Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Антонов, И. А. Тюрина, А. П. Ческидов, Группы с малыми централизаторами, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 5, 643–655

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm528>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:14:57

УДК 512.54

ГРУППЫ С МАЛЫМИ ЦЕНТРАЛИЗАТОРАМИ

В. А. Антонов, И. А. Тюрина, А. П. Ческидов

Через $w(n)$ условимся обозначать количество множителей в представлении натурального числа n в виде произведения простых чисел. Если H – подгруппа конечной группы G , то $w(H) = w(|H|)$ и $v(G) = \max\{w(C(g)) \mid g \in G \setminus Z(G)\}$. В данной работе приводится полное описание групп без центра с условием $v(G) = 4$.

Библиография: 12 названий.

Через $w(n)$ условимся обозначать количество множителей в представлении натурального числа n в виде произведения простых чисел. Если H – подгруппа конечной группы G , то $w(H) = w(|H|)$ и $v(G) = \max\{w(C(g)) \mid g \in G \setminus Z(G)\}$.

В работах [1] и [2] описаны конечные неабелевы группы с условиями $v(G) = 2$ и $v(G) = 3$ соответственно. В предлагаемой работе исследуются группы без центра с условием $v(G) = 4$.

Напомним [3], что $\mathfrak{M}$ -группой называется неабелева группа, все собственные централизаторы в которой абелевы.

1. Неразрешимые группы. Обозначим через $l(p)$ число

$$l(p) = \begin{cases} \max\{w(p-1), w(\frac{p+1}{2})\}, & \text{если } p \equiv 1(4), \\ \max\{w(p+1), w(\frac{p-1}{2})\}, & \text{если } p \equiv -1(4). \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 1.1. В конечной простой группе G в том и только том случае выполняется условие $v(G) = 4$, когда либо $G \cong A_7$, либо $G \cong PSL(2, q)$, где $q \in \{2^4, 7^3, 5^2, p\}$, p – простое число со свойством $l(p) = 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если G является $\mathfrak{M}$ -группой, то в силу следствия 5.10 из [3] $G \cong PSL(2, 16)$. Пусть G не $\mathfrak{M}$ -группа. Так как $v(G) = 4$, то любой собственный централизатор в группе G является либо абелевой группой, либо $\mathfrak{M}$ -группой. Простые группы с таким свойством исследованы А. В. Васильевой [4]. Они исчерпываются группами $PSL(2, q)$, $q > 3$, $Sz(2^{2n+1})$, $PSL(3, q)$, $q > 2$, $PSU(3, q^2)$, $q > 2$, J_1 , M_{11} и A_7 . Группы $Sz(2^{2n+1})$, $PSL(3, q)$, $q > 2$, $PSU(3, q^2)$, $q > 2$, J_1 и M_{11} не удовлетворяют условию $v(G) = 4$.

Пусть $G \cong PSL(2, p^n)$. Так как G не $\mathfrak{M}$ -группа, то $p > 2$ и $p^n \neq 5$. Максимальные централизаторы группы $PSL(2, p^n)$ исчерпываются силовскими p -подгруппами, циклическими подгруппами порядка $(p^n + 1)/2$, если $p^n \equiv 1(4)$ ($(p^n - 1)/2$, если $p^n \equiv -1(4)$),

и группами диэдра порядка $(p^n - 1)$ и $(p^n + 1)$ соответственно. Поэтому $n < 4$ и при $n = 1$ должно выполняться равенство $l(p) = 4$.

Если $n = 2$, то $p^2 - 1 = 8 \cdot (p^2 - 1)/8$. Так как $v(PSL(2, 9)) = 3$, то $p \neq 3$. А если $p > 5$, то $w(p^2 - 1) > 4$. Поэтому $p = 5$.

Предположим теперь, что $n = 3$. И пусть $p^3 \equiv 1(4)$. Тогда

$$p^3 - 1 = 4 \cdot \frac{p-1}{4} (p^2 + p + 1).$$

Если $p \equiv 1(3)$, то $w(p^3 - 1) > 4$. Поэтому $p \equiv -1(3)$. Но тогда $p + 1$ и $p^2 - p + 1$ делятся на 3, т.е.

$$\frac{p^3 + 1}{2} = 9 \cdot \frac{p+1}{6} \cdot \frac{p^2 - p + 1}{3}.$$

Если $p = 5$, то $w(p^3 - 1) = w((p^3 + 1)/2) = 3$, т.е. $p > 5$. Так как $|PSL(2, p^3)| = p^3(p^6 - 1)/2$, то $|G|$ делится на 7. Если $(p - 1)/4 = 7$, то $p = 29$. Но тогда $w((p^3 + 1)/2) > 4$. Случай $(p + 1)/2 = 7$ невозможен, как невозможны и случаи $p^2 + p + 1 = 7$ или $(p^2 - p + 1)/3 = 7$, т.е. случай $p^3 \equiv 1(4)$ невозможен. Рассматривая аналогично случай $p^3 \equiv -1(4)$, получим, что $p = 7$.

Пользуясь случаем, отметим, что при доказательстве теоремы 4.1 из [2] были утеряны группы $PSL(2, 3^3)$ и $PSL(2, 5^3)$, удовлетворяющие условию $v(G) = 3$.

ТЕОРЕМА 1.2. *В конечной непростой неразрешимой группе G с тривиальным центром в том и только том случае выполняется условие $v(G) = 4$, когда G — одна из следующих групп:*

- 1) $G \cong PGL(2, q)$, $q \in \{5^3, 3^3, 5^2, 3^2, p\}$, где p — простое число со свойством $l(p) = 3$;
- 2) $G \cong PSL(2, q) \rtimes \langle \tau \rangle$, где $q \in \{2^3, 3^2, 3^3\}$, τ — нетождественный автоморфизм поля $GF(q)$;
- 3) G обладает нормальной самоцентрализованной элементарной абелевой подгруппой H порядка 5^3 , $G/H \cong PSL(2, 5)$ и между множествами неединичных циклических подгрупп групп H и G/H существует такое взаимно однозначное соответствие φ , что $C(a)/H = \langle a \rangle^\varphi$ для всех $a \in H \setminus 1$;
- 4) $G = H \rtimes PSL(2, 5)$, H — элементарная абелева группа порядка p^3 , $p \equiv \pm 1(10)$, и $PSL(2, 5)$ действует на H естественным образом (вложение $PSL(2, 5)$ в группу $GL(3, p)$ при $p \equiv \pm 1(10)$ в явном виде описано в работе [5]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — группа из условия теоремы, H — минимальный нормальный делитель группы G .

Предположим сначала, что H неабелев. Тогда H — простая группа и $v(H) \leq 4$. В силу [1], [2], теоремы 1.1 и замечания, сделанного после этой теоремы, H изоморфна одной из групп $PSL(2, q)$, $q \in \{2^4, 7^3, 5^3, 3^3, 2^3, 5^2, 3^2, p\}$, где p — простое число со свойством $l(p) \leq 4$, или A_7 .

Так как $v(G) = 4$, то H — единственный минимальный нормальный делитель группы G и $C(H) = 1$. Но тогда $G \leq \text{Aut}(H)$. Из $\text{Aut}(A_7) = S_7$ и $v(A_7) = 5$ следует, что $H \not\cong A_7$. Как известно, $\text{Aut}(PSL(2, p^n)) = PGL(2, p^n) \rtimes \langle \tau \rangle$, где τ — автоморфизм поля, $|\tau| = n$.

Если $H = PSL(2, 16)$, то из $|\text{Aut}(H)| = 4|H|$ следует, что $|S_2(G)| > 2^4$, что невозможно. Пусть $H = PSL(2, 9)$. Так как $|S_2(\text{Aut}(H))| = 32$, то $G < \text{Aut}(H)$. Поэтому либо $G = PGL(2, 9)$, либо $G = PSL(2, 9) \rtimes \langle \tau \rangle$. Аналогично, если $H = PSL(2, 25)$, то $G < \text{Aut}(H)$. Если $\tau \in G$, то $C(\tau) \geq \langle \tau \rangle \times PSL(2, 5)$, т.е. $w(C(\tau)) > 4$. Следовательно, $G = PGL(2, 25)$.

