Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. С. Казарян, Е. М. Семёнов, RUC-базисы и система Олевского, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 4, 566–579

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm53>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:34:32

RUC-БАЗИСЫ И СИСТЕМА ОЛЕВСКОГО

К. С. Казарян, Е. М. Семенов

В работе изучаются RUC-базисные свойства системы Олевского в перестановочно-инвариантных пространствах. В частности, доказано, что система Олевского образует RUC-базис в $L_p[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $2 \leq p < \infty$.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Банахово пространство E измеримых на $[0, 1]$ функций называется *симметричным* или *перестановочно-инвариантным* (сокращенно *i.i.*), если

- 1) из $|x(t)| \leq |y(t)|$ для всех $t \in [0, 1]$ и $y \in E$ вытекает $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$;
- 2) из равноизмеримости функций $x(t)$ и $y(t)$ и $y \in E$ вытекает $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$ (см. [1], [2]).

Пусть E – банахово пространство. Базисная последовательность $\{x_k\} \subset E$ называется *RUC-последовательностью* (соответственно *безусловной* последовательностью), если существует такая константа $M > 0$, что неравенство

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n c_k r_k(s) x_k \right\|_E ds \leq M \left\| \sum_{k=1}^n c_k x_k \right\|_E \quad (1)$$

$$\left(\text{соответственно } \max_{\varepsilon_k = \pm 1} \left\| \sum_{k=1}^n c_k \varepsilon_k x_k \right\|_E \leq M \left\| \sum_{k=1}^n c_k x_k \right\|_E \right) \quad (2)$$

справедливо для любого $n \in \mathbb{N}$, любых чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$, где $r_k(s) = \text{sign} \sin 2^k \pi s$ – функции Радемахера. Очевидно, всякая безусловная последовательность является RUC-последовательностью. Обратное, вообще говоря, неверно. Понятие RUC-последовательности было введено в работе [3] и с тех пор интенсивно изучалось.

Базис, который является RUC-системой, называется *RUC-базисом*. Для того, чтобы тригонометрическая система или система Уолша была RUC-базисом в L_p , необходимо и достаточно, чтобы $2 \leq p < \infty$ [3]. Эти системы образуют RUC-базис в пространстве Орлича G [3] (определения смотри ниже), в котором, как известно, не существует безусловного базиса.

Работа выполнена при поддержке фондов SAB государственного секретариата образования, культуры и спорта Испании, грант № 2000-0002, фонда BFM, грант № 2001-0189, Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00146, программы “Университеты России”, грант № УР.04.01.051.

Тригонометрическая система и система Уолша являются РУС-базисами в L^p , $2 < p < \infty$, благодаря тому, что эти системы ортонормированы и равномерно ограничены. До сих пор не был известен пример ортонормированной системы (о.н.с.), которая была бы базисом в L^1 и РУС-базисом в L^p тогда и только тогда, когда $p \in [2, +\infty)$. Мы решаем эту задачу. В пространстве L_1 не существует РУС-базиса [3].

Наименьшая константа M в (1) называется РУС-константой системы $X = \{x_k\}$ в пространстве E и обозначается через $\gamma(X, E)$. Ясно, что она совпадает с нормой оператора

$$Tx(t, s) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k(s) c_k(x) x_k(t)$$

из E в $L_1(E)$, где $c_k(x)$ – базисные коэффициенты.

Функции Хаара $h_{0,0}(t) = 1$,

$$h_{k,j}(t) = \begin{cases} 2^{k/2}, & \frac{2j-2}{2^{k+1}} < t < \frac{2j-1}{2^{k+1}}, \\ -2^{k/2}, & \frac{2j-1}{2^{k+1}} < t < \frac{2j}{2^{k+1}}, \\ 0 & \text{для остальных } t \in [0, 1], \end{cases}$$

где $1 \leq j \leq 2^k$, $k = 0, 1, \dots$, пронумерованные естественным образом, образуют базис в любом сепарабельном г.и. пространстве [4, гл. 3, п. 3] или [5, п. 4.а.3]. Мы будем также использовать одноиндексную систему Хаара $h_n = h_{k,j}$, где $n = 2^k + j$. Как обычно, интервал $((j-1)2^{-k}, j2^{-k})$ обозначается Δ_k^j .

