Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Похожаев, Об отсутствии положительных решений эллиптических уравнений в плоских неограниченных областях, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 2, 261–272

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5269>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:59:43

УДК 517.954

Об отсутствии положительных решений эллиптических уравнений в плоских неограниченных областях

С. И. Похожаев

На примере модельных уравнений вида $\Delta u + u^\sigma = 0$, как линейного $\sigma = 1$, так и нелинейного $\sigma > 1$, демонстрируются прямые методы доказательства отсутствия положительных решений в полубесконечных плоских областях. При этом рассматриваются полубесконечные полосы, как прямые, так и экспоненциально убывающие, с однородным условием Неймана на верхней и нижней границах.

Библиография: 2 названия.

Эта статья примыкает к работе [1] Кондратьева, который привлек мое внимание к рассматриваемой тематике.

Целью статьи является демонстрация некоторых прямых методов исследования проблемы отсутствия положительных решений эллиптических уравнений.

Рассматриваются как линейные, так и квазилинейные эллиптические уравнения.

В линейном случае мы устанавливаем оценку для характерной длины, обеспечивающую отсутствие положительных решений в соответствующей области. Отметим, что эта оценка зависит от геометрии области.

В нелинейном случае мы устанавливаем отсутствие положительных глобальных решений, т.е. решений, определенных во всей полубесконечной полосе.

Особенностью рассматриваемых задач является отсутствие граничных условий на “входе” и “выходе” полубесконечной полосы. Отсутствие этих граничных условий делает невозможным непосредственное применение метода нелинейной емкости [2]. Тем не менее, идея этого метода – выбор оптимальных пробных функций – является ключевой для доказательства полученных результатов. Такой подход позволяет рассматривать задачи без привлечения метода сравнения, основанного на принципе максимума. Тем самым, этот подход дает возможность рассмотреть широкий класс уравнений различных типов.

В этой статье мы ограничиваемся случаем модельных уравнений.

Статья организована следующим образом. В п. 1 рассматривается линейное уравнение. В этом случае доказывается не только отсутствие положительного решения, определенного во всей полубесконечной полосе, но и устанавливается характерный

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00441), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3810.2008.1) и программы ОМ РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

параметр, обеспечивающий отсутствие положительного решения. В п. 2 изучается нелинейное простейшее уравнение в полубесконечной полосе. Отсутствие “начального” условия здесь преодолевается за счет введения двухмасштабного согласованного растяжения. В заключительном п. 3 содержатся замечания о возможных обобщениях предложенного подхода.

ЗАМЕЧАНИЕ К ОБОЗНАЧЕНИЯМ. Отметим, что для каждой отдельной задачи применяются обозначения, не зависящие от предыдущих. Поэтому одно и то же обозначение может иметь разный, но “родственный” смысл.

1. Линейное уравнение. Рассматривается следующая модельная задача:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, \\ u \geq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Область Ω есть полубесконечная полоса

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y_-(x) < y < y_+(x)\}.$$

На верхней y_+ и нижней y_- границах задано условие Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь и далее n обозначает единичный вектор внешней нормали к границе.

Начнем с простейшего случая прямой полуполосы.

Итак, рассмотрим (1.1) в случае

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, -1 < y < 1\}. \quad (1.3)$$

ТЕОРЕМА 1.1. *Задача (1.1)–(1.3) не имеет нетривиального решения ни в какой подобласти*

$$\Omega_L(a) = \Omega \cap \{0 \leq a < x < a + L\}$$

с $L > \pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно ограничиться случаем $a = 0$.

Итак, рассмотрим уравнение (1.1) в области

$$\Omega_L := \Omega_L(0) = \Omega \cap \{0 < x < L\}.$$

Умножим уравнение (1.1) на пробную функцию

$$\varphi(x) = \sin \omega x \quad (1.4)$$

с $\omega = \pi/L$.