Пусть $H = PSL(2, p^3)$, $p \in \{3, 5, 7\}$. Если $G = \text{Aut}(H)$, то из $C(\tau) \geq \langle \tau \rangle \times PGL(2, p)$ получаем противоречие с условием $v(G) = 4$. Если $G = PGL(2, p^3)$, то $p \neq 7$, так как $|S_2(PGL(2, 7^3))| = 32$. Наконец, если $G = PSL(2, p^3) \rtimes \langle \tau \rangle$, то из $C(\tau) \geq \langle \tau \rangle \times PSL(2, p)$ следует, что $p = 3$.

Предположим теперь, что $H = PSL(2, p)$. Тогда $G = PGL(2, p)$. В этом случае $v(G) = v(H) + 1$, т.е. $v(H) = 3$ и p удовлетворяет ограничению из пункта 1) теоремы.

Пусть теперь H – элементарная абелева группа порядка p^n . Так как $C(H)$ разрешима, а G неразрешима, то $n > 1$. Кроме того, $n \leq 4$.

В дальнейшем мы неоднократно будем использовать лемму 0.5 из [6] и то, что в регулярной группе автоморфизмов любая подгруппа порядка pq циклическая (см. V. 8.12 из [7]).

Если $n = 4$, то $p \neq 2$. Так как силовская 2-подгруппа S_2 группы G не является ни циклической ни кватернионной группой (см. [8]), то S_2 действует на H нерегулярно. Но тогда $w(C(a)) > 4$ для некоторого $a \in H \setminus 1$.

Предположим теперь, что $n = 2$. Тогда $G/C(H) \leq GL(2, p)$ и снова $p \neq 2$. Так как $G/C(H)$ неразрешима, то и $K/C(H) = (G/C(H))'$ тоже неразрешима. Но тогда силовская 2-подгруппа в $K/C(H)$, будучи подгруппой силовской 2-подгруппы $SL(2, p)$, является либо циклической, либо кватернионной группой. Так как G не может содержать инвариантных 2-подгрупп порядка 2 или 4, то $S_2 \cap C(H) = 1$. Но тогда $S_2(K)$ либо циклическая, либо кватернионная группа. Из неразрешимости K следует, что $S_2(K)$ не может быть циклической. Если же $S_2(K)$ кватернионная и τ – инволюция из $S_2(K)$, то в силу [8] $C(\tau) \geq K$, что противоречит условию $v(G) = 4$.

Итак, $n = 3$. Так как G/H неразрешима, то $p > 2$. Отметим еще, что все минимальные централизаторы группы G , лежащие в H , имеют порядок p . В самом деле, если A – минимальный централизатор порядка p^2 и $g \in G$, то из $A \cap A^g \neq 1$ и минимальности A следует, что $A^g = A$, т.е. $A \triangleleft G$, что противоречит минимальности H . Как и выше, S_2 действует на H нерегулярно, т.е. $C(a_1) = H \rtimes \langle \tau_1 \rangle$ для некоторого $a_1 \in H$ и инволюции τ_1 . Так как $H \cap C(\tau_1)$ является минимальным централизатором, то $H \cap C(\tau_1) = \langle a_1 \rangle$.

Предположим сначала, что $\tau_1 \in Z(S_2)$. Тогда $C(\tau_1) \geq \langle a_1 \rangle \rtimes S_2$ и $S_2/\langle \tau_1 \rangle$ циклическая группа. Поэтому $S_2 = \langle \tau_1 \rangle \times \langle f \rangle$ абелева.

Так как $\langle a_1 \rangle$ нормализуется S_2 , то $H = \langle a_1 \rangle \rtimes A$ и A нормализуется S_2 . Снова S_2 действует на A нерегулярно и $C(a_2) = H \rtimes \langle \tau_2 \rangle$ для некоторых $a_2 \in H$ и инволюции τ_2 из S_2 . Из $C(\tau_2) \geq \langle a_2 \rangle \rtimes S_2$ получаем, что $S_2/\langle \tau_2 \rangle$ циклическая, т.е. $S_2 = \langle \tau_1 \rangle \times \langle \tau_2 \rangle$. Отметим еще, что если элемент a_3 выбран так, что $A = \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle$ и $\langle a_3 \rangle$ инвариантна относительно S_2 , то $C(a_3) = H \rtimes \langle \tau_1 \tau_2 \rangle$.

Пусть теперь $\tau_1 \notin Z(S_2)$. Тогда $C(\tau_1) \geq \langle a_1 \rangle \rtimes (\langle \tau_1 \rangle \times Z(S_2))$ и из циклическости $\text{Aut}(\langle a_1 \rangle)$ следует, что $Z(S_2)$ циклический. Заменяя в рассуждениях предыдущего абзаца группу S_2 на группу $\langle \tau_1 \rangle \times \langle \tau \rangle$, где τ – инволюция из $Z(S_2)$, мы получим, что $C(a) = H \rtimes \langle \tau \rangle$ для некоторого элемента $a \in H$, и остается заменить τ_1 на τ .

Итак, мы показали, что

$$S_2 = \langle \tau_1 \rangle \times \langle \tau_2 \rangle, \quad H = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle,$$

S_2 нормализует $\langle a_i \rangle$ и $C(a_i) = H \rtimes \langle \tau_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$, где $\tau_3 = \tau_1 \tau_2$.

Число элементов, сопряженных с a_1 , равно $|G|/|C(a_1)| = |G|/2p^3$ и не превосходит $p^3 - 1$. Поэтому $|G| \leq 2p^3(p^3 - 1)$. Отсюда $|G/H| \leq 2(p^3 - 1)$. Так как любая группа порядка меньше 60 разрешима, то $p > 3$.

Пусть x — элемент взаимно простого с числом p порядка, $g \in G$ и $[x, g] \in H$. Тогда $x^g \in \langle x \rangle H$. Так как в $\langle x \rangle H$ все холловы p' -подгруппы сопряжены, то $\langle x^g \rangle = \langle x^a \rangle$ для некоторого $a \in H$. Отсюда $x^g = (x^a)^a$ и из $[x, g] = x^{-1}a^{-1}x^a a = x^{a-1}[x^a, a] \in H$ следует, что $x^{a-1} \in H$, т.е. $a = 1$. Но тогда $x^g = x^a$ и $g \in C(x)H$, т.е. $C_G/H(xH) = C(x)H/H$. Это означает, в частности, что если K — такая p' -подгруппа группы G , что для любого элемента h простого порядка из K выполняется включение $C(h) \leq K \cdot H$, то $(K \cdot H)/H$ сильно изолирована в G/H .

Если для любой инволюции $\tau_i \in S_2$ выполняется равенство $C(\tau_i) = \langle a_i \rangle \rtimes S_2$, то $(S_2 H)/H$ сильно изолирована в G/H .

Пусть $C(\tau) > \langle a \rangle \rtimes S_2$ для некоторой инволюции $\tau \in S_2$. Тогда $C(\tau) = \langle a \rangle \rtimes K$ и из цикличности $K/\langle \tau \rangle \leq \text{Aut}(\langle a \rangle)$ следует, что K абелева, т.е. $K = S_2 \times \langle b \rangle$, $|b| = q$ — простое число. Если $C(b) = K$, то подгруппа $(K \cdot H)/H$ сильно изолирована в G/H .

Предположим теперь, что $C(b) > K$. Если $C(b) \cap H \neq 1$, то $C(b) \cap H$ нормализуется S_2 . Но тогда $C(C(b) \cap H) \ni \tau_i$ для некоторого $i = 1, 2, 3$ и $C(a_i) \geq \langle H, \tau_i, b \rangle$, что невозможно. Поэтому $C(b) \cap H = 1$. Следовательно, $C(\tau) \cap C(b) = K$. Так как $|C(b)/\langle b \rangle| = 4r$ для некоторого простого числа r , то S_2 инвариантна в $C(b)$ и $r = 3$.