Система функций

$$\Psi_n(t) = \Psi_{k,j}(t) = 2^{-k/2} \sum_{i=1}^{2^k} h_i(\xi_j) h_{k,i}(t),$$

где $\xi_j = 2^{-k-1} + (j-1)2^{-k}$, $1 \leq j \leq 2^k$, была введена Олевским [6]. Эта ортонормированная система обладает рядом интересных свойств. Она образует базис в L_1 и C (естественно, сходимость понимается в L_∞). Поэтому в силу теоремы Кальдерона–Митягина (см. [1, п. 2.а.10] или [2, п. 2.4.3]) система Олевского образует базис в любом сепарабельном г.и. пространстве. В [7] было доказано, что система Олевского не является безусловным базисом в L_p , $p \neq 2$. Более того, если система Олевского образует безусловный базис в сепарабельном г.и. пространстве E , то E с точностью до эквивалентности совпадает с L_2 [5, теорема 17.1]. Целью настоящей работы является изучение вопроса о том, когда система Олевского образует РУС-базис в сепарабельном г.и. пространстве. В отличие от сформулированного выше утверждения ответ зависит от вложений в шкале пространств L_p .

Приведем необходимые сведения о г.и. пространствах. Пусть $1 \leq q < \infty$; г.и. пространство E называется q -вогнутым, если существует такое $C > 0$, что

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_E^q \right)^{1/q} \leq C \left\| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q \right)^{1/q} \right\|_E$$

для любой последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ и любого $n \in \mathbb{N}$.

В любом г.и. пространстве непрерывно действует оператор подобного преобразования аргумента

$$\sigma_\tau x(t) = \begin{cases} x\left(\frac{t}{\tau}\right), & 0 \leq t \leq \min(1, \tau), \\ 0 & \text{для остальных } t \in [0, 1] \end{cases}$$

и $\|\sigma_\tau\|_E \leq \max(1, \tau)$. Числа

$$\alpha_E = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau}, \quad \beta_E = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau},$$

называются *индексами Бойда* пространства E . Справедливы неравенства $0 \leq \alpha_E \leq \beta_E \leq 1$.

Приведем наиболее важные примеры г.и. пространств. Если $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, то через $L_{p,q}$ обозначается множество измеримых на $[0, 1]$ функций, для которых

$$\|x\|_{p,q} = \left(\frac{q}{p} \int_0^1 (x^*(t) t^{1/p})^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty,$$

где $x^*(t)$ – перестановка $|x(t)|$ в убывающем порядке. Если $q > p$, то $\|x\|_{p,q}$ есть квазинорма, эквивалентная некоторой норме.

Пусть $M(u)$ – возрастающая, выпуклая функция на $[0, \infty)$,

$$M(0) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{M(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{M(u)} = 0.$$

Тогда через L_M обозначается множество измеримых функций, для которых

$$\|x\|_{L_M} = \inf \left\{ \lambda: \lambda > 0, \int_0^1 M\left(\frac{|x(t)|}{\lambda}\right) dt \leq 1 \right\} < \infty.$$

Замыкание L_∞ в пространстве Орлича L_M , где $M(u) = e^{u^2} - 1$, обозначается через G . Пространство G есть сепарабельное г.и. пространство.

2. Пространства L_p . Введем обозначения

$$F_k = \text{span}\{h_n, 1 \leq n \leq 2^k\}, \quad F_{i,j} = \text{span}\{h_n, 2^i < n \leq 2^j\}.$$

Если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $x = \sum_{i=1}^{2^k} c_i h_{k,i}$, то положим

$$A_k x = r_k \sum_{i=1}^{2^k} c_i h_i.$$

Функции $\Psi_{k,j}$, $1 \leq j \leq 2^k$, образуют ортонормированный базис в $F_{k,k+1}$. Через $c_{k,j}(x)$ будем обозначать коэффициенты Фурье функции $x \in L_1$ по системе $\Psi_{k,j}$.

ЛЕММА 1. Если $x \in F_{k,k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, то

$$\sum_{i=1}^{2^k} c_{k,i}^2(x) \Psi_{k,i}^2(t) = \begin{cases} \int_0^1 (A_k x(u))^2 du, & \text{если } t \in \Delta_k^1 \cup \Delta_k^2, \\ 2^s \int_{\Delta_\nu^s} (A_k x(u))^2 du, & \text{если } t \in \Delta_k^{2^s+\nu}, \\ & \text{где } 1 \leq \nu \leq 2^s, 1 \leq s < k. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\Psi_{k,i}^2(1) = 1$ для $t \in \Delta_k^1 \cup \Delta_k^2$, то первая формула вытекает непосредственно из равенства Парсеваля.

