Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. М. Галеев, Поперечники классов Бесова $B_{p,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 5, 656–665

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm529>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 10:23:31

УДК 517.5

ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ БЕСОВА $B_{p,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$

Э.М. Галеев

В работе выводятся формулы оценок порядков поперечников по Колмогорову классов О.В. Бесова $B_{p,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ периодических функций многих переменных с доминирующей смешанной производной, определяемой по Вейлю, в пространстве L_q , $r \in \mathbb{R}^d$, $1 < p, q < \infty$, $0 < \theta \leq \infty$. Предлагаемая методика подсчета поперечников может быть использована также для нахождения поперечников классов Соболева $W_p^r(\mathbb{T}^d)$ (путем вложения в класс Бесова $B_{p,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$), а также для подсчета других поперечников (александровских, линейных, проекционных, ортопроекционных и т.д.).

Библиография: 14 названий.

В работе выводятся формулы оценок порядков поперечников по Колмогорову классов О.В. Бесова $B_{p,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ периодических функций многих переменных с доминирующей смешанной производной, определяемой по Вейлю, в пространстве L_q , $r \in \mathbb{R}^d$, $1 < p, q < \infty$, $0 < \theta \leq \infty$. Предлагаемая методика подсчета поперечников может быть использована также для нахождения поперечников классов Соболева $W_p^r(\mathbb{T}^d)$ (путем вложения в класс Бесова $B_{p,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$), а также для подсчета других поперечников (линейных, проекционных, ортопроекционных и т.д.).

Дадим определения рассматриваемых классов. Пусть $\mathbb{T}^d = (-\pi, \pi]^d$ — d -мерный куб, реализованный в виде произведения d полуинтервалов $(-\pi, \pi]$. Через $L_p = L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 < p < \infty$, обозначим пространство функций $x(t) = x(t_1, \dots, t_d)$, измеримых на $\mathbb{T}^d$, периодических с периодом 2π по каждой переменной и таких, что конечна величина

$$\|x\|_{L_p} = \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} |x(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Функцию $x(\cdot) \in L_p(\mathbb{T}^d)$ можно разложить в ряд Фурье

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} x_k e^{i\langle k, t \rangle},$$

где суммирование ведется по всем $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ — d -мерной целочисленной решетке, $\langle k, t \rangle = \sum_{i=1}^d k_i t_i$, а коэффициенты Фурье x_k определяются по формуле

$$x_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} x(t) e^{-i\langle k, t \rangle} dt.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-00325, № 96-15-96072.

Для упрощения формулировок будем рассматривать функции с нулевыми средними по всем аргументам, т.е. функции, коэффициенты Фурье которых x_k , $k = (k_1, \dots, k_d)$, имеющие хотя бы один нулевой индекс k_j , равны нулю:

$$x(t) = \sum_{k \in \mathring{\mathbb{Z}}^d} x_k e^{i\langle k, t \rangle},$$

где $\mathring{\mathbb{Z}}^d := \{k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d \mid k_j \neq 0, j = 1, \dots, d\}$.

Для такой функции и вектора $r = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{R}^d$ введем операцию дробного дифференцирования по формуле

$$x^{(r)}(t) = \sum_{k \in \mathring{\mathbb{Z}}^d} x_k (ik)^r e^{i\langle k, t \rangle},$$

где $(ik)^r = (ik_1)^{r_1} \dots (ik_d)^{r_d}$, $(ik)^r = |k|^r e^{(i/2)\pi r \operatorname{sign} k}$ (для скаляров k и r). Каждому вектору $s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}^d$ сопоставим множество $\square_s \subset \mathring{\mathbb{Z}}^d$ по следующему правилу:

$$\square_s = \{k \in \mathring{\mathbb{Z}}^d \mid 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, d\}.$$

Тогда

$$x(t) = \sum_{k \in \mathring{\mathbb{Z}}^d} x_k e^{i\langle k, t \rangle} = \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \delta_s x(t),$$

где $\delta_s x(t) := \sum_{k \in \square_s} x_k e^{i\langle k, t \rangle}$.

Для вектора $r \in \mathbb{R}^d$ и величины θ ($0 < \theta \leq \infty$) введем класс Бесова функций, определяемый квазинормой

$$B_{p,\theta}^r = B_{p,\theta}^r(\mathbb{T}^d) = \left\{ x(\cdot) \mid \|x\|_{B_{p,\theta}^r} := \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} \|\delta_s x^{(r)}\|_{L_p}^\theta \right)^{1/\theta} \leq 1 \right\},$$

и

$$W_p^r = W_p^r(\mathbb{T}^d) = \{x(\cdot) \mid \|x\|_{W_p^r} := \|x^{(r)}\|_{L_p} \leq 1\}$$

— класс Соболева.

Если $\theta = \infty$, то $B_{p,\infty}^r = H_p^r$ — класс Гёльдера–Никольского.