В силу условия Неймана (1.2) при $y = \pm 1$ и $x > 0$ после интегрирования по частям получаем

$$\iint_{\Omega_L} u \varphi \, dx \, dy + \iint_{\Omega_L} u \Delta \varphi \, dx \, dy + \int_{-1}^1 (u_x \varphi - u \varphi_x) \Big|_{x=0}^L dy = 0. \quad (1.5)$$

Функция φ , определенная формулой (1.4), удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \varphi(L) = 0, \\ \varphi'(0) &> 0, \quad \varphi'(L) < 0.\end{aligned}$$

В силу этих условий из соотношения (1.5) следует, что

$$\iint_{\Omega_L} (1 - \omega^2) u \varphi \, dx \, dy \leq 0.$$

Отсюда при $\omega = \pi/L < 1$ получаем, что $u \equiv 0$ в Ω_L .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Таким образом, условие $L = \infty$ является излишним для отсутствия нетривиального решения задачи (1.1)–(1.3).

Рассмотрим теперь случай экспоненциально убывающей полосы. А именно, рассмотрим задачу (1.1)–(1.2) в случае области

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y_-(x) < y < y_+(x)\} \quad (1.6)$$

с $y_+(x) = e^{-x}$, $y_-(x) = -e^{-x}$.

ТЕОРЕМА 1.2. *Задача (1.1), (1.2), (1.6) не имеет нетривиального решения ни в какой подобласти*

$$\Omega_L(a) = \Omega \cap \{0 \leq a < \xi < a + L\}$$

с

$$L > \frac{4}{\sqrt{3}} \pi. \quad (1.7)$$

Здесь $\xi = x - y^2/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что для любой C^1 -функции $\psi(\xi)$ выполнено граничное условие Неймана

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{при } y = \pm e^{-x}, \quad x > 0. \quad (1.8)$$

Рассмотрим теперь область

$$\Omega_L := \Omega_L(0) = \Omega \cap \{0 < \xi < L\} \quad (1.9)$$

и функцию

$$\varphi(x, y) = 1 - \cos \omega \xi \quad (1.10)$$

с $\omega = 2\pi/L$.

Умножим уравнение (1.1) на эту функцию φ и проинтегрируем по частям. Тогда получим, что

$$\iint_{\Omega_L} u \varphi \, dx \, dy + \iint_{\Omega_L} u \Delta \varphi \, dx \, dy + \int_{\partial \Omega_L} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \varphi - u \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma = 0.$$

Отсюда с учетом условия Неймана (1.2) и равенства (1.8) для $\psi = \varphi$ следует, что

$$\iint_{\Omega_L} u(\varphi + \Delta \varphi) \, dx \, dy + \int_{\xi=0} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \varphi - u \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma + \int_{\xi=L} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \varphi - u \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma = 0.$$

В силу выбора (1.10) функции φ имеем

$$\varphi = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad \xi = L.$$

Далее имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0$$

и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = L.$$

Следовательно, получаем

$$\iint_{\Omega_L} u(\varphi + \Delta \varphi) dx dy = 0. \quad (1.11)$$

Для $\Delta \varphi$ находим, что

$$\Delta \varphi = (1 + y^2)\varphi''(\xi) - \varphi'(\xi).$$

Таким образом, для выбранной по формуле (1.10) функции φ имеем

$$L\varphi := \Delta \varphi + \varphi = (1 + y^2)\varphi''(\xi) - \varphi'(\xi) + \varphi = 1 - \omega \sin \omega \xi + [(1 + y^2)\omega^2 - 1] \cos \omega \xi.$$

Отсюда при

$$1 > \omega^2 + [(1 + y^2) \cdot \omega^2 - 1]^2 \quad (1.12)$$

получаем, что

$$L\varphi > 0. \quad (1.13)$$

Неравенство (1.12) приводит к $2(1 + y^2) > 1 + (1 + y^2)^2 \omega^2$, т.е.

$$\omega^2 < \frac{1 + 2y^2}{(1 + y^2)^2}. \quad (1.14)$$

Учитывая, что $y^2 < 1$, находим, что если

$$\omega^2 < \frac{3}{4}, \quad (1.15)$$

то неравенство (1.13) выполняется в подобласти Ω_L .

Тогда из интегрального соотношения (1.11) следует, что

$$u \equiv 0 \quad \text{в} \quad \Omega_L.$$

Аналогичные аргументы приводят к

$$u \equiv 0 \quad \text{в} \quad \Omega_L(a)$$

при любом $a > 0$.

Для завершения доказательства остается заметить, что неравенство (1.15) в силу выбора $\omega = 2\pi/L$ эквивалентно условию (1.7).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Следует отметить, что допустимая область значений ω и, тем самым, допустимая область значений L увеличивается при $a \rightarrow +\infty$, а именно, $\omega^2 \rightarrow 1 - 0$ и соответственно $L \rightarrow 2\pi + 0$.