Если $C(b) = S_2 \rtimes \langle x \rangle$, $x^9 = 1$, $x^3 = b$, то элементы простого порядка из $C(b)$ исчерпываются инволюциями из S_2 и элементами, сопряженными с b и b^2 , т.е. $C(b)H/H$ сильно изолирована в G/H .

Пусть $C(b) = (S_2 \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $x^3 = 1$. Тогда можно считать, что $\tau_1^x = \tau_2$, $\tau_2^x = \tau_1 \tau_2$. Из $C(\tau_i^x) = C(\tau_i)^x$ следует, что $a_1^x = a_2^{t_1}$, $(a_2^{t_1})^x = a_3^{t_2}$ и $(a_3^{t_2})^x = a_1$ для некоторых чисел t_1, t_2 . Но тогда $a = a_1 a_2^{t_1} a_3^{t_2} \in C(x)$, т.е. $C(x) \geq \langle a \rangle \rtimes (\langle b \rangle \times \langle x \rangle)$. Из доказанного, в частности, следует, что для любого элемента x порядка 3 из $N(S_2)$ выполняется $C(x) \cap H \neq 1$.

Положим $C(x) = \langle a \rangle \rtimes R$, $b \in R$. Так как $R/\langle x \rangle \leq \text{Aut}(\langle a \rangle)$, то R абелева. Но тогда $R \leq C(x) \cap C(b) = \langle b \rangle \times \langle x \rangle$, т.е. $C(x) = \langle a \rangle \rtimes (\langle b \rangle \times \langle x \rangle)$. А это, как нетрудно видеть, означает, что $C(b)H/H$ сильно изолирована в G/H .

Итак, мы показали, что в фактор-группе G/H есть сильно изолированная подгруппа четного порядка. По [9] G/H изоморфна либо $PSL(2, 2^n)$, либо $Sz(2^{2n+1})$ для некоторого числа n . Так как $|S_2| = 4$, то $G/H \cong PSL(2, 4) \cong PSL(2, 5)$.

Предположим сначала, что $p > 5$. Тогда $G = H \rtimes K$, где $K \cong PSL(2, 5)$. Группа $PSL(2, 5)$ содержит 15 подгрупп порядка 2, 10 подгрупп порядка 3 и 6 подгрупп порядка 5. Из проведенных выше рассуждений следует, что для любого элемента $x \in K$ порядка 2 или 3 выполняется равенство $|H \cap C(x)| = p$. Заметим, что для $a \in H$ и $x \in K$ из $C(x^a) = C(x)^a$ следует $C(x) \cap H = C(x^a) \cap H$. Поэтому для $g = ha$, $h \in K$, имеем $C(x^g) \cap H = C(x^h) \cap H$.

Если для элемента y порядка 5 выполняется равенство $|H \cap C(y)| = 1$, то среди неединичных элементов H содержится $25(p-1)$ элементов со свойством $C(x) > H$

и $p^3 - 1 - 25(p - 1)$ элементов x со свойством $C(x) = H$. Так как $|G/H| = 60$, то $p^3 - 1 = 25(p - 1) + 60t$ для некоторого числа $t > 0$. Но тогда $p^3 - 1$, а следовательно, и $p - 1$ делится на 10.

Если же для элемента y порядка 5 выполняется равенство $|H \cap C(y)| = p$, то аналогично получим $p^3 - 1 = 31(p - 1) + 60t$, $t > 0$. Из $(p - 1)(p^2 + p - 30) = 60t$ следует, что либо $p - 1$, либо $p + 1$ делится на 10.

В случае $p = 5$, как нетрудно видеть, для любого $x \in H \setminus 1$ $C(x)/H$ является группой простого порядка, и если $C(x) = C(y)$ для $x, y \in H$, то $\langle x \rangle = \langle y \rangle$, т.е. G -группа типа 3), и теорема доказана.

2. Разрешимые группы. Рассмотрим теперь случай разрешимой группы G . В этом случае, если $F = F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G , то $C(F) \leq F$ (см. [7, III.4.2]). Поэтому $w(F) \leq 4$.

Число неизоморфных групп в этом случае весьма велико. Поэтому мы не будем доводить до полного описания, предполагая, что группы, заданные данными отношениями, существуют. Так, например, если сказано, что $\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$ – группа Фробениуса, то это предполагает, что $|b|$ делит $|a| - 1$ и $\langle b \rangle$ действует на $\langle a \rangle$ регулярно. Все числа p, q, p_i, q_i, r и т.д. являются простыми числами.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть G – конечная разрешимая группа без центра, $v(G) = 4$ и G не является $\mathfrak{M}$ -группой. Подгруппа F абелева тогда и только тогда, когда выполняется один из следующих случаев:

1. $G = F \rtimes K$ – группа Фробениуса, F – абелева типа (p, p) , (p, p, p) , (p, p, q, q) , (p^2, p^2) , K – одна из следующих групп: Q_8 ; Q_{16} ; $Q_8 \times \langle a \rangle$ или $\langle a \rangle \rtimes Q_8$, $|a| = q \neq 2$; $Q_8 \rtimes \langle a \rangle$, $a^3 = 1$; $\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, при этом либо $|a| = p_1$, $|b| = q_1^2 s$, $s = 1$ или s – простое число, $[a, b] \neq 1$, $[a, b_1^q] = 1$, либо $|a| = p_1 p_2$, $|b| = q_1^2$, $[a, b] \neq 1$, $[a, b_1^q] = 1$, $(|a|, |b|) = 1$ и $\max\{w(F), w(K)\} = 4$;
2. $G = G_1 \times G_2$, G_1 и G_2 – группы Фробениуса порядков $p_1 p_2$ и $q_1 q_2 q_3$ соответственно;
3. $G = (\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $b_1^p = b_2^q = 1$, $w(|c|) = 3$, $\max_{b \in F \setminus 1} w(C(b) \cap \langle c \rangle) = 1$ или 2, $C(b_1) \cap C(b_2) = F$;
4. $G = F \rtimes \langle c \rangle$, $w(F) = 3$, $w(|c|) = 2$ или 3, $\max_{b \in F \setminus 1} w(C(b) \cap \langle c \rangle) = 1$, $C(b_1) \cap C(b_2) = F$ для некоторых $b_1, b_2 \in F$;
5. $G = (\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle) \rtimes (\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle)$, $b_1^p = b_2^p = a_1^q = a_2^{q^r}$, $q \neq r$, $[a_1, b_1] = [a_2^r, b_2] = 1$, $[a_2, b_2] \neq 1$, $\langle b_1 \rangle \rtimes \langle a_2 \rangle$ и $\langle b_2 \rangle \rtimes \langle a_1 a_2^q \rangle$ – группы Фробениуса;
6. $G = (\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle) \rtimes ((\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle) \rtimes \langle \tau \rangle)$, $b_1^p = b_2^p = \tau^2 = a_1^q = a_2^{q^r} = 1$, $a_2^r = a_2$, $b_1^r = b_2$, $a_1^r = a_1^{-1} a_2^r$, $[a_1, b_1] = 1$, $\langle a_1 \rangle$ на $\langle b_2 \rangle$ и $\langle a_2 \rangle$ на $\langle b_1 \rangle$ и $\langle b_2 \rangle$ действуют регулярно;
7. $G = (\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle) \rtimes (\langle a \rangle \rtimes \langle \tau \rangle)$, $b_1^p = b_2^p = \tau^2 = 1$, $b_1^r = b_2$, $a^r = a^p$, $\langle a \rangle$ действует на $(\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle)$ неприводимо, $w(|a|) = 4$, если $(|a|, p - 1) = 1$, и $w(|a|) = 3$ в противном случае;
8. $F = (\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle)$, $b_1^3 = b_2^3 = 1$, $G/F \cong SL(2, 3)$ и действует на F естественным образом;
9. $G = (\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle) \rtimes (\langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle)$, $b_1^p = b_2^p = x^{q^2} = 1$, $w(|y|) = 2$ или 3, $[x^q, b_i] = 1$, $i = 1, 2$, $\langle x \rangle$ действует на $\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$ неприводимо, $\langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle$ – группа Фробениуса, $\max_{i=1,2} w(C(b_i) \cap \langle y \rangle) = 1$, $C(b_1) \cap C(b_2) = \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times \langle x^q \rangle$;

