Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Терзич, Классы Понтрягина обобщенных симметрических пространств, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 4, 613–621

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm527>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 18:27:45

УДК 515.164.32

КЛАССЫ ПОНТРЯГИНА ОБОБЩЕННЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

С. Терзич

В статье вычисляются вещественные характеристические классы Понтрягина обобщенных симметрических пространств с простыми компактными основными группами Ли.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. В настоящей работе вычисляются вещественные классы Понтрягина обобщенных симметрических пространств конечного порядка с простыми компактными основными группами Ли. Классификация этих пространств, использующая описание Каца (см. [1]) автоморфизмов конечного порядка полупростых групп Ли, приведена в работе [2]. В статье [3] разработан способ нахождения характеристических классов однородных пространств с компактными связными основными группами Ли. Применяя этот способ, Такеучи (см. [4]) вычислил вещественные классы Понтрягина симметрических пространств. При вычислении классов Понтрягина обобщенных симметрических пространств первой категории можно прямо применить теорию Бореля–Хирцербруха. В случае пространств второй категории упомянутая теория не позволяет сразу приступить к вычислению классов Понтрягина ввиду отсутствия удобных технических способов для ее реализации. Дело в том, что нам должны быть известны алгебры когомологий соответствующих однородных пространств. Кроме того, необходимо иметь описание картановской алгебры подгруппы, подходящее для “дополняющих” корней. В работе [2] полностью решены эти проблемы для обобщенных симметрических пространств. В настоящей работе приведены вычисления классов Понтрягина обобщенных симметрических пространств, основанные на теории Бореля–Хирцербруха и на результатах работы [2]. Работа выполнена под руководством профессора Ю. П. Соловьева.

2. Классы Понтрягина однородных пространств. Пусть G – связная компактная группа Ли, U – ее подгруппа, S – максимальный тор подгруппы U и T – максимальный тор группы G .

Если $S \subset T$, то очевидно, что корни группы G относительно тора S получаются как сужение тех корней группы G (относительно T), которые являются ненулевыми на S .

Более того, корни $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ группы G относительно S можно выбрать таким образом, чтобы $\{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$ являлись корнями подгруппы U . В этом случае корни $\pm\alpha_i$ ($q < i \leq m$) называются *дополняющими корнями* для U .

Оказывается, что дополняющие корни позволяют полностью описать полный класс Понтрягина соответствующего однородного пространства.

Пусть σ^* – характеристический гомоморфизм однородного пространства G/U (полное определение этого понятия можно найти в [5, с. 209–210]) и $\tau': H^1(S) \rightarrow H^2(B_S)$ – трансгрессия. Тогда имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. а) *Существует класс $\bar{p} \in H^*(B_U)$ такой, что*

$$p(G/U) = \sigma^*(\bar{p}) \quad \text{и} \quad \rho^*(S, U)\bar{p} = \prod (1 + (\tau' b_j)^2),$$

где $\pm b_j$ представляют дополняющие корни для U .

б) *Если U – связная подгруппа, то, отождествляя $H^*(G/U)$ с $H^*(L)$, где $L = H^*(B_U) \otimes H^*(G)$ представляет алгебру Картана, получаем, что*

$$p(G/U) = q(\bar{p}) = (\bar{p} \bmod \rho^*(U, G)(H^*(B_G))) \otimes 1.$$

Первая часть этой теоремы сформулирована в статье [3]; полное доказательство содержится в статье [4].

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства теоремы следует, что $\bar{p}$ содержится в образе гомоморфизма $\rho^*(U, G)$, $p(G/U) = 1$. В частности, $p(G/S) = 1$ для любого тора S группы G .

Мы будем опускать символы τ' и $\rho^*(S, U)$, отождествляя $H^*(B_U)$ и $R[s]^{W_U}$ с помощью этих отображений.

3. Случай обобщенных симметрических пространств. В обозначениях и терминологии, касающихся обобщенных симметрических пространств, мы следуем [6]. Классификацию этих пространств и все результаты, касающиеся их когомологий, будем использовать в форме, приведенной в [2]. Таким образом, всюду в дальнейшем рассматривается однородное пространство $M = G/U$, где G – связная простая компактная группа Ли, а U – подгруппа неподвижных точек гладкого автоморфизма группы G конечного порядка.