Символ $1/p$ для вектора $1 = (1, \dots, 1)$ будет рассматриваться как вектор $(1/p, \dots, 1/p)$. Функции $a(N)$ и $b(N)$ будем называть *функциями одного порядка* и писать $a \asymp b$, если существует константа N_0 такая, что при $N > N_0$ $C_1 a(N) \leq b(N) \leq C_2 a(N)$ ($C_1, C_2 > 0$). Аналогично определяются порядковые неравенства $a \ll b$ и $a \gg b$. Вложение $A \Subset B$ означает, что существует константа $C > 0$ такая, что $A \subset CB$. Аналогично определяется вложение $A \ni B$.

Напомним, что N -поперечником по Колмогорову центрально-симметричного множества W в банаховом пространстве X называется величина

$$d_N(W, X) = \inf_P \sup_{x \in W} \|x - Px\|_X,$$

где инфимум берется по всем действующим в X отображениям на линейные подпространства размерности не более N .

В качестве поперечников могут быть взяты поперечники по Колмогорову, Александру, линейные, проекционные, ортопроекционные. В случае линейных поперечников инфимум берется по всем действующим в X линейным непрерывным операторам ранга N , для проекционных поперечников инфимум берется по проекторам ранга N и т.д. Для определенности будем говорить о поперечниках по Колмогорову.

Для оценок колмогоровских поперечников функциональных классов нам понадобятся некоторые неравенства, которые часто используются при приближении классов периодических функций многих переменных, а также аналог теоремы Марцинкевича–Зигмунда о дискретизации для классов периодических функций многих переменных.

Неравенство А. Пусть $1 < q < \infty$, $q^* = \min\{q, 2\}$, $q^{**} = \max\{q, 2\}$. Тогда

$$\left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} \|\delta_s x\|_{L_q}^{q^{**}} \right)^{1/q^{**}} \ll \left\| \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \delta_s x \right\|_{L_q} \ll \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} \|\delta_s x\|_{L_q}^{q^*} \right)^{1/q^*}. \quad (1)$$

Неравенство А следует из теоремы Литтлвуда–Пэли и неравенства Минковского (см., например, [1]).

Неравенство В (В. Н. Темляков [2]). Имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \delta_s x \right\|_{L_p} \gg \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} \|2^{\langle s, 1/q-1/p \rangle} \delta_s x\|_{L_q}^p \right)^{1/p}, \quad 1 < p < q \leq \infty. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА С. Между пространством тригонометрических полиномов вида

$$x(t) = \sum_{k \in \square_s} x_k e^{i\langle k, t \rangle}$$

и пространством $\mathbb{R}^{2^{\langle s, 1 \rangle}}$ устанавливается изоморфизм путем сопоставления функции $x(\cdot)$ вектора

$$x = \{x_m(\tau^j)\} \in \mathbb{R}^{2^{\langle s, 1 \rangle}}, \quad x_m(t) = \sum_{\substack{\text{sign } k_l = m_l \\ l=1, \dots, d}} x_k e^{i\langle k, t \rangle}, \quad m = (\pm 1, \dots, \pm 1) \in \mathbb{R}^d, \\ \tau^j = (\pi 2^{2-s_1} j_1, \dots, \pi 2^{2-s_d} j_d), \quad j_i = 1, \dots, 2^{s_i-1}, \quad i = 1, \dots, d,$$

при этом для функции $x(\cdot) \in \text{lin}\{e^{i\langle k, t \rangle}, k \in \square_s\}$ и числа $p \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$\|x(\cdot)\|_{L_p} \asymp 2^{-\langle s, 1/p \rangle} \|x\|_{l_p^{2^{\langle s, 1 \rangle}}}, \quad 1 < p < \infty. \quad (3)$$

Теорема С доказывается аналогично теореме Марцинкевича–Зигмунда для функций нескольких переменных. Для функций одной переменной эта теорема Марцинкевича–Зигмунда имеется в монографии Зигмунда [3]. Для функций многих переменных теорема С опубликована впервые в работе [4].

Нам понадобится также следующая лемма, которая легко выводится из определения колмогоровского поперечника, теоремы Литтлвуда–Пэли и теоремы о дискретизации (см. [1]).