10. $G = (\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times \langle c \rangle) \rtimes (\langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle)$, $b_1^p = b_2^p = c^q = x^r = 1$, $|y| = t^2 s$, t – простое число, s либо равно 1, либо простое число, $c^x = c$, $\langle c \rangle \rtimes \langle y \rangle$ и $(\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle) \rtimes (\langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle)$ группы Фробениуса, $C(x) \cap \langle y \rangle$ равно либо $\langle y^t \rangle$, либо $\langle y^{t^2} \rangle$, причем последнее возможно только при $s = t$;
11. $G = (\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times \langle c \rangle) \rtimes (\langle a \rangle \rtimes \langle \tau \rangle)$, $b_1^p = b_2^p = c^q = x^r = \tau^2 = 1$, r – нечетный простой делитель числа $p + 1$, $\langle a \rangle$ действует на $\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$ неприводимо, $c^a = c$, $c^\tau = c^{-1}$, $b_1^\tau = b_2$;
12. $G = (\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times \langle b_3 \rangle) \rtimes (\langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle)$, $b_1^p = b_2^p = b_3^p = y^3 = 1$, $[b_1, y] = 1$, $(\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times \langle b_3 \rangle) \rtimes \langle x \rangle$ и $(\langle b_2 \rangle \times \langle b_3 \rangle) \rtimes \langle y \rangle$ группы Фробениуса, $|x|$ делит $p^3 - 1$ и не делит $p - 1$; если $(|x|, p - 1) = 1$, то $w(|x|) \leq 4$, иначе $w(|x|) \leq 3$, $x^y = x^p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – группа из условия теоремы. Предположим сначала, что $G = F \rtimes K$ – группа Фробениуса. Если K абелева, то по теореме 5.12 из [3] G является $\mathfrak{M}$ -группой. Поэтому K неабелева. Из описания разрешимых групп регулярных автоморфизмов (см., например, [10], § 6) и условия $v(G) = 4$ получаем группы из пункта 1 теоремы.

Пусть теперь G не является группой Фробениуса. Тогда найдутся неединичные элементы $b \in F$ и $g \in G \setminus F$ со свойством $[b, g] = 1$. Поэтому $w(F) \leq 3$. Так как $F = C(F)$, $Z(G) = 1$ и G/F действует на F нерегулярно, то $w(F) \geq 2$. Рассмотрим случай $w(F) = 2$. Если $F = \langle b \rangle$ – циклическая, то $G = \langle b \rangle \rtimes \langle x \rangle$ для некоторого элемента $x \in G$, и из $Z(G) = 1$ получаем $G = \langle b \rangle \rtimes \langle x \rangle$. Пусть $|b| = p^2$. Так как $\langle x \rangle$ действует на $\langle b \rangle$ нерегулярно, то $(|x|, p) \neq 1$. Но тогда $S_p(G) \triangleleft G$ и $S_p(G) > F$, что невозможно. Поэтому $F = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $a^p = b^q = 1$. Если $p \neq q$, то снова $G = \langle ab \rangle \rtimes \langle x \rangle$ и мы получим группу типа 2 или 3.

Пусть теперь $F = \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$ – элементарная абелева группа порядка p^2 . Тогда $G/F \leq \text{Aut}(F) = GL(2, p)$. Из $v(G) \neq 3$ следует, что $p > 2$. Так как группа G разрешима, то G/F содержится в максимальной разрешимой подгруппе группы $GL(2, p)$.

Максимальные разрешимые подгруппы группы $GL(2, p)$ известны ([11, § 21]). В частности, если $p > 3$ и H – максимальная разрешимая подгруппа из $GL(2, p)$, то при соответствующем выборе базиса выполняется один из следующих случаев:

- если H приводима, то она является треугольной группой (в частности, силовская p -подгруппа из H инвариантна в H);
- если H неприводима и импримитивна, то

$$H = (\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle) \rtimes \langle \tau \rangle, \quad a_1^{p-1} = a_2^{p-1} = \tau^2 = 1, \quad a_1^\tau = a_2;$$

- если H неприводима и примитивна, то либо

$$H = \langle a \rangle \rtimes \langle \tau \rangle, \quad a^{p^2-1} = \tau^2 = 1, \quad a^\tau = a^p,$$

либо

$$H/Z \cong (\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle) \rtimes GL(2, 2), \quad Z = Z(GL(2, p)), \quad a_1^2 = a_2^2 = 1,$$

и $GL(2, 2)$ действует на $\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$ естественным образом.

Предположим сначала, что G/F приводима. Так как силовская p -подгруппа в G/F инвариантна, то $(|G/F|, p) = 1$, т.е. $G = F \rtimes K$, где K изоморфна подгруппе группы диагональных матриц. Если K циклическая, то снова получим группу типа 2 или 3. Если же K не циклическая, то из циклическости фактор-групп $G/C(b_1)$ и $G/C(b_2)$ следует, что G группа типа 2 или типа 5.

Если G/F неприводима, то $G = F \rtimes K$, где K – неприводимая разрешимая подгруппа из $GL(2, p)$. Если K импримитивна, то из неприводимости ее и условия $v(G) = 4$ следует, что G – группа типа 6.

Пусть теперь K примитивна и $K \leq \langle a \rangle \rtimes \langle \tau \rangle$, $a^{p^2-1} = \tau^2 = 1$. Так как $\langle a \rangle$ действует на F регулярно, то можно считать, что $\tau \in K$ и мы получаем группу типа 7.

Наконец, пусть $G = F \rtimes K$ и K содержится в подгруппе H из $GL(2, p)$ со свойством $H/Z = (\langle \bar{a}_1 \rangle \times \langle \bar{a}_2 \rangle) \rtimes GL(2, 2)$. Так как K примитивна, то по лемме 21.5 из [11] KZ/Z содержит элемент порядка 3. Но тогда

$$KZ/Z = (\langle \bar{a}_1 \rangle \times \langle \bar{a}_2 \rangle) \rtimes \langle \bar{c} \rangle, \quad \bar{c}^3 = 1, \quad \bar{a}_1 \bar{c} = \bar{a}_2, \quad \bar{a}_2 \bar{c} = \bar{a}_1 \bar{a}_2.$$

Так как $[a_1, a_2]$ – элемент порядка 2 из Z , то $|\langle a_1, a_2 \rangle| \geq 8$. Если $|\langle a_1, a_2 \rangle| > 8$, то $w(K \cap Z) > 1$. Но тогда для $x \in (K \cap Z) \setminus 1$ будем иметь $w(C(x)) > 4$, что невозможно. Поэтому $\langle a_1, a_2 \rangle$ может быть только группой кватернионов порядка 8.

Итак, $G = F \rtimes (\langle a_1, a_2 \rangle \rtimes \langle c \rangle)$. Так как $a_1^2 \in Z$, то a_1^2 , а следовательно, и $\langle a_1, a_2 \rangle$ действуют на F регулярно. Поэтому $C(c) \cap F \neq 1$. Положим $[b_1, c] = 1$. Так как $a_1^2 \in N(\langle c \rangle)$, то $a_1^2 \in N(\langle b_1 \rangle)$. Пусть $F = \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$, где $\langle b_2 \rangle = [F, a_1^2 c]$. Тогда $b_2^c = b_2^\alpha$, $\alpha^3 = 1$, $b_i^{a_1^2} = b_i^{-1}$. То есть мы можем отождествить a_1^2 и c с матрицами $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ соответственно. Но тогда если $a_1 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, то $a_2 = a_1^c = \begin{pmatrix} x & \alpha y \\ \alpha z & t \end{pmatrix}$, что невозможно, так как в этом случае $[a_1, a_2] \neq a_1^2$.