Пусть $t \in \Delta_k^{2^s+\nu}$, где $1 \leq \nu \leq 2^s$, $1 \leq s < k$. Тогда

$$|\Psi_{k,i}(t)| = |2^{-k/2} h_{s,\nu}(\xi_i) h_{k,2^s+\nu}(t)|.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2^k} c_{k,i}^2(x) \Psi_{k,i}^2(t) &= \sum_{(\nu-1)2^{k-s} < i \leq \nu 2^{k-s}} c_{k,i}^2(x) \Psi_{k,i}^2(t) = 2^s \sum_{(\nu-1)2^{k-s} < i \leq \nu 2^{k-s}} c_{k,i}^2(x) \\ &= 2^s \sum_{(\nu-1)2^{k-s} < i \leq \nu 2^{k-s}} \left(2^{-k/2} \sum_{l=1}^{2^k} h_l(\xi_i) \int_0^1 x(u) h_{k,l}(u) du \right)^2 \\ &= 2^s \sum_{(\nu-1)2^{k-s} < i \leq \nu 2^{k-s}} 2^{-k} \left(\sum_{l=1}^{2^k} h_l(\xi_i) \int_0^1 A_k x(u) r_k(u) h_l(u) du \right)^2 \\ &= 2^s \int_{\Delta_\nu^s} A_k^2 x(u) du. \end{aligned}$$

Выше мы использовали тот факт, что функция $r_k A_k x$ принадлежит пространству F_k , а также равенства

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(u) h_{k,l}(u) du &= \int_0^1 A_k x(u) r_k(u) h_l(u) du, \\ \sum_{l=1}^{2^k} h_l(t) \int_0^1 A_k x(u) r_k(u) h_l(u) du &= A_k x(t) r_k(t). \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Если $2 \leq p < \infty$, то существует такая константа $C_p > 0$, что

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^k} c_{k,i}^2(x) \Psi_{k,i}^2(t) \right)^{p/2} dt \leq C_p \int_0^1 |x(t)|^p dt \quad (3)$$

для всех $x \in L_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $p = 2$ утверждение очевидно, поэтому мы будем предполагать, что $2 < p < \infty$. В силу леммы Фату достаточно доказать, что существует такая константа $C_p > 0$, что

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{2^k} c_{k,i}^2(x) \Psi_{k,i}^2(t) \right)^{p/2} dt \leq C_p \int_0^1 |x(t)|^p dt$$

для любого $m \in \mathbb{N}$ и любого $x \in F_{m+1}$. Через $\mathfrak{a}_e(t)$ мы будем обозначать характеристическую функцию измеримого множества $e \subset [0, 1]$. Обозначим

$$x_i = x \mathfrak{a}_{(2^{-i}, 2^{-i+1}]}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad x_{m+1} = x \mathfrak{a}_{(0, 2^{-m}]},$$

$S_k x$ – проекция x на F_k , т.е. $S_k x$ есть частная сумма ряда по системе Хаара порядка 2^k , $x_{i,k}$ – проекция x_i на $F_{k,k+1}$, $1 \leq k \leq m$, $x_{i,0}$ – проекция x_i на F_1 . Тогда $x_i = \sum_{k=0}^m x_{i,k}$.

Обозначим через $T_{m,i}$, $1 \leq i \leq m+1$, аффинное преобразование отрезка $[0, 1]$ в

$$[2^{-i}, 2^{-i+1}], \quad 1 \leq i \leq m, \quad [0, 2^{-m}], \quad i = m+1.$$

Тогда

$$A_k x_{k,i}(t) = \begin{cases} r_k(t) 2^{-i/2} x_{i,k}(T_{m,i}(t)), & i \leq k \leq m \\ r_k(t) r_1(t) 2^{-k/2} x_{i,k}(2^{-k}t), & 1 \leq k < i \leq m+1. \end{cases} \quad (4)$$

Действительно, если $i \leq k \leq m$, то

$$x_{i,k}(t) = \sum_{j=2^{k-i}+1}^{2^{k-i+1}} c_{k,j} h_{k,j}(t)$$

и тогда

$$\begin{aligned} A_k x_{i,k}(t) &= r_k(t) \sum_{j=2^{k-i}+1}^{2^{k-i+1}} c_{k,j} h_j(t) \\ &= r_k(t) \sum_{j=1}^{2^{k-i}} c_{k,j} h_{k-i,j}(t) = r_k(t) 2^{-i/2} x_{i,k}(T_{m,i}(t)). \end{aligned}$$