ЛЕММА D. Пусть

$$s \in \mathbb{N}^d, \quad \mathcal{T}_s := \text{lin}\{e^{i\langle k, t \rangle} \mid k \in \square_s\}, \quad N_s \in \mathbb{Z}_+, \quad N_s \leq 2^{\langle s, 1 \rangle},$$

$$r \in \mathbb{R}^d, \quad 1 < p, q < \infty, \quad \alpha = r - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+.$$

Тогда существует линейное подпространство $L_{N_s} \subset \mathcal{T}_s$ размерности N_s и оператор $P_{N_s}: \mathcal{T}_s \rightarrow L_{N_s}$ такой, что

$$\|\delta_s x - P_{N_s} \delta_s x\|_{L_q} \ll d_{N_s}(B_p^{2^{\langle s, 1 \rangle}}, l_q^{2^{\langle s, 1 \rangle}}) 2^{\langle s, -\alpha \rangle} \|\delta_s x^{(r)}\|_{L_p}. \quad (4)$$

Для нахождения порядка поперечника функционального класса Бесова нам понадобится следующая лемма о порядке поперечника дискретного класса Бесова $B_{\infty, 1}^{m, n}$ в пространстве l_q^{mn} . Как обычно, через $B_{p, q}^{m, n}$ обозначен единичный шар нормированного пространства $l_{p, q}^{m, n}$ с нормой

$$\|x\|_{l_{p, q}^{m, n}} = \left(\sum_{s=1}^n \left(\sum_{k \in \Delta_s} |x_k|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}, \quad 1 \leq p, q \leq \infty, \quad x \in \mathbb{R}^{mn},$$

где $\Delta_s = \{k \in \mathbb{N} \mid (s-1)m < k \leq sm\}$, $s = 1, \dots, n$.

ЛЕММА. Пусть $1 < q \leq 2$, $N \leq mn/2$. Тогда

$$d_N(B_{\infty, 1}^{m, n}, l_q^{mn}) \asymp m^{1/q}.$$

Доказательство леммы проводится, как и в работе [5] при доказательстве оценки $d_N(B_{1, \infty}^{m, n}, l_{2, q}^{m, n}) \asymp m^{1/q}$. В качестве множества $\mathcal{E}$ берется множество вершин в $B_{\infty, 1}^{m, n}$, т.е. $\mathcal{E} := \{\varepsilon = \sum_{i \in \Delta_s} \varepsilon_i e_i \in \mathbb{R}^{mn} \mid \varepsilon_i = \pm 1, s = 1, \dots, n\}$, где $e_1, \dots, e_{mn}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^{mn}$.

В данном виде лемма публикуется впервые.

Продemonстрируем методику получения оценок сверху и снизу поперечников, взяв в качестве примера классы Бесова $B_{p, \theta}^r(\mathbb{T}^d)$. При этом используются и развиваются методы нахождения порядков колмогоровских поперечников $d_N(H_p^r, L_q)$. Случай $p \leq q \leq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$ содержится также в работе А. С. Романюка [6].

ТЕОРЕМА. Пусть

$$r \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < r_1 = \dots = r_{l+1} < r_{l+2} \leq \dots \leq r_d,$$

$$1 < p, q < \infty, \quad 0 < \theta \leq \infty, \quad \beta := \frac{1/p - 1/q}{1 - 2/q}.$$

Тогда

$$d_N(B_{p, \theta}^r, L_q) \asymp \begin{cases} \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \log^{(l/2 - l/\theta)_+} N, & p \geq q \geq 2, & (a) \\ & p \geq 2 > q, \theta \geq 2, & (b) \\ & 2 \leq p < q, r_1 > \beta, & (в) \\ \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - 1/p + 1/q} \log^{(l/q - l/\theta)_+} N, & p \leq q \leq 2, r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, & (г) \\ \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - 1/p + 1/2} \log^{(l/2 - l/\theta)_+} N, & p \leq 2 < q, r_1 > \frac{1}{p}. & (д) \end{cases}$$

Задачи о порядках $d_N(B_{p, \theta}^r, L_q)$ при $p \geq 2 > q$, $\theta < 2$ и $q < p < q$ остаются нерешенными. Не решены также задачи о поперечниках классов Бесова для малых гладкостей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $0 < \theta < 1$ множество $B_{p,\theta}^r$ не является выпуклым, а поскольку $d_N(W, X) = d_N(\text{conv } W, X)$ и выпуклая оболочка $\text{conv } B_{p,\theta}^r = B_{p,\max\{1,\theta\}}^r$, при доказательстве считаем, что $1 \leq \theta \leq \infty$.

Оценки сверху. В случаях а), б) и г) оценки сверху следуют из приближения класса $B_{p,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ в пространстве L_q оператором Фурье $S_N := S_\mu^{r'_i}$, $r'_i = r_i$, $i = 1, \dots, l+1$, и $r_1 < r'_i < r_i$, $i = l+2, \dots, d$, содержащем порядка N гармоник из расширенного ступенчатого гиперболического креста при $\mu^l 2^{\mu/r_1} = N$ (см., например, Галеев [7], Романюк [6]):

$$d_N(B_{p,\theta}^r, L_q) \ll d(B_{p,\theta}^r, S_N, L_q) \asymp \begin{cases} \left(\frac{\log^l N}{N} \right)^{r_1} \log^{(l/p^* - l/\theta)_+} N, & p \geq q, \\ \left(\frac{\log^l N}{N} \right)^{r_1 - 1/p + 1/q} \log^{(l/q - l/\theta)_+} N, & p < q, \end{cases}$$