Если же $p = 3$, то G/F является подгруппой группы $GL(2, 3)$. Из $v(G) = 4$ следует, что $G/F < GL(2, 3)$. Если $(|G/F|, p) = 1$, то мы получим группу типа 7. А если G/F содержит 3-элемент, то группу типа 8.

Предположим теперь, что $w(F) = 3$. Если G/F циклическая, то снова $G = F \rtimes \langle x \rangle$ и получим группу типа 4. Пусть G/F – нециклическая группа. Тогда и группа F тоже нециклическая. Предположим, что

$$F = \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times \langle c \rangle, \quad b_1^p = b_2^p = c^q = 1,$$

где p и q различные простые числа. Так как G/F нециклическая, то $C(c) > F$. Положим $C(c) = F \langle x \rangle$. Тогда $x^r \in F$ для некоторого простого числа r и $G/C(c)$ циклическая группа.

Если $\langle b_1 \rangle \triangleleft G$, то $\langle b_1 c \rangle \triangleleft G$ и $G/C(b_1 c)$ циклическая. Но тогда из $C(b_1 c) \leq C(c)$ следует $C(b_1) = C(c)$. Если $r \neq p$, то можно считать, что $\langle b_2 \rangle \triangleleft G$. Но тогда снова $C(b_2) = C(c)$ и $C(F) = C(c) > F$, что невозможно. Если же $r = p$, то $C(b_1)$ – нильпотентная нормальная подгруппа, что тоже невозможно. Поэтому $\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$ – минимальный нормальный делитель группы G и $C(bc) = F$ для любого неединичного p -элемента b из F .

Предположим сначала, что G/F абелева, т.е. $G/F = \langle \bar{x} \rangle \times \langle \bar{y} \rangle$. Из нециклическости G/F следует, что $|\bar{y}|$ делится на $|r|$. Из $v(G) = 4$ следует, что $p \neq r \neq q$. Так как для любого неединичного p -элемента b из F $C(b) \triangleleft G$, то и $C^2(b) \triangleleft G$. По уже доказанному

$C^2(b) \geq \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$, т.е. $C(b) = C(\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle)$. Пусть $\bar{y}_0$ – элемент порядка r из $\langle \bar{y} \rangle$. Так как $\langle \bar{x} \rangle \times \langle \bar{y}_0 \rangle$ – нециклическая абелева группа, то она действует на $\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$ не регулярно, т.е. можно считать, что $y_0 \in C(b_1) = C(\langle b_1, b_2 \rangle)$. Из $C(y_0) \geq \langle x, y, b_1, b_2 \rangle$ следует, что G – группа типа 2.

Пусть теперь $G/F = \langle \bar{x} \rangle \rtimes \langle \bar{y} \rangle$ неабелева. Так как $\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$ минимальный нормальный делитель группы G , то $G/C(\langle b_1, b_2 \rangle)$ действует на $\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$ неприводимо. Предположим сначала, что $p > 3$. Из приведенного выше описания максимальных неприводимых разрешимых подгрупп группы $GL(2, p)$ следует, что в этом случае $(|G/C(\langle b_1, b_2 \rangle)|, p) = 1$. Поэтому либо $\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$ – силовская p -подгруппа группы G , либо $C(\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle) = F\langle t \rangle$, $t^p \in F$. Рассмотрим второй случай. Мы можем считать, что $t \in \langle y \rangle$.

Пусть $H = \langle C(b_1), C(c) \rangle$. Тогда $H/F = \langle \bar{x} \rangle \times \langle \bar{t} \rangle$ – абелева группа. Так как $r \neq p$, то H/F циклическая. Из $Z(H) = 1$ следует, что $H = F \rtimes \langle xt \rangle$, т.е. $x \in C(t)$. Но тогда, рассматривая $C(t)$, как и выше получим $y = t$, что противоречит неабелевости G/F .

Итак, мы можем считать, что $\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$ – силовская p -подгруппа группы G . Но тогда

$$G = (\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle) \rtimes (\langle c, x \rangle \rtimes \langle y \rangle).$$

Предположим, что $\langle c, x \rangle = \langle x \rangle$ – циклическая группа порядка q^2 . Тогда $\langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle$ – группа Фробениуса. Так как подгруппа $(\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle) \rtimes \langle x \rangle$ не нильпотентна, то $\langle y \rangle$ действует на ней нерегулярно. Поэтому можно считать, что $C(b_1) \cap \langle y \rangle = \langle y_0 \rangle \neq 1$. Отсюда $w(|y|) \leq 3$.

Если $C(b_2) = C(b_1)$, то подгруппа

$$\langle c \rangle \rtimes \langle y_0 \rangle = C(\langle b_1, b_2 \rangle) \cap (\langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle)$$

нормальна в $\langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle$, т.е. $[x, y_0] \leq \langle c \rangle$. Из $\langle x \rangle = [\langle x \rangle, \langle y_0 \rangle] \times C_{\langle x \rangle}(y_0)$ следует, что $[x, y] = 1$, что невозможно. Поэтому $C(b) \neq C(b_1)$ для любого $b \in (\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle) \setminus \langle b_1 \rangle$. Если $C(b_2) \cap \langle y \rangle = \langle y_1 \rangle$, то $\langle y_0 \rangle \cap \langle y_1 \rangle = 1$ и мы получаем группу типа 9.

Предположим теперь, что $\langle c, x \rangle = \langle c \rangle \times \langle x \rangle$. Как и в предыдущем случае, $C(b_1) \neq C(b_2)$. Если $\langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle$ действует на $\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$ регулярно, то получим группу типа 10. Если же $\langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle$ действует на $\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$ нерегулярно, то, применяя к подгруппе $H = (\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle) \rtimes (\langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle)$ проведенные выше рассуждения о неприводимых разрешимых подгруппах из $GL(2, p)$, получим, что H может быть только группой типа 7 при $x = a$, т.е. G – группа типа 11.

Предположим теперь, что $p \leq 3$. Если $(|G/F|, p) = 1$, то новых групп не появится. Пусть $(|G/F|, p) \neq 1$. Если при этом $r \neq p$, то $r - 1$ делится на p , а

$$|GL(2, p)| = p(p-1)^2(p+1)$$

делится на r . Это возможно только при $p = 2$ и $r = 3$. Но тогда если $C(\langle b_1, b_2 \rangle) = F$, то G – группа типа 11. Если же $C(\langle b_1, b_2 \rangle) > F$, то фактор-группа G/F будет абелевой. В случае $r = p$ подгруппа $C(c)$ является нильпотентной нормальной подгруппой группы G , что невозможно.

Пусть теперь $F = \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$, где $b_1^{p^2} = b_2^p = 1$. Так как $\langle b_1^p \rangle \triangleleft G$, то и $C(\langle b_1^p \rangle) \triangleleft G$. Поэтому F – силовская p -подгруппа группы G и $G = F \rtimes K$. Если группа K циклическая, то G – группа типа 2 или 4.

Пусть K нециклическая. Тогда $C(b_1^p) > F$. Так как для любого элемента $t \in K \setminus 1$ выполняется равенство $F = [F, t] \times C_F(t)$, то $C_F(t)$ либо равен 1, либо является максимальной циклической подгруппой из F . Поэтому $C(b_1^p) = C(b_1)$. Из циклическости фактор-группы $G/C(b_1^p)$ следует, что $G = F \ltimes (\langle x \rangle \ltimes \langle y \rangle)$, $x^q = 1$, $[b_1, x] = 1$. Так как $C(b_1) \triangleleft G$, то $\langle b_1 \rangle = C^2(b_1) \triangleleft G$ и, следовательно, можно считать, что $\langle b_2 \rangle \triangleleft G$, т.е. $G/C(b_2)$ циклическая. Поэтому $K = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$ – нециклическая абелева группа. Из $w(C(x)) \leq 4$ получаем $w(K) = 2$. Но тогда G – группа типа 2.