Если $1 \leq k < i$, то $x_{i,k} = c_{k,1} h_{k,1}$ и

$$A_k x_{i,k}(t) = r_k(t) c_{k,1} h_1(t) = r_k(t) r_1(t) 2^{-k/2} x_{i,k}(2^{-k}t).$$

В силу леммы 1

$$\sum_{\nu=1}^{2^l} c_{l,\nu}^2(x_{i,k}) \Psi_{l,\nu}^2(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{2^k} \Gamma_{k,j,i} \mathfrak{a}_{\Delta_k^j}(t), & l = k, \\ 0, & l \neq k, \end{cases}$$

где

$$\Gamma_{k,j,i} = \begin{cases} \int_0^1 A_k^2 x_{i,k}(t) dt, & j = 1, 2, \\ 2^s \int_{\Delta_s^\nu} A_k^2 x_{i,k}(t) dt, & j = 2^s + \nu, \quad 1 \leq \nu \leq 2^s, \quad 1 \leq s < k. \end{cases}$$

Так как $A_k x_{i,k} \in F_{k-i,k-i+1}$, то

$$\Gamma_{k,j,i} = \begin{cases} 2^{-i} \int_0^1 x_{i,k}^2(T_{m,i}(t)) dt, & j = 1, 2, \\ 2^{s-i} \int_{\Delta_s^\nu} x_{i,k}^2(T_{m,i}(t)) dt, & j = 2^s + \nu. \end{cases} \quad (5)$$

Отсюда

$$\sum_{l=1}^m \sum_{\nu=1}^{2^l} c_{l,\nu}^2(x_i) \Psi_{l,\nu}^2(t) = \sum_{k=1}^m \sum_{\nu=1}^{2^k} c_{k,\nu}^2(x_{i,k}) \Psi_{k,\nu}^2(t) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{2^k} \Gamma_{k,j,i} \mathfrak{A}_{\Delta_k^j}(t)$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\sum_{l=1}^m \sum_{\nu=1}^{2^l} c_{l,\nu}^2(x_i) \Psi_{l,\nu}^2(t) \right)^{p/2} dt &= \int_0^{2^{-m+1}} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{2^k} \Gamma_{k,j,i} \mathfrak{A}_{\Delta_k^j}(t) \right)^{p/2} dt \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^{m-1} \int_{2^{-\mu}}^{2^{-\mu+1}} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{2^k} \Gamma_{k,j,i} \mathfrak{A}_{\Delta_k^j}(t) \right)^{p/2} dt. \end{aligned}$$

Используя (5), получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^{2^{-m+1}} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{2^k} \Gamma_{k,j,i} \mathfrak{A}_{\Delta_k^j}(t) \right)^{p/2} dt \\ &= 2^{-m+1} \left(\sum_{k=1}^{i-1} 2^{-k} \int_0^1 x_{i,k}^2(T_{k,0}(t)) dt + \sum_{k=i}^m 2^{-i} \int_0^1 x_{i,k}^2(T_{m,i}(t)) dt \right)^{p/2} \\ &= 2^{-m+1} \left(\int_0^1 \sum_{k=1}^m x_{i,k}^2(t) dt \right)^{p/2} \leq 2^{-m+1} \left(\int_0^1 x_i^2(t) dt \right)^{p/2} \\ &= 2^{-m+1} \left(\int_{2^{-i}}^{2^{-i+1}} x^2(t) dt \right)^{p/2} \leq \begin{cases} 2^{-m+1-i(p/2-1)} \int_{2^{-i}}^{2^{-i+1}} |x(t)|^p dt, & 1 \leq i \leq m, \\ 2^{-m+1-m(p/2-1)} \int_0^{2^{-m}} |x(t)|^p dt, & i = m+1, \end{cases} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu=1}^{m-1} \int_{2^{-\mu}}^{2^{-\mu+1}} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{2^k} \Gamma_{k,j,i} \mathfrak{A}_{\Delta_k^j}(t) \right)^{p/2} dt \\ &= \sum_{\mu=1}^{m-1} \int_{2^{-\mu}}^{2^{-\mu+1}} \left(\sum_{k=1}^{\mu-1} \Gamma_{k,1,i} + \sum_{k=\mu}^m \sum_{j=2^{k-\mu}+1}^{2^k-\mu+1} \Gamma_{k,j,i} \mathfrak{A}_{\Delta_k^j}(t) \right)^{p/2} dt \\ &= \sum_{\mu=1}^{m-1} \int_{2^{-\mu}}^{2^{-\mu+1}} \left(\sum_{k=1}^{\mu-1} \int_0^1 (A_k x_{i,k}(s))^2 ds + \sum_{k=\mu}^m S_{k-\mu} (A_k x_{i,k})^2 (T_{m,\mu}^{-1}(t)) \right)^{p/2} dt. \end{aligned}$$