$$p^* := \min\{p, 2\}.$$

Перейдем к случаям, когда операторы Фурье не дают порядка колмогоровского поперечника. Возьмем оператор $P_N: L_q \rightarrow L_N$, действующий на функцию $x = \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \delta_s x$ по формуле $P_N x = \sum_{s \in \mathbb{N}^d} P_{N_s} \delta_s x$, где P_{N_s} и L_{N_s} — соответственно операторы и подпространства из леммы D, $L_N = \bigcup_{s \in \mathbb{N}^d} L_{N_s}$. Пусть $x \in B_{p,\theta}^r$. Поскольку по (1) и лемме D

$$\begin{aligned} \|x - P_N x\|_q &\ll \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} \|\delta_s x - P_{N_s} \delta_s x\|_q^{q^*} \right)^{1/q^*} \\ &\ll \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} (2^{\langle s, -\alpha \rangle} d_{N_s}(B_p^{2^{\langle s, 1 \rangle}}, l_q^{2^{\langle s, 1 \rangle}}) \|\delta_s x^{(r)}\|_p)^{q^*} \right)^{1/q^*}, \end{aligned}$$

применяя при $\theta \leq q^*$ неравенство Минковского $\|\cdot\|_{l_q^*} \leq \|\cdot\|_{l_\theta}$, а при $\theta > q^*$ неравенство Гёльдера

$$\left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} a_s^{q^*} b_s^{q^*} \right)^{1/q^*} \leq \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} a_s^{q^* \theta / (\theta - q^*)} \right)^{1/q^* - 1/\theta} \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} b_s^\theta \right)^{1/\theta},$$

имеем

$$\|x - P_N x\|_q \ll \begin{cases} \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} (2^{\langle s, -\alpha \rangle} d_{N_s}(B_p^{2^{\langle s, 1 \rangle}}, l_q^{2^{\langle s, 1 \rangle}}) \|\delta_s x^{(r)}\|_p)^\theta \right)^{1/\theta}, & \theta \leq q^*, \\ \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} (2^{\langle s, -\alpha \rangle} d_{N_s}(B_p^{2^{\langle s, 1 \rangle}}, l_q^{2^{\langle s, 1 \rangle}}))^{q^* \theta / (\theta - q^*)} \right)^{1/q^* - 1/\theta} \\ \quad \times \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} \|\delta_s x^{(r)}\|_p^\theta \right)^{1/\theta}, & \theta > q^*. \end{cases}$$

Отсюда

$$d_N(B_{p,\theta}^r, L_q) \ll \begin{cases} \sup_{s \in \mathbb{N}^d} 2^{\langle s, -\alpha \rangle} d_{N_s}(B_p^{2^{\langle s, 1 \rangle}}, l_q^{2^{\langle s, 1 \rangle}}), & \theta \leq q^*, \\ \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} (2^{\langle s, -\alpha \rangle} d_{N_s}(B_p^{2^{\langle s, 1 \rangle}}, l_q^{2^{\langle s, 1 \rangle}}))^{q^* \theta / (\theta - q^*)} \right)^{1/q^* - 1/\theta}, & \theta > q^*. \end{cases} \quad (5)$$

д) При $p \leq 2 < q$, $r_1 > 1/p$, оценка сверху сводится к случаю в) при $p = 2$ в силу вложения $B_{p,\theta}^r \in B_{2,\theta}^{r-1/p+1/2}$:

$$d_N(B_{p,\theta}^r, L_q) \ll d_N(B_{2,\theta}^{r-1/p+1/2}, L_q) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N} \right)^{r_1-1/p+1/2} \log^{(l/2-l/\theta)+} N.$$

Условие гладкости в в) $r_1 - 1/p + 1/2 > \beta = 1/2$ (при $p = 2$ в определении величины β) равносильно условию $r_1 > 1/p$.

в) Пусть $2 \leq p < q$, $r_1 > \beta$. Тогда $q^* = 2$. Для $s \in \mathbb{N}^d$ положим

$$N_s = \begin{cases} 2^{\langle s, 1 \rangle}, & \langle s, r \rangle \leq \mu, \\ [2^{\mu(1+\varepsilon\alpha_1)/r_1 - \varepsilon\langle s, \alpha \rangle}], & \langle s, r \rangle > \mu, \end{cases}$$

где $[\cdot]$ – целая часть числа, величина μ выбирается из условия $\mu^l 2^{\mu/r_1} = N$, константа $\varepsilon > 0$ достаточно мала. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \mathbb{N}^d} N_s &\leq \sum_{\langle s, r \rangle \leq \mu} 2^{\langle s, 1 \rangle} + \sum_{\langle s, r \rangle > \mu} 2^{\mu(1+\varepsilon\alpha_1)/r_1 - \varepsilon\langle s, \alpha \rangle} \\ &\asymp \mu^l 2^{\mu/r_1} + 2^{\mu(1+\varepsilon\alpha_1)/r_1} \mu^l 2^{-\mu\varepsilon\alpha_1/r_1} \\ &\asymp \mu^l 2^{\mu/r_1} = N, \end{aligned}$$

поскольку $1/r_1 = \dots = 1/r_{l+1} > 1/r_{l+2} \geq \dots \geq 1/r_d$ и $\alpha_1/r_1 = \dots = \alpha_{l+1}/r_{l+1} < \alpha_{l+2}/r_{l+2} \leq \dots \leq \alpha_d/r_d$. Последнее соотношение проверяется из определения величин r, α и неравенства $p < q$.