В случае обобщенных симметрических пространств первой категории (т.е. таких, что $\text{rank } U = \text{rank } G$) всякий максимальный тор T подгруппы U является одновременно максимальным тором группы G . Поэтому чтобы получить дополняющие корни для U относительно G , достаточно корни группы G относительно тора T выразить через канонические координаты подгруппы U и отметить формы, которые не являются корнями подгруппы U . Таким образом, классы Понтрягина этих пространств находятся прямым применением теоремы 1.

Более интересным является случай обобщенных симметрических пространств второй категории (т.е. таких, что $\text{rank } U < \text{rank } G$).

Пусть Θ – автоморфизм конечного порядка m алгебры g . Согласно [2] Θ имеет тип $(m, (s_0, \dots, s_n), k)$, где k – порядок автоморфизма ν , индуцированного автоморфизмом схемы Дынкина для g . Пусть набор $\{i_1, \dots, i_t\}$ состоит из всех номеров $i_1, \dots, i_t$ таких, что $s_{i_1} = \dots = s_{i_t} = 0$. Пусть, далее, $H_1, \dots, H_l, X_1, \dots, X_l, Y_1, \dots, Y_l$ – система Шевалле, определяемая системой корней относительно картановской подалгебры t , а $\bar{H}_1, \dots, \bar{H}_n$ базис подалгебры t^ν , полученный из базиса $H_1, \dots, H_l$ по формулам (1)–(5) из [2]. В работе [2] показано, что $\{\bar{H}_{i_1}, \dots, \bar{H}_{i_t}\}$ является базисом картановской подалгебры в полупростой части алгебры g^Θ , а $\xi(g^\Theta)$ порождается векторами

$$\bar{H}_j - \sum_{k=1}^t c_{jk} \bar{H}_{i_k}, \quad j \neq i_1, \dots, i_t,$$

где c_{jk} задаются формулами

$$\sum_{k=1}^t c_{jk} a_{i_k i_l} = a_{i_l j}$$

для коэффициентов $a_{i_k i_l}$ с номерами $1 \leq l, k \leq t$ в матрице Картана для накрывающей алгебры $L(g, \nu)$.

Таким образом, имеется описание базиса картановской подалгебры t^Θ через базис картановской подалгебры t , что делает теорему 1 применимой и в случае обобщенных симметрических пространств второй категории.

Приведем вычисление классов Понтрягина для некоторых обобщенных симметрических пространств второй категории. Ясно (см. [7]), что для этих пространств имеет смысл рассматривать только алгебры типа A_n , D_n ($n \geq 5$), D_4 и E_6 .

1. Пусть $g = A_{2n}$. Покажем, как вычислить классы Понтрягина на примере подгруппы $C_k \oplus B_{n-k}$. Корни группы A_{2n} имеют вид $x_i - x_j$ ($i \neq j$, $i, j = \overline{1, 2n+1}$). Максимальная коммутативная подалгебра подгруппы $C_k \oplus B_{n-k}$ имеет вид

$$t^\Theta = L(\overline{H}_0, \dots, \overline{H}_{k-1}) \oplus L(\overline{H}_{k+1}, \dots, \overline{H}_n).$$

Следующие формы получаются как сужение корней группы A_{2n} на t^Θ :

$$\pm y_i, \quad \pm 2y_i, \quad \pm y_i \pm y_j \quad (1 \leq i < j \leq n).$$

Корнями группы $C_k B_{n-k}$ являются формы

$$\begin{aligned} \pm y_i \pm y_j, \quad \pm 2y_i \quad (1 \leq i < j \leq k), \\ \pm y_i \pm y_j, \quad \pm y_i \quad (k+1 \leq i < j \leq n). \end{aligned}$$

Поэтому формы $\pm 2y_i$ ($k+1 \leq i \leq n$), $\pm y_i$ ($1 \leq i \leq k$), $\pm(y_i + y_j)$, $\pm(y_i - y_j)$, ($1 \leq i \leq k$, $k+1 \leq j \leq n$), представляют дополняющие корни группы A_{2n} относительно подгруппы $C_k B_{n-k}$. Таким образом, получаем выражение

$$\bar{p} = \prod_{i=1}^k \prod_{j=k+1}^n (1 + (y_i + y_j)^2)(1 + (y_i - y_j)^2) \prod_{i=k+1}^n (1 + (2y_i)^2) \prod_{i=1}^k (1 + y_i^2).$$