В силу (4) последнее выражение равно

$$\sum_{\mu=1}^{m-1} \int_{2^{-\mu}}^{2^{-\mu+1}} \left(\sum_{k=1}^{\mu-1} 2^{-k} \int_0^1 \xi_{i,k}(s) ds + \sum_{k=\mu}^{i-1} 2^{-k} S_{k-\mu}(\xi_{i,k})(T_{m,\mu}^{-1}(t)) \right. \\ \left. + 2^{-i} \sum_{k=i}^m S_{k-\mu}(\xi_{i,k})(T_{m,\mu}^{-1}(t)) \right)^{p/2} dt,$$

где

$$\xi_{i,k}(t) = \begin{cases} x_{i,k}^2(T_{k,0}(t)), & 1 \leq k \leq i, \\ x_{i,k}^2(T_{m,i}(t)), & i < k \leq m. \end{cases}$$

Если $1 \leq k \leq i$, то функция $\xi_{i,k}(t) = x_{i,k}^2(T_{k,0}(t))$ постоянна на $[0, 1]$. Поэтому для $1 \leq \mu < i$ имеем

$$\sum_{k=\mu}^{i-1} 2^{-k} S_{k-\mu}(\xi_{i,k})(T_{m,\mu}^{-1}(t)) = \sum_{k=\mu}^{i-1} 2^{-k} \int_0^1 x_{i,k}^2(T_{k,0}(t)) dt = \sum_{k=\mu}^{i-1} \int_0^1 x_{i,k}^2(t) dt.$$

Если $\mu \leq i < k \leq m$, то $\xi_{i,k}(t) = x_{i,k}^2(T_{m,i}(t))$ принадлежит F_{k-i} и

$$S_{k-\mu}(\xi_{i,k})(T_{m,\mu}^{-1}(t)) = \xi_{i,k}(T_{m,\mu}^{-1}(t)).$$

Отсюда

$$\sum_{\mu=1}^{m-1} \int_{2^{-\mu}}^{2^{-\mu+1}} \left(\sum_{k=1}^{\mu-1} 2^{-k} \int_0^1 \xi_{i,k}(s) ds + \sum_{k=\mu}^{i-1} 2^{-k} S_{k-\mu}(\xi_{i,k})(T_{m,\mu}^{-1}(t)) \right. \\ \left. + 2^{-i} \sum_{k=i}^m S_{k-\mu}(\xi_{i,k})(T_{m,\mu}^{-1}(t)) \right)^{p/2} dt \\ = \sum_{\mu=1}^{m-1} \int_{2^{-\mu}}^{2^{-\mu+1}} \left(\sum_{k=1}^{i-1} x_{i,k}^2(s) ds + 2^{-i} \sum_{k=i}^m \xi_{i,k}(T_{m,\mu}^{-1}(t)) \right)^{p/2} dt.$$

Пусть $1 \leq i \leq m$. Тогда

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{i-1} x_{i,k}^2(s) ds = \int_0^1 S_i^2 x_i(s) ds = \int_{2^{-i}}^{2^{-i+1}} S_i^2 x_i(s) ds = 2^{-i} S_i x_i(t)$$

для $t \in (2^{-i}, 2^{-i+1})$ и

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^m x_{m+1,k}^2(t) dt = \int_0^1 S_m^2 x_{m+1}(t) dt = \int_0^{2^{-m}} S_m^2 x_{m+1}(t) dt = 2^{-m} S_m x_{m+1}(s)$$

для $s \in (0, 2^{-m})$.

Следовательно, если $1 \leq \mu \leq m-1$ и $1 \leq i \leq m$, то в силу теоремы Марцинкевича [4, гл. 3, теорема 9]

$$\begin{aligned} \int_{2^{-\mu}}^{2^{-\mu+1}} \left(\sum_{l=1}^m \sum_{\nu=1}^{2^l} c_{l,\nu}^2(x_i) \Psi_{l,\nu}^2(t) \right)^{p/2} dt &= \int_{2^{-\mu}}^{2^{-\mu+1}} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{j=2^{k-\mu}+1}^{2^{k-\mu+1}} \Gamma_{k,j,i} \mathfrak{A}_{\Delta_k^j}(t) \right)^{p/2} dt \\ &\leq 2^{-\mu-ip/2} \int_0^1 \left(S_i^2 x_i(T_{m,i}(t)) \sum_{k=i}^m x_{i,k}^2(T_{m,i}(t)) \right)^{p/2} dt \\ &\leq 2^{-\mu-ip/2} B_p^p \int_0^1 |x_i(T_{m,i}(t))|^p dt = 2^{-\mu-i(p/2-1)} B_p^p \int_{2^{-i}}^{2^{-i+1}} |x_i(t)|^p dt, \end{aligned}$$