Наконец, рассмотрим случай, когда $F = \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times \langle b_3 \rangle$ – элементарная абелева группа порядка p^3 . Тогда G/F изоморфна разрешимой подгруппе из $GL(3, p)$. Если G/F циклическая, то G – группа типа 2 или 4. Если G/F приводима, то, повторяя рассуждения, проведенные в случае $|F| = p^2q$, получим либо группу типа 2, либо группу типа 11 при $p = q$. Поэтому будем считать, что G/F неприводима.

Предположим сначала, что $p > 3$. Строение максимальных неприводимых разрешимых подгрупп группы $GL(3, p)$ известно (теорема 21.6 из [11]). В силу этой теоремы $(|G/F|, p) = 1$ и $G = F \ltimes K$. Если K импримитивна, то K является подгруппой сплетения циклической группы порядка $(p-1)$ и симметрической группы S_3 . Но тогда, как несложно проверить, $v(G) > 4$. Поэтому группа K примитивна.

Пусть $K \leq H = \langle a \rangle \ltimes \langle y \rangle$, $|a| = p^3 - 1$, $|y| = 3$. В этом случае если F отождествить с $GF(p^3)$, то $\langle a \rangle$ действует на F как умножение на элементы из $GF(p^3)^*$, а y как автоморфизм поля. Так как $v(G) = 4$, то G группа типа 12.

Если же K содержится в такой подгруппе H группы $GL(3, p)$, что $H/Z = (\langle \bar{a}_1 \rangle \times \langle \bar{a}_2 \rangle) \ltimes SL(2, 3)$, $Z = Z(GL(3, p))$, $\bar{a}_1^3 = \bar{a}_2^3 = 1$ и $SL(2, 3)$ действует на $\langle \bar{a}_1 \rangle \times \langle \bar{a}_2 \rangle$ естественным образом (такое возможно только в случае $p \equiv 1(3)$), то снова получим $v(G) > 4$.

В случае $p = 2$ максимальные неприводимые разрешимые подгруппы группы $GL(3, 2)$ исчерпываются неабелевыми группами порядка 21, т.е. G и в этом случае будет группой типа 12. Наконец, если $p = 3$, то снова либо K импримитивна и $v(G) > 4$, либо K примитивна и G – группа типа 12.

В дальнейшем через $\wp(n)$ условимся обозначать показатель числа n по простому модулю p .

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть G – конечная разрешимая группа без центра и $v(G) = 4$. Подгруппа F неабелева тогда и только тогда, когда выполняется один из следующих случаев:

1. $G = F \ltimes \langle c \rangle$ – группа Фробениуса, F – неабелева группа порядка p^3 , p^4 или p^3q , p и q – простые числа, $w(|c|) = 4$ в первом случае и $w(|c|) \leq 4$ в остальных случаях;
2. $G = (((\langle z \rangle \times \langle a \rangle) \ltimes \langle b \rangle) \ltimes \langle x \rangle) \ltimes \langle c \rangle$, $z^p = a^p = b^p = x^q = 1$, $[a, b] = z$, $\langle z \rangle \ltimes \langle c \rangle$ и $\langle x \rangle \ltimes \langle c \rangle$ – группы Фробениуса, $w(|c|) \leq 3$, $a^c = a^\alpha$, $b^c = b^\beta$, $z^c = z^{\alpha\beta}$, $\wp(\alpha\beta) = |c|$ и либо $\wp(\beta) = |c|$, $\wp(\alpha) = |c|/r$, либо $\wp(\beta) = |c|/r_1$, $\wp(\alpha) = |c|/r_2$, r, r_1, r_2 – простые делители $|c|$, $r_1 \neq r_2$;
3. $G = ((\langle b \rangle \ltimes \langle a \rangle) \times \langle x \rangle) \ltimes \langle c \rangle$, $b^{p^2} = a^p = x^q = 1$, $[a, b] = b^p$, $\langle b \rangle \ltimes \langle c \rangle$ и $\langle x \rangle \ltimes \langle c \rangle$ – группы Фробениуса, $[a, c] = 1$, $w(|c|) = 1$;
4. $G = (\langle a \rangle \ltimes \langle b \rangle) \ltimes \langle c \rangle$, $a^{p^3} = b^p = 1$, $[a, b] = a^{p^2}$, $w(|c|) = 1$, $\langle a \rangle \ltimes \langle c \rangle$ – группа Фробениуса, $[b, c] = 1$;
5. $G = ((\langle z \rangle \times \langle a \rangle) \ltimes \langle b \rangle) \ltimes \langle c \rangle$, $z^{p^2} = a^p = b^p = 1$, $[a, b] = z^p$, $w(|c|) \leq 3$, $a^c = a^\alpha$,

- $b^c = b^\beta$, $z^c = z^{\alpha\beta}$ и либо $\wp(\alpha) = |c|/r$, $\wp(\beta) = \wp(\alpha\beta) = |c|$, либо $\wp(\alpha) = |c|/r_1$, $\wp(\beta) = |c|/r_2$, $\wp(\alpha\beta) = |c|$, r , r_1 , r_2 – простые делители $|c|$, $r_1 \neq r_2$;
6. $G = ((\langle a \rangle \times \langle z \rangle) \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $a^{p^2} = b^p = z^p = 1$, $[a, b] = z$, $w(|c|) \leq 3$, $a^c = a^\alpha$, $b^c = b^\beta$, $z^c = z^{\alpha\beta}$, $\wp(\alpha) = \wp(\alpha\beta) = |c|$, $\wp(\beta) = |c|/r$, r – простое число;
7. $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $a^{p^2} = b^p = x^p = 1$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^{sp}$, $s = 1$ или квадратичный невычет по модулю p , $w(|c|) = 1$, $[x, c] = 1$, $\langle a \rangle \rtimes \langle c \rangle$ и $\langle b \rangle \rtimes \langle c \rangle$ – группы Фробениуса;
8. $G = ((\langle z \rangle \times \langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $z^p = a^p = b^p = x^p = 1$, $[b, x] = a$, $[a, x] = z$, $[z, x] = 1$, $w(|c|) = 2$, $z^c = z^\alpha$, $a^c = a^\alpha$, $b^c = b^\alpha$, $x^c = x$, $\wp(\alpha) = |c|$;
9. $G = ((\langle z \rangle \times \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $z^p = a^p = b^p = 1$, $[a, b] = z$, $a^c = a^\alpha$, $b^c = b^\beta$, $z^c = z^{\alpha\beta}$ и выполняется один из следующих случаев:
- а) $w(|c|) = 2$, $\alpha = 1$, $\wp(\beta) = |c|$;
- б) $w(|c|) = 3$, $\wp(\alpha) = r$ – простое число, $(|c|/r, r) = 1$, $\wp(\beta) = |c|/r$ или $|c|$, $\wp(\alpha\beta) = |c|$;
- в) $w(|c|) \leq 3$, $\wp(\alpha) = |c|/m$, $\wp(\beta) = |c|$, $\wp(\alpha\beta) = |c|/r$, r – простое число, $(m, r) = 1$;
- г) $w(|c|) = 3$, $\wp(\alpha) = |c|/r_1$, $\wp(\beta) = |c|/r_2$, $\wp(\alpha\beta) = |c|/r_3$, r_1 , r_2 , r_3 – различные простые числа;
10. $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $a^{p^2} = b^p = 1$, $[a, b] = a^p$, $[b, c] = 1$, $w(|c|) = 2$, $\langle a \rangle \rtimes \langle c \rangle$ – группа Фробениуса;
11. $G = ((\langle z \rangle \times \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle) \rtimes (\langle c \rangle \times \langle d \rangle)$, $a^p = b^p = z^p = 1$, $[a, b] = z$, $[z, c] = 1$, $a^c = a^\alpha b^\beta z^{-\alpha\beta/2}$, $b^c = a^\gamma b^\delta z^{-\gamma\delta/2}$, $\beta\gamma \neq 0$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $a^d = a^s$, $b^d = b^s$, $z^d = z^{s^2}$, $|c|$ – нечетный простой делитель числа $(p+1)$, $|d|$ нечетен, $w(|d|) \leq 2$, $\wp(s) = |d|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – группа из условия теоремы. Тогда $|F| \in \{p^3, p^4, p^3q\}$, p и q – различные простые числа. Так как $Z(F) \cap F'$ – циклическая нормальная в группе G подгруппа простого порядка, то F является холловой подгруппой группы G . Поэтому $G = F \rtimes K$, $(|F|, |K|) = 1$. Если G – группа Фробениуса, то G – группа типа 1). Поэтому будем считать, что K действует на F нерегулярно.