Подставляя в формулу (5) ($q^* = 2$) значение поперечника $d_n(B_p^n, l_q^n) = 0$ для $\langle s, r \rangle \leq \mu$ и оценки конечномерных поперечников Кашина [8], Глускина [9] $d_n(B_p^m, l_q^m) \asymp \min\{1, m^{2\beta/q} n^{-\beta}\}$ ($m > n$, $2 \leq p < q < \infty$) для $\langle s, r \rangle > \mu$, получим

$$\begin{aligned} d_N(B_{p,\theta}^r, L_q) &\ll \begin{cases} \sup_{\langle s, r \rangle > \mu} 2^{\langle s, -\alpha \rangle} 2^{\langle s, 2\beta/q \rangle} N_s^{-\beta}, & \theta \leq 2, \\ \left(\sum_{\langle s, r \rangle > \mu} (2^{\langle s, -\alpha \rangle} 2^{\langle s, 2\beta/q \rangle} N_s^{-\beta})^{2\theta/(\theta-2)} \right)^{1/2-1/\theta}, & \theta > 2, \end{cases} \\ &\ll \begin{cases} \sup_{\langle s, r \rangle > \mu} 2^{\langle s, -r+1/p-1/q+2\beta/q+\beta\varepsilon\alpha \rangle - \beta\mu(1+\varepsilon\alpha_1)/r_1}, & \theta \leq 2, \\ \left(\sum_{\langle s, r \rangle > \mu} (2^{\langle s, -r+1/p-1/q+2\beta/q+\beta\varepsilon\alpha \rangle - \beta\mu(1+\varepsilon\alpha_1)/r_1})^{2\theta/(\theta-2)} \right)^{1/2-1/\theta}, & \theta > 2, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sup_{\langle s, r \rangle > \mu} 2^{\langle s, -r+\beta+\beta\varepsilon\alpha \rangle - \beta\mu(1+\varepsilon\alpha_1)/r_1}, & \theta \leq 2, \\ \left(\sum_{\langle s, r \rangle > \mu} (2^{\langle s, -r+\beta+\beta\varepsilon\alpha \rangle - \beta\mu(1+\varepsilon\alpha_1)/r_1})^{2\theta/(\theta-2)} \right)^{1/2-1/\theta}, & \theta > 2, \end{cases} \\ &\asymp \begin{cases} 2^{-\mu}, & \theta \leq 2, \\ 2^{-\mu} \mu^{l/2-l/\theta}, & \theta > 2, \end{cases} \\ &= 2^{-\mu} \mu^{(l/2-l/\theta)+} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N} \right)^{r_1} \log^{(l/2-l/\theta)+} N, \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned} \frac{-r_1 + \beta + \beta \varepsilon \alpha_1}{r_1} &= \dots = \frac{-r_{l+1} + \beta + \beta \varepsilon \alpha_{l+1}}{r_{l+1}} \\ &> \frac{-r_{l+2} + \beta + \beta \varepsilon \alpha_{l+2}}{r_{l+2}} \geq \dots \geq \frac{-r_d + \beta + \beta \varepsilon \alpha_d}{r_d} \end{aligned}$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$. При подсчете мы использовали тождество $1/p - 1/q + 2\beta/q = \beta$, которое проверяется непосредственно вычислением.

Оценки снизу. Выпишем формулы для оценок снизу колмогоровских поперечников функциональных классов. Пусть $S \in \mathbb{N}^d$ – произвольное множество, $K = \{k \mid k \in \square_s, s \in S\}$ – множество гармоник из блоков $\square_s$, $s \in S$, $\mathcal{T} = \text{lin}\{e^{i\langle k, t \rangle} \mid k \in K\}$ – подпространство, натянутое на гармоники из множества K . По теореме Литтлвуда–Пэли

$$d_N(B_{p,\theta}^r, L_q) \gg d_N(B_{p,\theta}^r \cap \mathcal{T}, L_q \cap \mathcal{T}).$$

