределение, независящее от распределения частицы x_2 типа Бозе–Эйнштейна R , и поэтому общее распределение частицы x_2 есть произведение этих двух распределений. В результате общее распределение F_2 частицы x_2 при фиксированных θ , x_1 , p_1 , p_2 есть сумма произведения $F(x_1, x_2, \theta_1, p_1, p_2)$ на распределение типа Бозе–Эйнштейна $R(p_2)$ и распределения R с жестким ограничением $\Theta(r - r_0)$. В итоге мы приходим к интегральному уравнению для потенциала $u(p)$

$$u(p, \theta) = \int U(x - x_2) F_2(\theta, x_2 - x, p, p_2) dx_2 dp_2.$$

Но мы должны учесть еще жесткое ограничение, которое связано с тем, что объем, хотя и большой, но конечный. Поэтому прицельный параметр не может изменяться до бесконечности. Он ограничен для двух частиц величиной объема. В случае N частиц он ограничен удельным объемом. Поэтому мы введем жесткое ограничение по ρ вида $\Theta(\rho - V_{уд}^{-1/3})$.

Окончательно

$$\begin{aligned} u(p, \theta) = 2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi & \frac{\int_{r_0}^\infty U(r) \left\{ \frac{(p-p')^2}{m} - \frac{1}{m} \frac{(p-p')^2 \rho^2}{r^2} - U(r) \right\}^{-1/2} dr}{\int_{r_0}^\infty \left[\left\{ \frac{(p-p')^2}{m} - \frac{1}{m} \frac{(p-p')^2 \rho^2}{r^2} - U(r) \right\}^{-1/2} - \frac{\sqrt{m}}{|p-p'|} \right] dr} \\ & \times \frac{\Theta(\rho - V_{уд}^{-1/3})}{e^{bp'^2/m+u(p',\theta')}-1} |p'|^2 \sin \theta' d|p'| d\theta' \\ & \times \left\{ \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{1}{e^{bp^2/m+u(p,\theta)}-1} p^2 \sin \theta dp d\theta \right\}^{-1}, \end{aligned}$$

где ρ и r_0 выражаются через θ и $p - p'$ из следующих соотношений:

$$\theta = \left| \pi - 2 \int_{r_0}^\infty \left[1 - \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 - \frac{U(r)}{E} \right]^{-1/2} \rho r^{-2} dr \right|, \quad (27)$$

$$1 - \frac{\rho^2}{r_0} - \frac{U(r_0)}{E} = 0, \quad E = \frac{(p_1 - p_2)^2}{m}. \quad (28)$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Маслов, *Матем. заметки*, **83**:5 (2008), 787–791. [2] V. P. Maslov, *Russ. J. Math. Phys.*, **14**:1 (2007), 66–95. [3] В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, *Матем. заметки*, **83**:2 (2008), 232–263. [4] В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, *Матем. заметки*, **83**:3 (2008), 381–401.

В. П. Маслов

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Поступило

08.07.2008