Предположим сначала, что $|F| = p^3q$. Тогда $F = P \times \langle x \rangle$, P – неабелева группа порядка p^3 , $|x| = q$, $G = F \rtimes \langle c \rangle$, $|c|$ делит $(p-1, q-1)$ и $w(|c|) \leq 4$. Пусть a и c_0 такие неединичные элементы из F и $\langle c \rangle$ соответственно, что $[a, c_0] = 1$. Тогда из $\langle a \rangle \cap Z(F) = 1$ следует, что $|a| = p$ и $w(|c|) \leq 3$. Кроме того, из $a^c \in C(c_0^c) = C(c_0)$ следует, что подгруппа $\langle a \rangle$ c -допустима.

Рассмотрим сначала случай, когда P – группа экспоненты p , т.е.

$$P = (\langle z \rangle \times \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle, \quad a^p = b^p = z^p = 1, \quad [a, b] = z.$$

Положим $H = P \rtimes \langle c_0 \rangle$. И пусть $z^{c_0} = z^k$, $b^{c_0} = z^\alpha a^\beta b^\gamma$. Если $\gamma = 1$, то $[b, c_0] \in \langle z \rangle \times \langle a \rangle$ и из $P = [P, c_0] \cdot C_P(c_0)$ получим, что $C(c_0)$ содержит элемент вида $z^s a^t b$. Но тогда $C(c_0)$ содержит и $z = [a, z^s a^t b]$, что невозможно. Поэтому $\gamma \neq 1$. Заменяя b на $a^r b$, где $r(\gamma-1) \equiv \beta(p)$, будем иметь

$$(a^r b)^{c_0} = a^r z^\alpha a^\beta b^\gamma = z^\alpha a^{r+\beta} b^\gamma \equiv (a^r b)^\gamma \pmod{\langle z \rangle},$$

т.е. можно считать, что $\beta = 0$. Из равенств

$$z^k = z^{c_0} = [a, b]^{c_0} = [a, b^{c_0}] = [a, z^\alpha b^\gamma] = z^\gamma$$

получим $k = \gamma$. Применяя к $(\langle z \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c_0 \rangle$ теорему Машке, можно считать, что $b^{c_0} = b^k$. Если $C(b) \cap \langle c \rangle \neq 1$, то, очевидно, $(|C(b) \cap \langle c \rangle|, |c_0|) = 1$.

Итак, если P имеет экспоненту p , то G – группа типа 2). Пусть теперь

$$P = \langle b \rangle \rtimes \langle a \rangle, \quad b^{p^2} = a^p = 1, \quad [a, b] = b^p.$$

Так как число циклических подгрупп порядка p^2 в группе P равно p , а $|c|$ делит $p - 1$, то можно считать, что подгруппа $\langle b \rangle$ c -допустима. Таким образом, $\langle b \rangle \rtimes \langle c \rangle$ и $\langle x \rangle \rtimes \langle c \rangle$ – группы Фробениуса. Как и выше, подгруппа $\langle a \rangle$ тоже c -допустима. Пусть $a^c = a^n$ и $b^c = b^\alpha$. Тогда

$$b^{p^\alpha} = (b^p)^c = [a, b]^c = [a^c, b^c] = b^{pn^\alpha}.$$

Отсюда $n \equiv 1(p)$, $c \in C(a)$ и G – группа типа 3).

Предположим теперь, что $|F| = p^4$. Тогда $G = F \rtimes \langle c \rangle$ и $|c|$ делит число $(p - 1)$. Полный список групп порядка p^4 приведен, например, в [7, III.12.6]. Пусть $|Z(F)| = p^2$. Тогда F одна из следующих групп:

- а) $F = P \times \langle x \rangle$, P – неабелева группа порядка p^3 ;
- б) $F = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $a^{p^2} = b^{p^2} = 1$, $[a, b] = a^p$;
- в) $F = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $a^{p^3} = b^p = 1$, $[a, b] = a^{p^2}$;
- г) $F = (\langle z \rangle \times \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, $z^{p^2} = a^p = b^p = 1$, $[a, b] = z^p$, $[b, z] = 1$;
- д) $F = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $a^{p^2} = b^p = x^p = 1$, $[a, x] = b$, $[b, x] = 1$.

В случае а) мы снова получим группы типа 2) или 3) при $q = p$. Случай б) невозможен. Рассмотрим случай в). Здесь, как и выше, можно считать, что $a^c = a^\alpha$, $b^c = b^\beta$ и $C(b) \cap \langle c \rangle \neq 1$. Из

$$a^{p^2\alpha} = (a^{p^2})^c = [a, b]^c = [a^c, b^c] = a^{p^2\alpha\beta}$$

получаем, что $\beta \equiv 1(p)$, т.е. $|c|$ – простое число и G – группа типа 4).

Если F типа г), то $\langle z \rangle \rtimes \langle c \rangle$ – группа Фробениуса и можно считать, что $C(a) \cap \langle c \rangle \neq 1$. Как и выше, несложно показать, что G – группа типа 5). Наконец, в случае д) имеем $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$ – группа Фробениуса и G – группа типа 6).

Предположим теперь, что $|Z(F)| = p$. В этом случае F – одна из следующих групп:

- а) $F = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $a^{p^2} = b^p = x^p = 1$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^{s^p}$, где $s = 1$ или s – квадратичный невычет по модулю p ;
- б) $F = (\langle z \rangle \times \langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $z^p = a^p = b^p = x^p = 1$, $[z, x] = 1$, $[a, x] = z$, $[b, x] = a$;
- в) $F = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $a^{p^2} = b^p = x^p = 1$, $[a, b] = a^p$, $[a, x] = b$, $[b, x] = 1$ при $p > 3$, и $F = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, $a^9 = b^3 = 1$, $a^3 = x^3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3$ при $p = 3$.

Рассмотрим случай а). Предположим сначала, что $\langle c \rangle$ действует на $Z_2(F) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ нерегулярно. Тогда можно считать, что $\langle a \rangle \rtimes \langle c \rangle$ – группа Фробениуса и $C(b) \cap \langle c \rangle = \langle c_0 \rangle \neq 1$. Положим $a^{c_0} = a^\alpha$, $x^{c_0} = a^{p\beta} b^\gamma x^\delta$. Если $\delta = 1$, то, как и выше, получим противоречие вида $a^p \in C(c_0)$. Поэтому $\delta \neq 1$. Из

$$b = b^{c_0} = [a^{c_0}, x^{c_0}] = [a^\alpha, a^{p\beta} b^\gamma x^\delta] = b^{\alpha\delta} a^{sp\alpha\delta(\delta-1)/2}$$

имеем $\alpha\delta \equiv 1(p)$ и $s\alpha\delta(\delta-1)/2 \equiv 0(p)$, что невозможно.

Если $\langle c \rangle$ действует на $Z_2(F)$ регулярно, то можно считать, что $a^c = a^\alpha$, $b^c = b^\beta$ и $x^c = x^\gamma$. Поэтому

$$b^\beta = b^c = [a, x]^c = [a^c, x^c] = [a^\alpha, x^\gamma] = b^{\alpha\gamma} a^{s p \alpha \gamma (\gamma-1)/2}.$$

Отсюда $\alpha\gamma \equiv \beta(p)$ и $\gamma = 1$, т.е. G – группа типа 7.