В статье [2] показано, что $\rho^*(A_{2n}, C_k B_{n-k})(H^*(B_{A_{2n}})) = S^+(y_1^2, \dots, y_n^2)$. Из теоремы 1 (б) следует, что полный класс Понтрягина пространства $A_{2n}/C_k B_{n-k}$ имеет вид

$$p(A_{2n}/C_k B_{n-k}) = (\bar{p} \bmod S^+(y_1^2, \dots, y_n^2)) \otimes 1.$$

Заметим, что в случае $k = 0$ и $k = n$ получаем, что $\bar{p} \in \rho^*(U, G)$. Поэтому из замечания к теореме 1 следует, что полный класс Понтрягина соответствующего пространства является тривиальным, т.е.

$$p(A_{2n}/C_n) = p(A_{2n}/B_n) = 1.$$

2. Рассмотрим случай $g = A_{2n-1}$. Вычислим полный класс Понтрягина пространства $A_{2n-1}/D_k C_{n-k}$. Корни группы A_{2n-1} имеют вид $x_i - x_j$ ($i \neq j$, $i, j = \overline{1, 2n}$). Стационарная картановская подалгебра подгруппы $D_k C_{n-k}$ имеет вид (см. [2])

$$t^\Theta = L(\overline{H}_0, \dots, \overline{H}_{k-1}) \oplus L(\overline{H}_{k+1}, \dots, \overline{H}_n).$$

Следующие формы получаются как сужение корней группы A_{2n-1} на t^Θ :

$$\pm 2y_i, \quad \pm y_i \pm y_j \quad (1 \leq i < j \leq n).$$

Корнями группы $D_k C_{n-k}$ являются формы

$$\begin{aligned} & \pm y_i \pm y_j \quad (1 \leq i < j \leq k), \\ & \pm y_i \pm y_j, \quad \pm 2y_i \quad (k+1 \leq i < j \leq n). \end{aligned}$$

Следовательно, формы $\pm 2y_i$ ($1 \leq i \leq k$), $\pm(y_i + y_j)$, $\pm(y_i - y_j)$ ($1 \leq i \leq k$, $k+1 \leq j \leq n$) являются дополняющими корнями группы A_{2n} относительно подгруппы $D_k C_{n-k}$. Таким образом,

$$\bar{p}(A_{2n-1}/D_k C_{n-k}) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=k+1}^n (1 + (y_i + y_j)^2)(1 + (y_i - y_j)^2) \prod_{i=1}^k (1 + (2y_i)^2).$$

Следовательно, полный класс Понтрягина нашего пространства имеет вид

$$p(A_{2n-1}/D_k C_{n-k}) = (\bar{p} \bmod S^+(y_1^2, \dots, y_n^2)) \otimes 1.$$

Как и в случае алгебры A_{2n} , для $k = 0$ или $k = n$ получается тривиальный класс, т.е.

$$p(A_{2n-1}/D_n) = p(A_{2n-1}/C_n) = 1.$$

3. Для случая $g = D_{n+1}$ вычислим полный класс Понтрягина пространства $D_{n+1}/B_k B_{n-k}$. Картановская подалгебра алгебры $B_k B_{n-k}$ имеет вид

$$t^\Theta = L(\overline{H}_0, \dots, \overline{H}_{k-1}) \oplus L(\overline{H}_{k+1}, \dots, \overline{H}_n).$$

Корни группы D_{n+1} имеют вид $\pm x_i \pm x_j$ ($1 \leq i < j \leq n+1$). Сужением на алгебру t^Θ получаются формы

$$\pm y_i, \quad \pm y_i \pm y_j \quad (1 \leq i < j \leq n).$$

Корни группы $B_k B_{n-k}$ имеют вид

$$\begin{aligned} & \pm y_i \pm y_j, \quad \pm y_i \quad (1 \leq i < j \leq k), \\ & \pm y_i \pm y_j, \quad \pm y_i \quad (k+1 \leq i < j \leq n). \end{aligned}$$

Дополняющими корнями являются формы

$$\pm y_i \pm y_j \quad (1 \leq i \leq k, \quad k+1 \leq j \leq n).$$

Отсюда

$$\bar{p}(D_{n+1}/B_k B_{n-k}) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=k+1}^n (1 + (y_i + y_j)^2)(1 + (y_i - y_j)^2),$$

$$p(D_{n+1}/B_k B_{n-k}) = (\bar{p} \bmod S^+(y_1^2, \dots, y_n^2)) \otimes 1.$$

Из замечания к теореме 1 следует, что $p(D_{n+1}/B_n) = 1$.