где B_p – константа из теоремы Марцинкевича. Отсюда для $1 \leq i \leq m$ получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\sum_{l=1}^m \sum_{\nu=1}^{2^l} c_{l,\nu}^2(x_i) \Psi_{l,\nu}^2(t) \right)^{p/2} dt &\leq 2^{-m+1} 2^{-i(p/2-1)} \int_{2^{-i}}^{2^{-i+1}} |x_i(t)|^p dt \\ &+ \sum_{\mu=1}^{m-1} 2^{-\mu-i(p/2-1)} B_p^p \int_{2^{-i}}^{2^{-i+1}} |x_i(t)|^p dt < (1 + B_p^p) 2^{-i(p/2-1)} \int_0^1 |x(t)|^p dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогичную оценку можно получить для $i = m+1$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\sum_{l=1}^m \sum_{\nu=1}^{2^l} c_{l,\nu}^2(x_{m+1}) \Psi_{l,\nu}^2(t) \right)^{p/2} dt &\leq 2^{-m+1-m(p/2-1)} \int_0^{2^{-m}} |x_{m+1}(t)|^p dt \\ &+ 2^{-mp/2} \sum_{\mu=1}^{m-1} 2^{-\mu} \int_0^{2^{-m}} |x_{m+1}(t)|^p dt \leq 2^{-mp/2+2} \int_0^{2^{-m}} |x_{m+1}(t)|^p dt. \end{aligned}$$

Так как

$$x = \sum_{i=1}^{m+1} x_i,$$

то

$$\begin{aligned} c_{k,j}^2(x) &= \left(\sum_{i=1}^{m+1} c_{k,j}(x_i) 2^{(i/8)(1-2/p)} \cdot 2^{-(i/8)(1-2/p)} \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{m+1} 2^{-(i/4)(1-2/p)} \right) \sum_{i=1}^{m+1} c_{k,j}^2(x_i) 2^{(i/4)(1-2/p)} \\ &< (1 - 2^{1/(2p)-1/4})^{-1} \sum_{i=1}^{m+1} c_{k,j}^2(x_i) 2^{(i/4)(1-2/p)} \end{aligned} \quad (7)$$

для любых $k = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, 2^k$. Применяя (7), неравенство треугольника и (6), получаем

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{2^k} c_{k,j}^2(x) \Psi_{k,j}^2(t) \right)^{p/2} dt \right)^{1/p} \\
 & \leq (1 - 2^{1/(2p)-1/4})^{-1/2} \left(\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{2^k} \sum_{i=1}^{m+1} c_{k,j}^2(x_i) 2^{(i/2)(1-2/p)} \Psi_{k,j}^2(t) \right)^{p/2} dt \right)^{1/p} \\
 & \leq (1 - 2^{1/(2p)-1/4})^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^{m+1} 2^{(i/2)(1-2/p)} \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{2^k} c_{k,j}^2(x_i) \Psi_{k,j}^2(t) \right)^{p/2} dt \right)^{1/p} \\
 & \leq (1 - 2^{1/(2p)-1/4})^{-1/2} \sum_{i=1}^{m+1} (1 + B_p^p)^{1/p} 2^{(i/4)(1-2/p)-i(1/2-1/p)} \int_0^1 |x(t)|^p dt \\
 & < (1 - 2^{1/(2p)-1/4})^{-3/2} (1 + B_p^p)^{1/p} \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p}.
 \end{aligned}$$

Таким образом неравенство (3) установлено. В качестве C_p можно взять

$$(1 - 2^{1/(2p)-1/4})^{-3p/2} (1 + B_p^p).$$

3. Перестановочно-инвариантные пространства. Теперь мы можем получить основной результат работы – достаточное и отдельно необходимое условия RUC-базисности системы $\{\Psi_{n,k}\}$ в г.и. пространстве E . Обозначим через $E(l_2)$ пространство последовательностей функций из E с нормой $\|\{x_i\}\|_{E(l_2)} = \|(\sum x_i^2)^{1/2}\|_E$.