2. Нелинейная задача. Рассмотрим следующую нелинейную модельную задачу

$$\begin{cases} \Delta u + u^\sigma = 0, & \sigma > 1, \\ u \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Область Ω есть полубесконечная полоса, на верхней y_+ и нижней y_- гладких границах задано условие Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0. \quad (2.2)$$

Начнем с простейшего случая прямой полуполосы.

Итак, рассмотрим (2.1) в случае

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, -1 < y < 1\}. \quad (2.3)$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Задача (2.1)–(2.3) с $\sigma > 1$ не имеет нетривиального решения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим область

$$\Omega_L = \Omega \cap \{0 < x < L\}.$$

Умножим уравнение (2.1) на функцию

$$\varphi(x) = \sin \omega x$$

с $\omega = \pi/L$.

В силу условия Неймана (2.2) после интегрирования по частям получим, что

$$\iint_{\Omega_L} u^\sigma \varphi \, dx \, dy + \iint_{\Omega_L} u \Delta \varphi \, dx \, dy \leq 0.$$

Применяя теперь неравенство Гёльдера, находим, что

$$\iint_{\Omega_L} u^\sigma \varphi \, dx \, dy \leq \iint_{\Omega_L} \frac{|\Delta \varphi|^{\sigma'}}{\varphi^{\sigma'-1}} \, dx \, dy = 2 \int_0^L \frac{|\varphi''|^{\sigma'}}{\varphi^{\sigma'-1}} \, dx = 4\omega^{2\sigma'-1}$$

с $\sigma' = \sigma/(\sigma - 1) > 1$.

Таким образом, имеем

$$\iint_{\Omega_L} u^\sigma \varphi \, dx \, dy \leq 4 \left(\frac{\pi}{L} \right)^{2\sigma'-1}. \quad (2.4)$$

Докажем теперь, что это неравенство влечет

$$u \equiv 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\infty = \Omega.$$

Предположим обратное. Тогда найдется число $c_0 > 0$ и ограниченное измеримое множество G_0 с положительной мерой, в котором

$$u \geq c_0. \quad (2.5)$$

Далее, для ограниченного множества G_0 найдется $L_0 > 0$ такое, что

$$G_0 \subset \Omega_{L_0/2} = \Omega \cap \left\{ 0 < x < \frac{L_0}{2} \right\},$$

и, следовательно,

$$G_0 \subset \Omega_{L/2} = \Omega \cap \left\{ 0 < x < \frac{L}{2} \right\}$$

при любом $L > L_0$.

Функция $\varphi(x) = \sin \omega x$ с $\omega = \pi/L$ удовлетворяет неравенству

$$\varphi(x) > 2\frac{x}{L} \quad \text{при} \quad 0 < x < \frac{L}{2}.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_L} u^\sigma \varphi \, dx \, dy &\geq \iint_{G_0} u^\sigma \varphi \, dx \, dy \geq c_0^\sigma \iint_{G_0} \varphi \, dx \, dy \\ &> \frac{2c_0^\sigma}{L} \iint_{G_0} x \, dx \, dy = \frac{c_1}{L}, \quad L > L_0, \end{aligned}$$

с соответствующей постоянной $c_1 > 0$, не зависящей от L .

Отсюда в силу неравенства (2.4) получаем, что

$$\frac{c_1}{L} \leq 4 \left(\frac{\pi}{L} \right)^{2\sigma'-1}$$

с $\sigma' > 1$ при любом $L > L_0$. После перехода к пределу при $L \rightarrow \infty$ в этом неравенстве получаем противоречие со сделанным предположением.

Теорема 2.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Утверждение этой теоремы известно [1] для строго положительных решений $u > 0$.

В теореме 2.1 рассматривается более широкий класс неотрицательных решений $u \geq 0$. Но основное отличие – это метод доказательства. Именно этим “прямым” методом устанавливаются теоремы типа Лиувилля для более сложных неограниченных областей.

Мы ограничимся случаем полуограниченной экспоненциально сужающейся полосы.

Рассмотрим теперь задачу (2.1), (2.2) в области

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y_-(x) < y < y_+(x)\} \quad (2.6)$$

с $y_\pm = \pm e^{-x}$.

