Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Гурдал, Связи между алгебрами Дедденса и расширенными собственными векторами, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 1, 40–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5268>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 14:01:41

Связи между алгебрами Дедденса и расширенными собственными векторами

М. Гурдал

Комплексное число λ называется расширенным собственным числом оператора сдвига S , $Sf = zf$ на диск-алгебре $C_A(\mathbb{D})$, если существует ненулевой оператор $A: C_A(\mathbb{D}) \rightarrow C_A(\mathbb{D})$ такой, что $AS = \lambda SA$. Множество всех расширенных собственных векторов оператора S описано в терминах операторов умножения и композиции. Показано, что имеется связь между алгеброй Дедденса, соответствующей оператору S , и расширенными собственными векторами оператора S .

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Пусть $\mathcal{B}(X)$ – банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в банаховом пространстве X . Комплексное число λ является *расширенным собственным числом* оператора A , если существует ненулевой оператор B такой, что $AB = \lambda BA$. Тогда оператор B называется *расширенным собственным вектором* оператора A (более подробное определение дано в работе Бисваса, Ламберта и Петковича [1]).

Напомним, что для любого обратимого оператора $C \in \mathcal{B}(X)$ соответствующая алгебра Дедденса $\mathcal{B}_C$ была введена в работе Караева и Мустафаева [2] следующим образом (см. также работу Ламберта и Петковича [3]):

$$\mathcal{B}_C := \left\{ B \in \mathcal{B}(X) : \sup_{n \geq 0} \|CBC^{-n}\| < +\infty \right\}.$$

Легко видеть, что $\mathcal{B}_C$ на самом деле является алгеброй и коммутант $\{C\}'$ оператора C содержится в $\mathcal{B}_C$, т.е. $\{C\}' \subseteq \mathcal{B}_C$. Поэтому возникает следующий естественный вопрос (см. работу Петковича [4]): при каких условиях $\mathcal{B}_C$ собственно содержит коммутант $\{C\}'$?

Чтобы эффективно продемонстрировать, что $\{C\}' \neq \mathcal{B}_C$, нужно показать, что оператор C имеет расширенные собственные числа (см. работу Петковича [4]). Действительно, если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, где $|\lambda| \leq 1$ и $CB = \lambda BC$ при некотором $B \neq 0$, то при всех $n \geq 0$

$$\|C^n BC^{-n}\| = \|(\lambda^n BC^n)C^{-n}\| = |\lambda^n| \|B\| = |\lambda|^n \|B\| \leq \|B\|,$$

Работа выполнена при поддержке Совета по научным и техническим исследованиям Турции (TÜBİTAK) (проект 107T649).

т.е. $B \in \mathcal{B}_C$. С другой стороны, легко показать, что не все такие расширенные собственные векторы оператора B коммутируют с C .

В данной работе показано, что оператор сдвига S на диск-алгебре $C_A(\mathbb{D})$ имеет нетривиальные (т.е. $\lambda \neq 1$) расширенные собственные числа и, следовательно,

$$\mathcal{B}_{\mu I+S} \neq \{S\}'$$

(см. теорему 2.4 ниже).

2. Расширенные собственные числа и расширенные собственные векторы оператора S и алгебра Дедденса $\mathcal{B}_{\mu I+S}$. Сначала опишем множество расширенных собственных векторов оператора сдвига S на диск-алгебре $C_A(\mathbb{D})$.

Заметим, что если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)z^n \in C_A(\mathbb{D})$, то

$$Sf(z) = zf(z), \quad f \in C_A(\mathbb{D}).$$

Отсюда следует, что если $Sf(z) = 0$, то $f = 0$ и, значит, $\ker S = \{0\}$. Таким образом, $\lambda = 0$ не является расширенным собственным числом оператора S .

ЛЕММА 2.1. Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и пусть $A \in \mathcal{B}(C_A(\mathbb{D}))$ – ненулевой оператор.

(а) Если $|\lambda| \leq 1$, то $SA = \lambda AS$ тогда и только тогда, когда оператор A имеет вид $AC_\lambda = M_{A1}$, где M_{A1} – оператор умножения в $C_A(\mathbb{D})$ и $(C_\lambda f)(z) = f(\lambda z)$ – оператор композиции в $C_A(\mathbb{D})$.