4. Рассмотрим случай $g = D_4$. Приведем вычисления классов Понтрягина отдельно для каждой стационарной подгруппы H группы D_4 . Для каждой стационарной подалгебры g^Θ базис соответствующей картановской подалгебры указан в работе [2]. Через J_1 и J_2 будем обозначать многочлены, которые получаются сужением образующих алгебры $H^*(B_{D_4})$ на картановскую подалгебру соответствующей стационарной подалгебры. Для каждой такой подалгебры явный вид этих многочленов указан в [2].

- $g^\Theta = t^2$. Из замечания к теореме 1 сразу следует, что

$$p(D_4/T^2) = 1.$$

- $g^\Theta = A_1 \oplus t^1$. Корни группы D_4 : $\pm x_i \pm x_j$ ($1 \leq i < j \leq 4$). Их сужение на t^Θ : $\pm(y_1 + y_2/2)$, $\pm(-y_1 + y_2/2)$, $\pm 2y_1$, $\pm 2y_2$, $\pm(3y_1 + y_2/2)$, $\pm(-3y_1 + y_2/2)$.
Корни группы $T^1 A_1$: $\pm 2y_1$. Дополняющие корни: $\pm(y_1 + y_2/2)$, $\pm(-y_1 + y_2/2)$, $\pm 2y_2$, $\pm(3y_1 + y_2/2)$, $\pm(-3y_1 + y_2/2)$. Отсюда

$$\bar{p} = (1 + y_2^2) \left(1 + \left(y_1 + \frac{y_2}{2}\right)^2\right) \left(1 + \left(-y_1 + \frac{y_2}{2}\right)^2\right) \left(1 + \left(3y_1 + \frac{y_2}{2}\right)^2\right) \left(1 + \left(-3y_1 + \frac{y_2}{2}\right)^2\right)$$

и

$$p(D_4/A_1 T^1) = (\bar{p} \bmod \langle J_1, J_2 \rangle) \otimes 1.$$

- $g^\Theta = A_2$. Сужение корней группы D_4 на t^Θ : $\pm(y_3 - y_1)$, $\pm(y_3 - y_2)$, $\pm(y_1 - y_2)$, $\pm 3y_3$, $\pm 3y_2$, $\pm 3y_1$. Корни группы A_2 : $\pm(y_1 - y_2)$, $\pm(y_1 - y_3)$, $\pm(y_2 - y_3)$. Дополняющие корни: $\pm 3y_3$, $\pm 3y_2$, $\pm 3y_1$. Отсюда

$$\bar{p} = (1 + 9y_1^2)(1 + 9y_2^2)(1 + 9y_3^2)$$

и

$$p(D_4/A_2) = (\bar{p} \bmod \langle J_1, J_2 \rangle) \otimes 1.$$

- $g^\Theta = g_2$. Сужение корней группы D_4 на t^Θ : $\pm(y_3 - y_1)$, $\pm(y_3 - y_2)$, $\pm(y_1 - y_2)$, $\pm y_3$, $\pm y_2$, $\pm y_1$. Корни группы G_2 : $\pm y_1$, $\pm y_2$, $\pm y_3$, $\pm(y_1 - y_3)$, $\pm(y_2 - y_3)$, $\pm(y_1 - y_2)$. Дополняющих корней нет, следовательно,

$$p(D_4/G_2) = 1.$$

- $g^\Theta = A_1 \oplus A_1$. Сужение корней группы D_4 на t^Θ : $\pm(y_1 - y_2)$, $\pm(y_1 + y_2)$, $\pm(-3y_1 + y_2)$, $\pm(-3y_1 - y_2)$, $\pm 2y_1$, $\pm 2y_2$. Корни группы $A_1 \oplus A_1$: $\pm 2y_1$, $\pm 2y_2$. Дополняющие корни: $\pm(y_1 + y_2)$, $\pm(y_1 - y_2)$, $\pm(3y_1 + y_2)$, $\pm(-3y_1 + y_2)$. Таким образом,

$$\bar{p} = (1 + (y_1 + y_2)^2)(1 + (y_1 - y_2)^2)(1 + (y_2 - 3y_1)^2)(1 + (y_2 + 3y_1)^2)$$