Если $x(\cdot) = \sum_{s \in S} \delta_s x(\cdot) \in \mathcal{T}$, то по теореме С, с одной стороны,

$$\|x\|_{B_{p,\theta}^r} \asymp \left(\sum_{s \in S} \|2^{\langle s, r \rangle} \delta_s x\|_{L_p}^\theta \right)^{1/\theta} \asymp \|x\|_{l_{p,\theta}^{2^{\langle s, 1 \rangle}, |S|}(2^{\langle s, r-1/p \rangle})} \quad (|S| := \text{card } S)$$

и, следовательно,

$$x(\cdot) \in B_{p,\theta}^r \iff x \in CB_{p,\theta}^{2^{\langle s, 1 \rangle}, |S|}(2^{\langle s, r-1/p \rangle})$$

для вектора $x = \{x_s \in R^{2^{\langle s, 1 \rangle}}, s \in S\}$, а с другой стороны, из (1) и (3) имеем

$$\left\| \sum_{s \in S} \delta_s x \right\|_{L_q} \gg \left(\sum_{s \in S} \|\delta_s x\|_{L_q}^{q^{**}} \right)^{1/q^{**}} \asymp \|x\|_{l_{q,q^{**}}^{2^{\langle s, 1 \rangle}, |S|}(2^{\langle s, -1/q \rangle})}.$$

Сводя оценку снизу поперечника функционального класса к оценке снизу поперечника конечномерного множества с помощью изоморфизма между пространством тригонометрических функций $x(\cdot) \in \mathcal{T}$ и конечномерным пространством $\mathbb{R}^{|K|}$ ($|K| := \text{card } K$), согласно теореме С далее получим

$$\begin{aligned} d_N(B_{p,\theta}^r, L_q) &\gg d_N(B_{p,\theta}^{2^{\langle s, 1 \rangle}, |S|}(2^{\langle s, r-1/p \rangle}), l_{q,q^{**}}^{2^{\langle s, 1 \rangle}, |S|}(2^{\langle s, -1/q \rangle})) \\ &= d_N(B_{p,\theta}^{2^{\langle s, 1 \rangle}, |S|}(2^{\langle s, r-1/p+1/q \rangle}), l_{q,q^{**}}^{2^{\langle s, 1 \rangle}, |S|}). \end{aligned}$$

Возьмем $S = \{s = (s_1, \dots, s_{l+1}, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d \mid \langle s, 1 \rangle = m\}$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $|S| \asymp m^l$ и

$$d_N(B_{p,\theta}^r, L_q) \gg 2^{-m(r_1-1/p+1/q)} d_N(B_{p,\theta}^{2^m, |S|}, l_{q,q^{**}}^{2^m, |S|}). \quad (6)$$

Если вместо неравенства А воспользуемся неравенством В, то при $q \leq 2$, как и в работе [5], получаем, что

$$\|x\|_q \gg \left(\sum_{s \in S} \|2^{\langle s, 1/2-1/q \rangle} \delta_s x\|_q^2 \right)^{1/q} \asymp 2^{-m/q} \left(\sum_{s \in S} \|x_s\|_{l_2^{2m}}^q \right)^{1/q} = 2^{-m/q} \|x\|_{l_{2,q}^{2m, |S|}}.$$

И мы аналогично получим другую формулу для оценки снизу поперечника:

$$d_N(B_{p,\theta}^r, L_q) \gg 2^{-m(r_1-1/p+1/q)} d_N(B_{p,\theta}^{2^m,|S|}, l_{2,q}^{2^m,|S|}), \quad q \leq 2. \quad (7)$$

Для случая “больших” гладкостей (именно эти случаи и рассматриваются в теореме) величина m выбирается таким образом, чтобы число гармоник в множестве K было порядка N ($|K| = \sum_{s \in S} |\square_s| = \sum_{s \in S} 2^{(s,1)} = |S| 2^m \asymp m^l 2^m \asymp N$) и не менее $2N$ ($|K| \geq 2N$).

а) Пусть $p \geq q \geq 2$. Тогда $q^{**} = q$. В этом случае оценка снизу доказывается по неравенству $\|\cdot\|_{L_q} \geq \|\cdot\|_{L_2}$ при $q \geq 2$, формуле (6), вложению $B_{p,\theta}^{2^m,|S|} \supset 2^{-m/p} B_{\infty,\theta}^{2^m,|S|}$, вложениям $B_{\infty,\theta}^{2^m,|S|} \supset B_{\infty,1}^{2^m,|S|}$ и $B_{\infty,\theta}^{2^m,|S|} \supset |S|^{-1/\theta} B_{\infty}^{2^m,|S|}$, оценке поперечников $d_N(B_{\infty,1}^{2^m,|S|}, l_2^{2^m,|S|}) \asymp 2^{m/2}$ (по лемме), $d_N(B_{\infty}^n, l_q^n) = (n-N)^{1/q}$ (известный результат Пича [10], Стесина [11]):