ТЕОРЕМА 2.2. Задача (2.1), (2.2), (2.6) не имеет нетривиального решения в области Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем в несколько этапов.

I. Введем переменную ξ :

$$\xi = x - \frac{y^2}{2}$$

и сделаем замену

$$u(x, y) \mapsto v(x, y) = u(x, y)e^\xi,$$

так что

$$u(x, y) = e^{-\xi}v(x, y).$$

Тогда уравнение (2.1) принимает вид

$$\Delta(e^{-\xi}v) + e^{-\sigma\xi}v^\sigma = 0. \quad (2.7)$$

Умножим это уравнение на функцию $e^\xi\varphi$, где φ есть неотрицательная кусочно- C^2 -гладкая функция с условиями сопряжения первого порядка. А именно,

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \varphi_1(\xi) \geq 0 & \text{при } 0 \leq \xi \leq R, \\ \varphi_2(\xi) \equiv 1 & \text{при } R \leq \xi \leq 2R, \\ \varphi_3(\xi) \geq 0 & \text{при } 2R \leq \xi \leq 2R + L, \\ 0 & \text{при } \xi \geq 2R + L \end{cases}$$

с $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) \geq 0$ и с соответствующими условиями сопряжения.

Отметим снова, что для любой C^1 -функции $\psi(\xi)$ выполнено граничное условие Неймана

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{при } y = \pm e^{-x}. \quad (2.8)$$

Здесь n – внешняя нормаль к границам $y_+ = e^{-x}$ и $y_- = -e^{-x}$.

Умножим теперь уравнение (2.7) на функцию $e^\xi\varphi(\xi)$ и проинтегрируем по частям. Тогда получим

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_{2R+L}} e^{-(\sigma-1)\xi} v^\sigma \varphi \, dx \, dy + \iint_{\Omega_{2R+L}} \Delta(e^{-\xi}v) \cdot e^\xi \varphi \, dx \, dy \\ &= \iint_{\Omega_{2R+L}} e^{-(\sigma-1)\xi} v^\sigma \varphi \, dx \, dy + \iint_{\Omega_{2R+L}} e^{-\xi} v \Delta(e^\xi \varphi) \, dx \, dy \\ & \quad + \int_{\partial\Omega_{2R+L}} \left[\frac{\partial}{\partial n}(e^{-\xi}v) \cdot e^\xi \varphi - e^{-\xi}v \cdot \frac{\partial}{\partial n}(e^\xi \varphi) \right] d\sigma. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь $\Omega_{2R+L} = \Omega \cap \{0 < \xi < 2R + L\}$.

Далее, в силу условия Неймана (2.2) и отмеченного свойства (2.8) для C^1 -функций $\psi(\xi)$ имеем

$$\frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial n}(e^\xi \varphi) = 0$$

при $y = y_+$ и $y = y_-$.

Тогда находим, что

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega_{2R+L}} \left[\frac{\partial}{\partial n}(e^{-\xi}v) \cdot e^\xi \varphi - e^{-\xi}v \cdot \frac{\partial}{\partial n}(e^\xi \varphi) \right] d\sigma \\ &= \int_{\xi=0} \left[\frac{\partial}{\partial n}(e^{-\xi}v) \cdot e^\xi \varphi - e^{-\xi}v \cdot \frac{\partial}{\partial n}(e^\xi \varphi) \right] d\sigma = \int_{\xi=0} v\varphi'(0) \, d\sigma \geq 0. \end{aligned}$$

При этом мы воспользовались следующими фактами:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) \geq 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \quad \text{при } \xi = 0$$

и

$$\varphi(2R+L) = 0, \quad \varphi'(2R+L) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \text{при } \xi = 2R+L.$$

Тогда из интегрального тождества (2.9) следует, что

$$\iint_{\Omega_{2R+L}} e^{-(\sigma-1)\xi} v^\sigma \varphi \, dx \, dy \leq - \iint_{\Omega_{2R+L}} e^{-\xi} v \Delta(e^\xi \varphi) \, dx \, dy. \quad (2.10)$$

Далее, имеем

$$e^{-\xi} \Delta(e^\xi \varphi) = e^{-\xi} [(1+y^2)(e^\xi \varphi)'' - (e^\xi \varphi)'] = (1+y^2)\varphi'' + (1+2y^2)\varphi' + y^2\varphi.$$

Здесь $\varphi' = d\varphi/d\xi$ и $\varphi'' = d^2\varphi/d\xi^2$.