и

$$p(D_4/A_1 a_1) = (\bar{p} \bmod \langle J_1, J_2 \rangle) \otimes 1.$$

5. Пусть $g = E_6$. Корнями группы E_6 являются формы $x_i - x_j$ ($i \neq j$), $\pm(x_i + x_j + x_k)$ ($i \neq j \neq k, i \neq k, 1 \leq i, j, k \leq 6$), $\pm(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$. Учитывая, что $x_1 + x_6 = x_2 + x_5 = x_3 + x_4$ на каждой максимальной абелевой подалгебре стационарной подгруппы U (см. [2]), получаем, что нужно вычислить сужение следующих форм:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= c_{15}, & x_1 + x_2 + x_3 &= d_{123}, & x_2 + x_3 + x_6 &= d_{236}, \\ x_1 - x_3 &= c_{14}, & x_1 + x_2 + x_4 &= d_{124}, & x_2 + x_4 + x_6 &= d_{246}, \\ x_1 - x_4 &= c_{13}, & x_1 + x_2 + x_5 &= a_1, & x_2 + x_5 + x_6 &= a_6, \\ x_1 - x_5 &= c_{12}, & x_1 + x_2 + x_6 &= a_2, & x_3 + x_5 + x_6 &= d_{356}, \\ x_1 - x_6 &= d_{16}, & x_1 + x_3 + x_5 &= d_{135}, & x_4 + x_5 + x_6 &= d_{456}, \\ x_2 - x_3 &= c_{24}, & x_1 + x_3 + x_6 &= a_3, & 3(x_1 + x_6), \\ x_2 - x_4 &= c_{23}, & x_1 + x_4 + x_5 &= d_{145}, \\ x_2 - x_5 &= d_{25}, & x_1 + x_4 + x_6 &= a_4, \\ x_3 - x_4 &= d_{34}, & x_1 + x_5 + x_6 &= a_5. \end{aligned}$$

Значит, для нахождения дополняющих корней надо рассматривать формы

$$\begin{aligned} &\pm a_i \quad (1 \leq i \leq 6), \quad \pm c_{ij} \quad (1 \leq i < j \leq 6, i + j \neq 7), \\ &d_{ij} \quad (i < j, i + j = 7), \quad d_{ijk} \quad (1 \leq i < j < k \leq 6, i + j \neq 7, i + k \neq 7, k + j \neq 7). \end{aligned}$$

При вычислении сужения корней алгебры E_6 на соответствующую стационарную подалгебру g^Θ мы пользуемся базисом картановской подалгебры t^Θ , указанным в статье [2]. Полиномы q_2, q_6, q_8, q_{12} представляют сужение образующих алгебры $H^*(B_{E_6})$ на соответствующую подалгебру. Для каждой стационарной подалгебры их явный вид указан в [2].

- $g^\Theta = t^4$. Из замечания к теореме 1 следует, что

$$p(E_6/T^4) = 1.$$

- $g^\Theta = t^3 \oplus A_1$. Корнями группы $T^1 \cdot SU(2)$ являются формы $\pm 2y_1$. Дополняющие корни получаются сужением форм a_i, c_{ij} ($(i, j) \neq (1, 5)$), d_{ij} и d_{ijk} . Отсюда

$$\bar{p} = \prod (1 + a_i^2) \prod_{(i,j) \neq (1,5)} (1 + c_{ij}^2) \prod (1 + d_{ij}^2) \prod (1 + d_{ijk}^2)$$

и

$$p(E_6/T^3 \cdot SU(2)) = (\bar{p} \bmod \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \otimes 1.$$

- $g^\Theta = t^2 \oplus C_2$. Корнями группы $T^2 \cdot SO(4)$ являются формы $\pm y_i \pm y_j, \pm 2y_i$. Поэтому дополняющие корни получаются сужением форм a_i, c_{1j} ($2 \leq j$), d_{16} и d_{ijk} . Следовательно,

$$\bar{p} = (1 + d_{16}^2) \prod (1 + a_i^2) \prod (1 + c_{1j}^2) \prod (1 + d_{ijk}^2)$$

и

$$p(E_6/T^3 \cdot SO(4)) = (\bar{p} \bmod \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \otimes 1.$$