Пусть F типа б) и $\langle c \rangle \cap C(a) = \langle c_0 \rangle \neq 1$. Положим $z^{c_0} = z^\alpha$, $b^{c_0} = b^\gamma$, $x^{c_0} = a^u b^v z^w x^\delta$. Тогда

$$a = [b, x]^{c_0} = [b^\gamma, a^u b^v z^w x^\delta] = [b^\gamma, x^\delta] = a^{\gamma\delta} z^{\gamma\delta(\delta-1)/2},$$

что снова приводится к противоречию.

Аналогично получим противоречие и в случае $\langle c \rangle \cap C(b) \neq 1$. Поэтому можно считать, что $\langle c \rangle \cap C(x) \neq 1$. Так как $\langle z \rangle$, $\langle z \rangle \times \langle a \rangle = Z_2(F)$, $\langle z \rangle \times \langle a \rangle \times \langle b \rangle = C(Z_2(F))$ c -допустимы, то можно считать, что $a^c = a^\alpha$, $b^c = b^\beta$, $z^c = z^\gamma$, $x^c = x^\delta$. Тогда из $[a, x] = z$ и $[b, x] = a$ получим $\delta = 1$ и $\alpha = \beta = \gamma$, т.е. G – группа типа 8.

Если F – группа типа в) то и в случае $\langle c \rangle \cap C(b) \neq 1$, и в случае $\langle c \rangle \cap C(x) \neq 1$ получим противоречие.

Рассмотрим теперь случай $|F| = p^3$. Если $C(Z(F)) = F$, то аналогично предыдущему получим группу типа 9а), 9б) или 10). Поэтому остается рассмотреть случай $C(Z(F)) > F$.

Пусть $G = F \rtimes K$, $C(Z(F)) = F \rtimes \langle c \rangle$. Если

$$F = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle, \quad a^{p^2} = b^p = 1, \quad [a, b] = a^p,$$

то можно считать, что $a^c = a$. Если $b^c = a^{p\alpha} b^\beta$, то $a^p = (a^p)^c = [a, b]^c = a^{p\beta}$, т.е. $\beta = 1$. Но тогда $C(Z(F)) = F \times \langle c \rangle$, что противоречит выбору подгруппы F . Поэтому F – группа экспоненты p .

Положим $F = (\langle z \rangle \times \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, $a^p = b^p = z^p = 1$, $[a, b] = z$, $a^c = a^\alpha b^\beta z^n$, $b^c = a^\gamma b^\delta z^m$. Тогда $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Если $\langle c \rangle$ действует на $F/\langle z \rangle$ нерегулярно, то снова получим противоречие с выбором подгруппы F .

Предположим, что $\langle c \rangle$ действует на $F/\langle z \rangle$ неприводимо. Тогда $|c|$ – нечетный простой делитель числа $(p+1)$. Так как $|K/\langle c \rangle|$ делит $(p-1)$, то $K = \langle c \rangle \rtimes \langle d \rangle$. Группа $\langle d \rangle$ действует на $F/\langle z \rangle$ приводимо. Поэтому можно считать, что $a^d = a^s$, $b^d = b^t$ и $z^d = z^{st}$. Но тогда

$$a^{cd} = (a^\alpha b^\beta z^n)^d = a^{s\alpha} b^{t\beta} z^{nst}$$

и

$$a^{dc} = (a^s)^c = a^{s\alpha} b^{s\beta} z^{ns - \alpha\beta s(s-1)/2}.$$

Отсюда $s = t$ и $n = -\alpha\beta/2$. Аналогично из $b^{cd} = b^{dc}$ получим $m = -\gamma\delta/2$. Так как $s = t$, то $z^d = z^{t^2}$ и из $\wp(t^2) = |d|$ следует, что $|d|$ нечетен, т.е. G – группа типа 11).

Предположим теперь, что $cd \neq dc$. Тогда [7, II.7.3] можно считать, что $d^2 \in C(c)$. Пусть $|d| = 2m$. Так как $d^2 c = c d^2$, то по уже доказанному число m нечетно и $s^2 = t^2$. Из $z^d = [a^d, b^d] = z^{st}$ следует, что $\wp(st) = 2m$. В этом случае группа $\langle c \rangle \rtimes \langle d \rangle$ действует на $F/\langle z \rangle$ регулярно и в то же время содержит нециклическую подгруппу $\langle c \rangle \rtimes \langle d^m \rangle$ порядка $2|c|$, что противоречит строению регулярных групп автоморфизмов.

Если же c действует на $F/\langle z \rangle$ приводимо, то можно считать, что

$$a^c = a^\alpha, \quad b^c = b^\beta, \quad \alpha\beta = 1 \quad \text{и} \quad \alpha \neq 1.$$

Рассматривая действие подгруппы K на фактор-группе $F/\langle z \rangle$, можно отождествить ее с подгруппой из $GL(2, p)$. Тогда из $K \leq N(\langle c \rangle)$ следует, что если K неабелева, то $K \leq D \ltimes \langle \tau \rangle$, где D – группа диагональных матриц, $a^\tau = b$, $b^\tau = a$.

Если подгруппа $K = \langle d \rangle$ циклическая, то в зависимости от условий $C(a) \cap K = C(b) \cap K = 1$, $C(a) \cap K \neq 1 = C(b) \cap K$ и $C(a) \cap K \neq 1 \neq C(b) \cap K$ получим группы 9в) при $m = 1$ и $m \neq 1$ или 9г).

Пусть $K = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$ – абелева нециклическая подгруппа и $\langle c \rangle \times \langle d_0 \rangle$ элементарная абелева порядка $|c|^2$. Тогда [12, с. 225]

$$F = \langle C_F(x) | (\langle c \rangle \times \langle d_0 \rangle) / \langle x \rangle - \text{циклическая} \rangle. \quad (*)$$

Если $\alpha \neq -1$, то $\langle d \rangle$ диагональна. Если же $\alpha = -1$, то в силу (*) и теоремы Машке можно считать, что $\langle d_0 \rangle$ диагональна.

Положим $a^{d_0} \equiv a$, $b^{d_0} \equiv b^t \pmod{\langle z \rangle}$ и $c^n d_0 \in C(a^m b z^k)$. Тогда из

$$a^m b z^k = (a^m b z^k)^{d_0} \equiv a^{m\alpha^n} b^{t\beta^n} \pmod{\langle z \rangle}$$

следует, что $t = \beta^{-n} = \alpha^n$ и $\alpha^n = 1$. Но тогда $t = 1$, что невозможно.

Если K неабелева, то, как и выше, получим противоречие со строением регулярных групп автоморфизмов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bianchi M., Manz O. Groups with small centralizers of non-central elements // Boll. Un. Mat. Ital. 1990. V. 4A. № 7. P. 365–370.
- [2] Scarselli A. Gruppi con piccoli centralizzanti // Boll. Un. Mat. Ital. 1992. V. 6B. № 7. P. 649–663.
- [3] Schmidt R. Zentralisatorverbände endlicher Gruppen // Rend. Sem. Math. Univ. Padova. 1970. № 44. P. 97–131.
- [4] Васильева А. В. О централизаторных решетках конечных простых групп // Сиб. матем. ж. 1997. Т. 18. № 2. С. 263–273.
- [5] Bloom D. M. The subgroups of $PSL(3, q)$ for odd q // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 127. P. 150–178.
- [6] Гаген Т. М. Некоторые вопросы теории конечных групп // К теории конечных групп. М.: Мир, 1979.
- [7] Huppert B. Endliche Gruppen. V. 1. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1967.
- [8] Brauer R., Suzuki M. On finite groups of even order whose 2-Sylow group is a quaternion group // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1959. V. 45. № 12. P. 1757–1759.
- [9] Suzuki M. Two characteristic properties of ZT-groups // Osaka Math. J. 1963. V. 15. P. 143–150.
- [10] Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М. Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968.
- [11] Супруненко Д. А. Группы матриц. М.: Наука, 1972.
- [12] Gorenstein D. Finite Groups. New York: Harper and Row, 1968.