(б) Если $|\lambda| > 1$, то $SA = \lambda AS$ тогда и только тогда, когда $A = M_{A1}C_{1/\lambda}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть $SA = \lambda AS$. Тогда

$$S^n A = \lambda^n AS^n$$

для каждого $n \geq 0$, т.е.

$$S^n Af = \lambda^n AS^n f$$

при всех $f \in C_A(\mathbb{D})$, в частности,

$$S^n A1 = \lambda^n AS^n 1$$

для каждого $n \geq 0$. Таким образом,

$$S^n A1 = A(\lambda^n z^n) \quad \text{для всех } n \geq 0,$$

откуда следует, что

$$Ap(\lambda z) = A1 \cdot p(z)$$

для всех многочленов $p \in \mathcal{P}$. Так как множество $\mathcal{P}$ плотно в $C_A(\mathbb{D})$ и $(C_A(\mathbb{D}), \cdot)$ – банахова алгебра, из последнего равенства следует, что

$$Af(\lambda z) = A1 \cdot f(z)$$

при всех $f \in C_A(\mathbb{D})$. Следовательно, $AC_\lambda f = M_{A1}f$ при всех $f \in C_A(\mathbb{D})$, и таким образом, $AC_\lambda = M_{A1}$.

Обратно, если $AC_\lambda = M_{A1}$, то для каждого многочлена $p \in \mathcal{P}$ имеем

$$\begin{aligned} SAP(z) &= SAC_\lambda p\left(\frac{z}{\lambda}\right) = SM_{A1}p\left(\frac{z}{\lambda}\right) = M_{A1}Sp\left(\frac{z}{\lambda}\right) = AC_\lambda Sp\left(\frac{z}{\lambda}\right) \\ &= AC_\lambda\left(z \cdot p\left(\frac{z}{\lambda}\right)\right) = A\left(\lambda z \cdot p\left(\lambda \frac{z}{\lambda}\right)\right) = \lambda A(zp(z)) = \lambda ASp(z), \end{aligned}$$

и таким образом,

$$SAP(z) = \lambda ASp(z)$$

для всех многочленов p и, следовательно,

$$SAf = \lambda ASf$$

при всех $f \in C_A(\mathbb{D})$. Отсюда получим

$$SA = \lambda AS,$$

что доказывает утверждение (а).

(b) Предположим, что $\lambda AS = SA$. Тогда

$$\frac{1}{\lambda} SA = AS$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\lambda^n} S^n A = AS^n \quad (1)$$

при всех $n \geq 0$. Из (1) получим

$$\frac{1}{\lambda^n} z^n A1 = Az^n \quad \text{для всех } n \geq 0,$$

откуда следует, что

$$Ap(z) = A1p\left(\frac{z}{\lambda}\right) = A1C_{1/\lambda}p(z),$$

для всех многочленов $p \in \mathcal{P}$. Таким образом,

$$Af = A1C_{1/\lambda}f,$$

при всех $f \in C_A(\mathbb{D})$, что дает

$$A = M_{A1}C_{1/\lambda},$$

как и требовалось доказать.

С другой стороны, покажем, что оператор A вида $A = M_{A1}C_{1/\lambda}$ удовлетворяет уравнению

$$\lambda AS = SA.$$

Действительно, для любого $f \in C_A(\mathbb{D})$ имеем

$$\begin{aligned} (ASf)(z) &= (M_{A1}C_{1/\lambda}Sf)(z) = M_{A1}C_{1/\lambda}(zf(z)) = M_{A1}\frac{z}{\lambda}f\left(\frac{z}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}A1 \cdot \left(zf\left(\frac{z}{\lambda}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}(zA1) \cdot f\left(\frac{z}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}SM_{A1}C_{1/\lambda}f(z) = \frac{1}{\lambda}SAf(z), \end{aligned}$$

что завершает доказательство утверждения (b). Лемма 2.1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Имеем $\{S\}' = \{M_g : g \in C_A(\mathbb{D})\}$, т.е. коммутант оператора сдвига $S \in \mathcal{B}(C_A(\mathbb{D}))$ является множеством всех операторов умножения на $C_A(\mathbb{D})$.