- $g^\Theta = t^2 \oplus A_1 \oplus A_1$. Корнями группы $T^2 \cdot SU(2) \cdot SU(2)$ являются формы $\pm 2y_1, \pm 2y_2$. Дополняющие корни получаются сужением форм a_i, c_{1j} ($2 \leq j \leq 5$), c_{23}, d_{ijk} ($((i, j, k) \neq (4, 5, 6))$). Отсюда

$$\bar{p} = (1 + c_{23}^2) \prod (1 + a_i^2) \prod (1 + c_{1j}^2) \prod_{(i,j,k) \neq (4,5,6)} (1 + d_{ijk}^2)$$

и

$$p(E_6/T^3 \cdot SU(2) \cdot SU(2)) = (\bar{p} \bmod \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \otimes 1.$$

- $g^\Theta = t^2 \oplus A_2$. Корнями группы $T^2 \cdot SU(3)$ являются формы $y_i - y_j, \pm 2y_i$. Поэтому дополняющие корни получаются сужением корней $a_i, c_{ij}, d_{16}, d_{25}$ и d_{ijk} ($i < 3$). Таким образом,

$$\bar{p} = (1 + d_{16}^2)(1 + d_{25}^2) \prod (1 + a_i^2) \prod (1 + c_{ij}^2) \prod_{i < 3} (1 + d_{ijk}^2)$$

и

$$p(E_6/T^3 \cdot SU(3)) = (\bar{p} \bmod \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \otimes 1.$$

- $g^\Theta = t^1 \oplus A_3$. Корни группы $T^1 \cdot SU(4)$: $y_i - y_j$. Дополняющие корни (мы их будем обозначать теми же символами, что и исходные формы): $a_4, a_5, a_6, c_{12}, c_{13}, c_{23}, d_{ij}, d_{ijk}$. Отсюда

$$\bar{p} = (1 + c_{12}^2)(1 + c_{13}^2)(1 + c_{23}^2) \prod_{i \geq 4} (1 + a_i^2) \prod (1 + d_{ij}^2) \prod (1 + d_{ijk}^2)$$

и

$$p(E_6/T^1 \cdot SU(4)) = (\bar{p} \bmod \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \otimes 1.$$

- $g^\Theta = t^1 \oplus B_3$. Корни группы $T^1 \cdot SO(7)$: $\pm y_i \pm y_j, \pm y_i$. Дополняющие корни: a_i ($i \leq 5$), $c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, d_{16}, d_{123}, d_{124}, d_{135}, d_{145}$. Следовательно,

$$\bar{p} = (1 + d_{16}^2) \prod_{i \leq 5} (1 + a_i^2) \prod (1 + c_{1j}^2) \prod (1 + d_{1jk}^2)$$

и

$$p(E_6/T^1 \cdot SO(7)) = (\bar{p} \bmod \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \otimes 1.$$

- $g^\Theta = t^1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$. Корни группы $T^1 \cdot SU(2) \cdot SU(2) \cdot SU(2)$: $\pm 2y_1, \pm 2y_2, \pm 2y_3$. Дополняющие корни: a_i ($i \geq 2$), c_{ij} ($((i, j) \neq (2, 4))$), d_{ij}, d_{ijk} ($((i, j, k) \neq (4, 5, 6))$). Поэтому

$$\bar{p} = \prod_{i \geq 2} (1 + a_i^2) \prod_{(i,j) \neq (2,4)} (1 + c_{ij}^2) \prod (1 + d_{ij}^2) \prod_{(i,j,k) \neq (4,5,6)} (1 + d_{ijk}^2)$$

и

$$p(E_6/T^1 \cdot SO(7)) = (\bar{p} \bmod \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \otimes 1.$$

- $g^\Theta = t^1 \oplus A_1 \oplus A_2$. Корни группы $T^1 \cdot SU(2) \cdot SU(3)$: $\pm 2y_1, u_i - u_j, \pm 2y_3$. Дополняющие корни: $a_i, c_{ij} ((i, j) \neq (1, 5)), d_{16}, d_{25}, d_{ijk} (i < 3)$. Отсюда

$$\bar{p} = (1 + d_{16}^2)(1 + d_{25}^2) \prod (1 + a_i^2) \prod_{(i,j) \neq (1,5)} (1 + c_{ij}^2) \prod_{i < 3} (1 + d_{ijk}^2).$$