ТЕОРЕМА 1. Если E – сепарабельное г.и. пространство, $\beta_E < 1/2$, E q -вогнуто для некоторого $q < \infty$, то система Олевского образует RUC-базис в E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Морэ [1, п. 1.d.6] существует такая константа $C > 0$, что

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2} \right\|_E \leq \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(s) y_i \right\|_E ds \leq C \left\| \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2} \right\|_E \quad (8)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$ и любой последовательности $\{y_i\} \in E$. Отсюда и из леммы 2 вытекает, что линейный оператор A , определенный на $\text{span}\{\Psi_n\}$ равенствами $A\Psi_n = r_n \otimes \Psi_n$, ограниченно действует из L_p в $L_1(L_p)$, $2 \leq p < \infty$, т.е. система Олевского – RUC-базис в L_p . По теореме Кахана [1, п. 1.e.13] нормы ряда по системе Радемахера с коэффициентами из произвольного банахова пространства в L_q , $1 \leq q < \infty$, эквивалентны; константы эквивалентности зависят только от q . Поэтому оператор A ограниченно действует из L_p в $L_p(L_p) = L_p(Q)$ для любого $p \in [2, \infty)$, где $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ с мерой Лебега. Хорошо известно [1, раздел 2.b], что $\alpha_E \geq 1/q$ для любого q -вогнутого г.и. пространства E . Таким образом, $0 < 1/q \leq \alpha_E \leq \beta_E < 1/2$. Применяя интерполяционную теорему Бойда [1, п. 2.b.11], получаем, что A ограничен из E в $E(Q)$. В силу [1, п. 2.d.1] нормы $\|\sum r_i \otimes x_i\|_{E(Q)}$ и $\|\{x_i\}\|_{E(l_2)}$ эквивалентны. Поэтому оператор A ограниченно действует из E в $E(l_2)$. Снова применяя (8), получаем, что оператор A ограничен из E в $L_1(E)$. Это и означает, что $\{\Psi_n\}$ – RUC-базис в E .

Для получения необходимых условий RUC-базисности системы $\{\Psi_{n,k}\}$ нам понадобится вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 3. Если базисная последовательность $\{x_k\}$ является РУС-базисом в банаховом пространстве E и подпоследовательность $\{x_{i_k}\}$ является безусловной, то подпространство $[x_{i_k}]$ дополняемо в E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что (1) выполнено для последовательности $\{x_k\}$ и (2) для $\{x_{i_k}\}$. Так как функции

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k r_k(s) x_k \right\|_E, \quad \left\| \sum_{k=1}^n c_k \varepsilon_k r_k(s) x_k \right\|_E$$

равноизмеримы для любых последовательностей $\varepsilon = \pm 1, c_1, c_2, \dots$, то

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n c_k \varepsilon_k r_k(s) x_k \right\|_E ds = \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n c_k r_k(s) x_k \right\|_E ds.$$

Это означает, что последовательность $c_k r_k(s) x_k$ является безусловной в $L_1(E)$ с константой 1. Следовательно (см. [8, п. 1.с.7]),

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i_k \leq n} c_{i_k} r_{i_k}(s) x_{i_k} \right\|_E ds \leq \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n c_k r_k(s) x_k \right\|_E ds \leq M \left\| \sum_{k=1}^n c_k x_k \right\|_E.$$

В силу (2)

$$\left\| \sum_{i_k \leq n} c_{i_k} x_{i_k} \right\|_E \leq M \left\| \sum_{i_k \leq n} c_{i_k} r_{i_k}(s) x_{i_k} \right\|_E$$

для любого $s \in [0, 1]$. Отсюда

$$\left\| \sum_{i_k \leq n} c_{i_k} x_{i_k} \right\|_E \leq M^2 \left\| \sum_{k=1}^n c_k x_k \right\|_E.$$

Это означает, что подпространство $[x_{i_k}]$ дополняемо и норма естественного проектора не превосходит M^2 .

Следующая теорема показывает, что оба предположения в теореме 1 существенны.