$$\begin{aligned} d_N(B_{p,\theta}^r, L_q) &\geq d_N(B_{p,\theta}^r, L_2) \gg 2^{m(-r_1+1/p-1/2)} d_N(B_{p,\theta}^{2^m,|S|}, l_2^{2^m,|S|}) \\ &\geq 2^{m(-r_1+1/p-1/2)} 2^{-m/p} d_N(B_{\infty,\theta}^{2^m,|S|}, l_2^{2^m,|S|}) \\ &\geq 2^{m(-r_1-1/2)} \max\{d_N(B_{\infty,1}^{2^m,|S|}, l_2^{2^m,|S|}), |S|^{-1/\theta} d_N(B_{\infty}^{2^m,|S|}, l_2^{2^m,|S|})\} \\ &\asymp 2^{m(-r_1-1/2)} \max\{2^{m/2}, |S|^{-1/\theta} |S|^{1/2} 2^{m/2}\} \\ &= 2^{-mr_1} \max\{1, |S|^{1/2-1/\theta}\} = 2^{-mr_1} |S|^{(1/2-1/\theta)_+} \\ &\asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \log^{(l/2-l/\theta)_+} N. \end{aligned}$$

б) Пусть $p \geq 2 > q$. Тогда $q^{**} = 2$. В этом случае оценка снизу следует по формуле (6), неравенству для средних $\|\cdot\|_{l_2|S|} \geq |S|^{1/2-1/q} \|\cdot\|_{l_q|S|}$ при $q \leq 2$, вложению $B_{p,\theta}^{2^m,|S|} \supset 2^{-m/p} |S|^{-1/\theta} B_{\infty}^{2^m,|S|}$, оценке поперечника $d_N(B_{\infty}^{2^m,|S|}, l_q^{2^m,|S|})$ (см. п. а)):

$$\begin{aligned} d_N(B_{p,\theta}^r, L_q) &\gg 2^{m(-r_1+1/p-1/q)} d_N(B_{p,\theta}^{2^m,|S|}, l_{q,2}^{2^m,|S|}) \\ &\geq 2^{m(-r_1+1/p-1/q)} |S|^{1/2-1/q} d_N(B_{p,\theta}^{2^m,|S|}, l_q^{2^m,|S|}) \\ &\geq 2^{m(-r_1-1/q)} |S|^{1/2-1/q-1/\theta} d_N(B_{\infty}^{2^m,|S|}, l_q^{2^m,|S|}) \\ &\asymp 2^{m(-r_1-1/q)} |S|^{1/2-1/q-1/\theta} 2^{m/q} |S|^{1/q} = 2^{-mr_1} |S|^{1/2-1/\theta} \\ &\asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \log^{l/2-l/\theta} N. \end{aligned}$$

г) Пусть $p \leq q \leq 2$. В этом случае оценка снизу следует по формуле (7), вложению $B_{p,\theta}^{2^m,|S|} \supset |S|^{-1/\theta} B_{1,\infty}^{2^m,|S|}$, вложению $B_{p,\theta}^{2^m,|S|} \supset B_1^{2^m,|S|}$, неравенству $\|\cdot\|_{l_q} \geq \|\cdot\|_{l_2}$ при $q \leq 2$, оценке поперечников $d_N(B_{1,\infty}^{2^m,|S|}, l_{2,q}^{2^m,|S|}) \asymp |S|^{1/q}$ (Галеев [7]), $d_N(B_1^n, l_2^n) = \sqrt{1-N/n}$ (см. Колмогоров–Петров–Смирнов [12], Мальцев [13], а также Стечкин [14]):

$$\begin{aligned}
d_N(B_{p,\theta}^r, L_q) &\gg 2^{m(-r_1+1/p-1/q)} d_N(B_{p,\theta}^{2^m, |S|}, l_{2,q}^{2^m, |S|}) \\
&\geq 2^{m(-r_1+1/p-1/q)} \max\{|S|^{-1/\theta} d_N(B_{1,\infty}^{2^m, |S|}, l_{2,q}^{2^m, |S|}), d_N(B_1^{2^m, |S|}, l_{2,q}^{2^m, |S|})\} \\
&\geq 2^{m(-r_1+1/p-1/q)} \max\{|S|^{-1/\theta} d_N(B_{1,\infty}^{2^m, |S|}, l_{2,q}^{2^m, |S|}), d_N(B_1^{2^m, |S|}, l_2^{2^m, |S|})\} \\
&\asymp 2^{m(-r_1+1/p-1/q)} \max\{|S|^{1/q-1/\theta}, 1\} \asymp 2^{m(-r_1+1/p-1/q)} |S|^{(1/q-1/\theta)_+} \\
&\asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-1/p+1/q} \log^{(l/q-1/\theta)_+} N.
\end{aligned}$$