Таким образом, неравенство (2.10) принимает вид

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_{2R+L}} e^{-(\sigma-1)\xi} v^\sigma \varphi \, dx \, dy &\leq - \iint_{\Omega_{2R+L}} [(1+y^2)\varphi'' + (1+2y^2)\varphi' + y^2\varphi] v \, dx \, dy \\ &\leq - \iint_{\Omega_{2R+L}} [(1+y^2)\varphi'' + (1+2y^2)\varphi'] v \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (2.11)$$

II. Введем обозначение

$$J := - \iint_{\Omega_{2R+L}} [(1+y^2)\varphi'' + (1+2y^2)\varphi'] v \, dx \, dy$$

и положим

$$J = J_1 + J_2 + J_3, \quad (2.12)$$

где

$$J_i := - \iint_{\Omega_i} [(1+y^2)\varphi'' + (1+2y^2)\varphi'] v \, dx \, dy, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\Omega_1 = \Omega \cap \{0 < \xi < R\}, \quad \Omega_2 = \Omega \cap \{R < \xi < 2R\}, \quad \Omega_3 = \Omega \cap \{2R < \xi < 2R+L\}.$$

Рассмотрим теперь интегралы J_i .

Интеграл J_1 . На промежутке $\xi \in [0, R]$ выберем

$$\varphi_1(\xi) = \sin \frac{\pi}{2R} \xi.$$

Тогда

$$J_1 \leq - \iint_{\Omega_1} (1+y^2) \varphi_1'' v \, dx \, dy.$$

В силу неравенства Гёльдера с весом имеем

$$J_1 \leq 2 \left(\iint_{\Omega_1} e^{-(\sigma-1)\xi} v^\sigma \varphi_1 \, dx \, dy \right)^{1/\sigma} \cdot \left(\iint_{\Omega_1} \frac{|\varphi_1''|^{\sigma'}}{\varphi_1^{\sigma'-1}} e^\xi \, dx \, dy \right)^{1/\sigma'},$$

поскольку $1+y^2 \leq 2$.

Тогда, применяя неравенство Юнга, находим, что

$$J_1 \leq \frac{1}{\sigma} \iint_{\Omega_1} e^{-(\sigma-1)\xi} v^\sigma \varphi_1 dx dy + \frac{2\sigma'}{\sigma'} \iint_{\Omega_1} \frac{|\varphi_1''|^{\sigma'}}{\varphi_1^{\sigma'-1}} e^\xi dx dy. \quad (2.13)$$

Для оценки последнего интеграла сделаем замену переменных

$$(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$$

по формулам

$$\begin{cases} \xi = x - \frac{y^2}{2}, \\ \eta = y, \end{cases} \quad (2.14)$$

так что

$$\begin{cases} x = \xi + \frac{\eta^2}{2}, \\ y = \eta. \end{cases}$$

Для якобиана этого отображения имеем

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно,

$$\iint_{\Omega_1} \frac{|\varphi_1''|^{\sigma'}}{\varphi_1^{\sigma'-1}} e^\xi dx dy = \int_{\xi=0}^R \int_{\eta_-(\xi)}^{\eta_+(\xi)} \frac{|\varphi_1''|^{\sigma'}}{\varphi_1^{\sigma'-1}} e^\xi d\eta d\xi,$$

где

$$\eta_+ \leftrightarrow y_+ \quad \text{и} \quad \eta_- \leftrightarrow y_-, \quad \text{т.е.} \quad \eta_+ = e^{-\xi - \eta_+^2/2} \leq e^{-\xi}, \quad \eta_- = -e^{-\xi - \eta_-^2/2} \geq -e^{-\xi}.$$

Тогда

$$\int_{\xi=0}^R \int_{\eta_-(\xi)}^{\eta_+(\xi)} \frac{|\varphi_1''|^{\sigma'}}{\varphi_1^{\sigma'-1}} e^\xi d\eta d\xi \leq 2 \int_{\xi=0}^R \frac{|\varphi_1''|^{\sigma'}}{\varphi_1^{\sigma'-1}} \Big|_{\varphi_1 = \sin(\pi/2R)\xi} = 2 \left(\frac{\pi}{2R} \right)^{2\sigma'-1}.$$

Отсюда в силу неравенства (2.13) получаем, что

$$J_1 \leq \frac{1}{\sigma} \iint_{\Omega_1} e^{-(\sigma-1)\xi} v^\sigma \cdot \varphi dx dy + c_1 \cdot R^{1-2\sigma'} \quad (2.15)$$

с постоянной $c_1 = 4 \cdot 2^{-\sigma'} / \sigma' \cdot \pi^{2\sigma'-1}$.