- $g^\Theta = t^1 \oplus C_2 \oplus A_1$. Корни группы $T^1 \cdot SO(4) \cdot SU(2)$: $\pm y_1 \pm y_2, \pm 2y_1, \pm 2y_2, \pm 2y_3$. Дополняющие корни: $a_i (i > 1), c_{1j}, d_{16}, d_{ijk}$. Отсюда

$$\bar{p} = (1 + d_{16}^2) \prod_{i \geq 2} (1 + a_i^2) \prod (1 + c_{1j}^2) \prod (1 + d_{ijk}^2).$$

- $g^\Theta = t^1 \oplus C_3$. Корни группы $T^1 \cdot SO(6)$: $\pm y_i \pm y_j, \pm 2y_i$. Дополняющие корни: a_i, d_{ijk} . Отсюда

$$\bar{p} = \prod (1 + a_i^2) \prod (1 + d_{ijk}^2).$$

- $g^\Theta = F_4$. Корни группы F_4 : $\pm y_i \pm y_j, \pm y_i, (\pm y_1 \pm y_2 \pm y_3 \pm y_4)/2$. Дополняющих корней нет, поэтому

$$p(E_6/F_4) = 1.$$

- $g^\Theta = A_3 \oplus A_1$. Корни группы $SU(4) \cdot SU(2)$: $y_i - y_j (i, j = \overline{1, 4}), \pm 2y_5$. Дополняющие корни: $a_4, a_5, a_6, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{23}, d_{ij}, d_{ijk} ((i, j, k) \neq (4, 5, 6))$. Отсюда

$$\bar{p} = (1 + c_{23}^2) \prod_{i \geq 4} (1 + a_i^2) \prod_{j \leq 4} (1 + c_{1j}^2) \prod (1 + d_{ij}^2) \prod_{(i,j,k) \neq (4,5,6)} (1 + d_{ijk}^2).$$

- $g^\Theta = A_2 \oplus A_2$. Корни группы $SU(3) \cdot SU(3)$: $y_i - y_j (i, j = \overline{1, 3}), y_k - y_l (k, l = \overline{4, 6})$. Дополняющие корни: $a_3, a_4, a_5, a_6, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{23}, c_{24}, d_{16}, d_{25}, d_{ijk} (i < 3)$. Отсюда

$$\bar{p} = (1 + d_{16}^2)(1 + d_{25}^2) \prod_{i \geq 3} (1 + a_i^2) \prod_{(i,j) \neq (1,5)} (1 + c_{ij}^2) \prod_{i < 3} (1 + d_{ijk}^2).$$

- $g^\Theta = A_1 \oplus B_3$. Корни группы $SU(2) \cdot SO(7)$: $\pm y_i \pm y_j, \pm y_i (i, j = \overline{1, 3}), \pm 2y_4$. Дополняющие корни: $a_2, a_3, a_4, a_5, c_{1j}, d_{16}, d_{1jk}$. Отсюда

$$\bar{p} = (1 + d_{16}^2) \prod_{i=2}^5 (1 + a_i^2) \prod (1 + c_{1j}^2) \prod (1 + d_{1jk}^2).$$

- $g^\Theta = C_4$. Корни группы C_4 : $\pm y_i \pm y_j, \pm 2y_i$. Дополняющие корни: d_{ijk} . Отсюда

$$\bar{p} = \prod (1 + d_{ijk}^2)$$

и

$$p(E_6/C_4) = (\bar{p} \bmod \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \otimes 1.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кац В. Г. Автоморфизмы конечного порядка полупростых алгебр Ли // Функцион. анализ и его прилож. 1969. Т. 3. № 3. С. 94–96.
- [2] Терзич С. Вещественные коомологии обобщенных симметрических пространств // Фундамент. и прикл. матем. 1998. Т. 4. № 3. С. 650–682.
- [3] Borel A., Hirzerbruch F. Characteristic classes and homogenous spaces I // Amer. J. Math. 1958. V. 80. P. 459–538.
- [4] Takeuchi M. On Pontrjagin classes of compact symmetric spaces // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. I. 1962. V. 9. P. 313–328.
- [5] Борель А. О коомологиях главных расслоенных пространств и однородных пространств компактных групп Ли // Расслоенные пространства и их приложения. М.: ИЛ, 1958. С. 163–246.
- [6] Ковальский О. Обобщенные симметрические пространства. М.: Мир, 1984.
- [7] Helgason S. Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces. New York–London: Acad. Press, 1978.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: sterzic@rc.pmf.cg.ac.yu

Поступило
06.02.1998
Исправленный вариант
14.09.1999