в), д) Пусть $p \leq 2 \leq q$ или $2 \leq p \leq q$. В этом случае оценка снизу в силу неравенства $\|\cdot\|_{L_q} \geq \|\cdot\|_{L_2}$ при $q \geq 2$ сводится к уже доказанным соответственно в пунктах г) и а) оценкам поперечников при $q = 2$:

$$d_N(B_{p,\theta}^r, L_q) \geq d_N(B_{p,\theta}^r, L_2) \asymp \begin{cases} \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-1/p+1/2} \log^{(l/2-1/\theta)_+} N, & p \leq 2, \\ \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \log^{(l/2-1/\theta)_+} N, & p \geq 2. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. а) Если в формуле (5) вместо классов $B_{p,\theta}^r$ взять классы Гёльдера–Никольского $H_p^r = B_{p,\infty}^r$, то получим следующую формулу для оценки сверху поперечников по Колмогорову:

$$d_N(H_p^r, L_q) \ll \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} (2^{\langle s, -\alpha \rangle} d_{N_s}(B_p^{2^{\langle s, 1 \rangle}}, l_q^{2^{\langle s, 1 \rangle}}))^{q^*} \right)^{1/q^*}. \quad (5')$$

б) Поскольку по неравенству А $W_p^r \in B_{p,p^{**}}^r$ ($p^{**} = \max\{p, 2\}$), а $\theta = p^{**} \leq q^* \iff \max\{p, 2\} \leq \min\{q, 2\} \iff p \leq 2 \leq q$, то по формуле (5)

$$d_N(W_p^r, L_q) \ll \begin{cases} \sup_{s \in \mathbb{N}^d} 2^{\langle s, -\alpha \rangle} d_{N_s}(B_p^{2^{\langle s, 1 \rangle}}, l_q^{2^{\langle s, 1 \rangle}}), & p \leq 2 \leq q, \\ \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} (2^{\langle s, -\alpha \rangle} d_{N_s}(B_p^{2^{\langle s, 1 \rangle}}, l_q^{2^{\langle s, 1 \rangle}}))^{q^* p^{**}/(p^{**} - q^*)} \right)^{1/q^* - 1/p^{**}} & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5'')$$

в) Аналогично из формул (6), (7) получаются формулы для оценок снизу поперечников по Колмогорову классов функций H_p^r и W_p^r (поскольку $W_p^r \in B_{p,p^*}^r$, $p^* := \min\{p, 2\}$). Выпишем аналог формулы (6) для классов W_p^r :

$$d_N(W_p^r, L_q) \gg 2^{-m(r_1-1/p+1/q)} d_N(B_{p,p^*}^{2^m, |S|}, l_{2,q^{**}}^{2^m, |S|}). \quad (6')$$

Полученными формулами (5)–(7), (5'), (5''), (6') можно пользоваться для оценок поперечников функциональных классов для больших и малых гладкостей, выбирая N_s , m и подставляя оценки поперечников конечномерных множеств.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Формулы (5)–(7), (5'), (5''), (6') являются справедливыми не только для колмогоровских поперечников, но и для других поперечников (линейных, проекционных, ортопроекционных и т.д.).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Галеев Э. М. О линейных поперечниках классов периодических функций многих переменных // Вестн. МГУ. Сер. матем., мех. 1987. № 4. С. 13–16.
- [2] Темляков В. Н. Приближение функций об ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН. 1986. Т. 178. С. 3–112.
- [3] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. I, II. М.: Мир, 1965.
- [4] Галеев Э. М. Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных W_p^r и H_p^r в пространстве L_q // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 3. С. 916–934.
- [5] Галеев Э. М. Поперечники по Колмогорову классов периодических функций одной и нескольких переменных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 2. С. 418–430.
- [6] Романюк А. С. Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. матем. ж. 1991. Т. 43. № 10. С. 1398–1408.
- [7] Galeev E. M. Approximation for Besov classes of periodic functions of several variables // Тезисы докл. межд. конф. по теории аппроксимации.. Венгрия: Кечкемет 1990. С. 20.
- [8] Капин Б. С. Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41. № 2. С. 334–351.
- [9] Глускин Е. Д. Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Матем. сб. 1983. Т. 120. С. 120–189.
- [10] Pietsch A. s -numbers of operators in Banach spaces // Stud. Math. 1974. V. 51. № 3. P. 201–223.
- [11] Стесин М. И. Александровские поперечники конечномерных множеств и классов гладких функций // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. № 6. С. 1278–1281.
- [12] Колмогоров А. Н., Петров А. А., Смирнов Ю. М. Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11. № 6. С. 561–566.
- [13] Мальцев А. И. Замечание к работе А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова, Ю. М. Смирнова “Одна формула Гаусса из теории наименьших квадратов” // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11. № 6. С. 567–568.
- [14] Стечкин С. Б. О наилучших приближениях заданных классов любыми полиномами // УМН. 1954. Т. 9. № 1. С. 133–134.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
 E-mail: elfat@galeev.mccme.ru

Поступило
 23.12.1997
 Исправленный вариант
 03.03.2000