Интеграл J_2 . Для интеграла J_2 в силу выбора пробной функции φ , а именно

$$\varphi' \equiv \varphi'' \equiv 0 \quad \text{при} \quad R \leq \xi \leq 2R,$$

имеем равенство

$$J_2 = 0. \quad (2.16)$$

Интеграл J_3 . Для интеграла J_3 имеем

$$\begin{aligned} J_3 &= \iint_{\Omega_3} [(1+y^2)\varphi_3'' + (1+2y^2)\varphi_3']v \, dx \, dy \leq \iint_{\Omega_3} (2|\varphi_3''| + 3|\varphi_3'|)v \, dx \, dy \\ &\leq \left(\iint_{\Omega_3} e^{-(\sigma-1)\xi} v^\sigma \varphi_3 \, dx \, dy \right)^{1/\sigma} \cdot \left(\iint_{\Omega_3} |w|^{\sigma'} e^\xi \cdot \frac{1}{\varphi_3^{\sigma'-1}} \, dx \, dy \right)^{1/\sigma'} \\ &\leq \frac{1}{\sigma} \iint_{\Omega_3} e^{-(\sigma-1)\xi} v^\sigma \varphi_3 \, dx \, dy + \frac{1}{\sigma'} \iint_{\Omega_3} |w|^{\sigma'} e^\xi \frac{1}{\varphi_3^{\sigma'-1}} \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь $w = w_3 = 2|\varphi_3''| + 3|\varphi_3'|$.

Для оценки последнего интеграла сделаем замену переменных (2.14). Тогда получим

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_3} |w_3|^{\sigma'} e^\xi \frac{1}{\varphi_3^{\sigma'-1}} \, dx \, dy &= \int_{\xi=2R}^{2R+L} |w_3|^{\sigma'} e^\xi \frac{1}{\varphi_3^{\sigma'-1}} \int_{\eta_-(\xi)}^{\eta_+(\xi)} d\eta \, d\xi \\ &\leq 2 \int_{\xi=2R}^{2R+L} |w_3|^{\sigma'} e^\xi \frac{1}{\varphi_3^{\sigma'-1}} \, d\xi. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Теперь в качестве функции $\varphi_3(\xi)$ при $2R \leq \xi \leq 2R+L$ возьмем

$$\varphi_3(\xi) = \psi_3(\zeta),$$

где $\zeta = (\xi - 2R)L$ и $\psi_3(\zeta) \geq 0$ есть $C^2(0,1)$ -функция, удовлетворяющая условиям сопряжения

$$\psi_3(0) = 1, \quad \psi_3'(0) = 0, \quad \psi_3(1) = 0, \quad \psi_3'(1) = 0$$

и

$$\int_0^1 \frac{|\psi_3'(\zeta)|^{\sigma'} + |\psi_3''(\zeta)|^{\sigma'}}{\psi_3^{\sigma'-1}(\zeta)} \, d\zeta < \infty.$$

Ясно, что такая функция ψ_3 существует. Тогда неравенство (2.18) влечет, что

$$\iint_{\Omega_3} |w_3|^{\sigma'} e^\xi \frac{1}{\varphi_3^{\sigma'-1}} \, dx \, dy \leq 2L \int_0^1 \frac{|(3/L)\psi_3'(\zeta)|^{\sigma'} + |(2/L^2)\psi_3''(\zeta)|^{\sigma'}}{\psi_3^{\sigma'-1}(\zeta)} \, d\zeta \leq c_3 \cdot L^{1-\sigma'}$$

при $L \geq 1$ с постоянной

$$c_3 = 6^{\sigma'} \cdot \int_0^1 \frac{|\psi_3'(\zeta)|^{\sigma'} + |\psi_3''(\zeta)|^{\sigma'}}{\psi_3^{\sigma'-1}(\zeta)} \, d\zeta.$$