Так как произведение “ $\cdot$ ” коммутативно, из следствия 2.2 получим, что

$$\{S\}'' = \{S\}',$$

где $\{S\}''$ – бикоммутант оператора S .

Напомним, что оператор композиции C_θ , действующий в диск-алгебре $C_A(\mathbb{D})$, определен как

$$(C_\theta g)(z) = (g \circ \theta)(z) = g(\theta(z)),$$

где $\theta: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ – некоторая подходящая аналитическая функция. В следующем утверждении дадим ответ на вопрос о том, может ли оператор композиции быть расширенным собственным вектором оператора S . (Очевидно, что $C_\lambda = C_{\lambda z}$ и $C_{1/\lambda} = C_{z/\lambda}$.)

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть $|\lambda| \geq 1$. Оператор композиции C_θ является решением уравнения

$$SA = \lambda AS$$

тогда и только тогда, когда $\theta(z) = z/\lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $C_\theta 1 = 1$. В силу утверждения (b) леммы 2.1 имеем

$$SC_\theta = \lambda C_\theta S$$

тогда и только тогда, когда

$$C_\theta g(z) = g\left(\frac{z}{\lambda}\right) = C_{1/\lambda}g(z)$$

при всех $g \in C_A(\mathbb{D})$, откуда следует, что $C_\theta = C_{1/\lambda}$, т.е. $\theta(z) = z/\lambda$. Следствие доказано.

Оказывается, что следствие 2.3 описывает только ситуацию, в которой оператор композиции C_θ удовлетворяет уравнению

$$SC_\theta = \lambda C_\theta S.$$

Действительно, предположим, что $SC_\theta = \lambda C_\theta S$ при некотором λ , $0 < |\lambda| < 1$. Тогда в силу утверждения (a) леммы 2.1 имеем

$$C_\theta C_\lambda = M_{C_\theta 1} = M_1 = I,$$

где I – тождественный оператор в $C_A(\mathbb{D})$, откуда следует, что $C_\theta C_\lambda z = z$, т.е. $C_\theta(\lambda z) = z$ или $\lambda\theta(z) = z$ и, следовательно, $\theta(z) = z/\lambda$. Таким образом,

$$|\theta(1)| = \left| \frac{1}{\lambda} \right| > 1,$$

что противоречит тому, что $\theta(1) \in \overline{\mathbb{D}}$.

Теперь пусть $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – некоторое комплексное число такое, что оператор $\mu I + S$ обратим, т.е. пусть $\mu \in \text{Res}(S)$ (например, пусть $\mu = 2$), где $\text{Res}(S)$ обозначает резольвентное множество оператора сдвига S . Основным результатом данной работы дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.4. *Имеем $\mathcal{B}_{\mu I+S} \neq \{S\}'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сказанного во введении и из леммы 2.1 следует, что если ненулевой оператор B является расширенным собственным вектором оператора сдвига S , соответствующим расширенному собственному числу $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то

$$BS = SB$$

тогда и только тогда, когда $\lambda = 1$. Таким образом, если λ – нетривиальное расширенное собственное число оператора S , т.е. если $\lambda \neq 1$, то $BS \neq SB$, тогда как $B \in \mathcal{B}_{\mu I+S}$, откуда следует, что $\mathcal{B}_{\mu I+S} \neq \{S\}'$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Biswas, A. Lambert, S. Petrovic, “Extended eigenvalues and the Volterra operator”, *Glasg. Math. J.*, **44**:3 (2002), 521–534.
- [2] M. T. Karaev, H. S. Mustafayev, “On some properties of Deddens algebras”, *Rocky Mountain J. Math.*, **33**:3 (2003), 915–926.
- [3] A. Lambert, S. Petrovic, “Beyond hyperinvariance for compact operators”, *J. Funct. Anal.*, **219**:1 (2005), 93–108.
- [4] S. Petrovic, “On the extended eigenvalues of some Volterra operators”, *Integral Equations Operator Theory*, **57**:4 (2007), 593–598.

М. Гурдал

Университет им. Сулеймана Демиреля, Турция

E-mail: gurdalmehmet@sdu.edu.tr

Поступило

09.07.2008