Следовательно, в силу неравенства (2.17) получаем

$$J_3 \leq \frac{1}{\sigma} \iint_{\Omega_3} e^{-(\sigma-1)\xi} v^\sigma \varphi \, dx \, dy + \frac{c_3}{\sigma'} L^{1-\sigma'}. \quad (2.19)$$

Суммируя полученные оценки (2.15), (2.16) и (2.19) для интегралов J_1 , J_2 и J_3 соответственно, из неравенства (2.11) находим, что

$$\iint_{\Omega_{2R+L}} e^{-(\sigma-1)\xi} v^\sigma \varphi \, dx \, dy \leq \frac{1}{\sigma} \iint_{\Omega_{2R+L}} e^{-(\sigma-1)\xi} v^\sigma \varphi \, dx \, dy + c_1 R^{1-2\sigma'} + \frac{c_3}{\sigma'} L^{1-\sigma'}.$$

Положим теперь

$$L = R^\theta \quad \text{с} \quad \theta = \frac{2\sigma' - 1}{\sigma' - 1} > 1.$$

Тогда получим, что

$$\iint_{\Omega_{2R+L}} e^{-(\sigma-1)\xi} v^\sigma \varphi \, dx \, dy \leq c_4 \cdot R^{1-2\sigma'} \quad (2.20)$$

при любом $R > 1$ с постоянной

$$c_4 = \sigma' \cdot c_1 + c_3.$$

III. Теперь, используя аргументы доказательства предыдущей теоремы 2.1, получаем

$$u \equiv 0 \quad (2.21)$$

в $\Omega_\infty = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y^2/2, y_-(x) < y < y_+(x)\}$.

IV. Докажем теперь, что $u \equiv 0$ в $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y_-(x) < y < y_+(x)\}$.

Обозначим через

$$\Omega_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \frac{y^2}{2}, y_-(x) < y < y_+(x) \right\}.$$

Для доказательства тождества (2.21) в области Ω_0 для решения u задачи (2.1), (2.2), определенного в Ω , рассмотрим интеграл

$$J_l(y) := \int_0^l u(x, y) \psi_l(x) \, dx, \quad (2.22)$$

где $0 < l < l_* = (1/2)e^{-2l_*}$ и $\psi_l(x) = \sin(\pi/l)x$.

Умножим уравнение (2.1) на эту функцию и проинтегрируем по $x \in (0, l)$.

Тогда с учетом неотрицательности решения u находим, что

$$J_l''(y) - \lambda_l J_l(y) \leq - \int_0^l u^\sigma \psi_l(x) \, dx \leq -\mu_l J_l^\sigma(y) \quad (2.23)$$

с $\lambda_l = \pi^2/l^2$ и $\mu_l = (\pi/2l)^{\sigma-1}$.

Далее, в силу ранее доказанного имеем, что

$$J_l(0) = J_l'(0) = 0.$$

Тогда из дифференциального неравенства (2.23) следует, что

$$J_l(y) = 0.$$

Таким образом,

$$u \equiv 0 \quad \text{в} \quad \Omega_0$$

и, следовательно, в силу ранее доказанного

$$u \equiv 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\infty$$

получаем

$$u \equiv 0 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Теорема 2.2 полностью доказана.

3. Заключение. Отметим, что предложенный подход без использования принципа максимума применим также для уравнений в частных производных высших порядков и в случае многих переменных, не зависимо от типа уравнений.

Этот же метод применим к соответствующим неравенствам. А именно, в нашем случае, к

$$\begin{cases} \Delta u + u^\sigma \leq 0, & \sigma > 1, \\ u \geq 0 \end{cases}$$

с условием Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0$$

на верхней y_+ и нижней y_- границах.

Именно такой подход был использован в [2] для установления критических параметров в теоремах типа Лиувилля для уравнений, рассматриваемых как в случае неограниченных, так и в случае ограниченных областей с сингулярными коэффициентами.

Автор выражает благодарность профессору В. А. Кондратьеву за плодотворное обсуждение предложенного прямого метода.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. A. Kondrat'ev, "On the existence of positive solutions of second-order semilinear elliptic equations in cylindrical domains", *Russ. J. Math. Phys.*, **10**:1 (2003), 99–108.
- [2] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, "Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных", Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 1–383.

С. И. Похожаев

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило

16.07.2008