ТЕОРЕМА 2. Если система Олевского есть РУС-базис в сепарабельном г.и. пространстве E , то $G \subset E \subset L_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \right\| \leq \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n x_i r_i(s) \right\| ds$$

справедливо для всех банаховых пространств, $x_i \in E, n \in \mathbb{N}$ [1, п. 1.d.6]. Поэтому существует такая константа $M > 0$, что

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \Psi_i^2 \right)^{1/2} \right\|_E \leq M \left\| \sum_{i=1}^n a_i \Psi_i \right\|_E \quad (9)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых последовательностей $\{a_i\}$. Для заданного $n \in \mathbb{N}$ и неотрицательной последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n$ рассмотрим функцию $u(t) = \sum a_k h_k^1(t)$. Так как

$$h_k^1 = 2^{-k/2} \sum_{j=1}^{2^k} \Psi_{k,j},$$

то

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-k/2} \sum_{j=1}^{2^k} \Psi_{k,j}(t),$$

и в силу (9)

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k 2^{-k/2})^2 \sum_{j=1}^{2^k} \Psi_{k,j}^2(t) \right)^{1/2} \right\|_E \leq M \|u\|_E.$$

Из определения системы $\{\Psi_{k,j}\}$ вытекает, что

$$\sum_{j=1}^{2^k} \Psi_{k,j}^2(t) = 2^k$$

для всех $t \in [0, 1]$ за исключением конечного множества точек. Поэтому

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 2^{-k/2} \right)^{1/2} &\leq M \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i i^{1/2} \right) - a_k k^{1/2} \right) \mathfrak{A}_{(2^{-k-1}, 2^{-k})} \right\|_E \\ &\leq M \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k a_i i^{1/2} \right) \mathfrak{A}_{(2^{-k-1}, 2^{-k})} \right\|_E. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\sum_{i=1}^k a_i i^{1/2} = b_k.$$

Тогда $a_k = k^{-1/2}(b_k - b_{k-1})$, где $b_0 = 0$ и

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(b_k - b_{k-1})^2}{2^k k} \right)^{1/2} \leq M \left\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k \mathfrak{A}_{(2^{-k}, 2^{-k+1})} \right\|_E.$$

Рассмотрим функцию

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k-1}) \mathfrak{A}_{(\alpha_k, \alpha_{k-1})}(t), \quad \text{где } \alpha_k = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i}.$$

Хорошо известно, что оператор

$$Hx(t) = \int_t^1 \frac{x(s)}{s} ds$$

ограничен в L_p при $p \in [1, \infty)$. В частности, он ограничен в L_2 . Имеем

$$\begin{aligned}(Hy)(\alpha_k) &= \int_{\alpha_n}^1 y(t) \frac{dt}{t} = \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1}) \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k-1}} \frac{dt}{t} \\ &= \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1}) \ln \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \geq \gamma \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1}) = \gamma b_k,\end{aligned}$$

где

$$\gamma = \inf_{k \in \mathbb{N}} \ln \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} > 0.$$

Функция $Hy(t)$ не возрастает на $(0, 1]$. Поэтому

$$\gamma \sum b_k \mathfrak{A}_{(\alpha_{k+1}, \alpha_k)}(t) \leq Hy(t)$$

и

$$\gamma \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^2}{2^k k} \right)^{1/2} \leq \|Hy\|_{L_2} \leq \|H\|_{L_2} \|y\|_{L_2} \leq \|H\|_{L_2} M \left\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k \mathfrak{A}_{(2^{-k}, 2^{-k+1})} \right\|_E. \quad (10)$$

Так как

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k 2^k}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, то

$$\int_0^\tau y(t) dt \leq 2 \int_0^\tau \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \mathfrak{A}_{(2^{-k}, 2^{-k+1})}(t) \right) dt$$

для всех $\tau \in [0, 1]$. Учитывая, что последовательность $\{b_k\}$ монотонно возрастает, и используя [2, п. 2.4.3], получаем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^2}{2^k} \right)^{1/2} \leq 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^2}{2^k k} \right)^{1/2}. \quad (11)$$

Из (10), (11) вытекает неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k \mathfrak{A}_{(2^{-k}, 2^{-k+1})} \right\|_{L_2} \leq \frac{2}{\gamma} M \|H\|_{L_2} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k \mathfrak{A}_{(2^{-k}, 2^{-k+1})} \right\|_E.$$

Хорошо известно, что отсюда вытекает вложение $E \subset L_2$ и неравенство

$$\|x\|_{L_2} \leq \frac{4}{\gamma} M \|H\|_{L_2} \|x\|_E$$

для всех $x \in E$.

Докажем теперь другое вложение. Так как $\Psi_{k,1} = r_{k+1}$ и система Радемахера является безусловной в любом г.и. пространстве с константой 1, то в силу леммы 3 подпространство $[r_k]$ дополняемо в E . В [1, п. 2.b.4] доказано, что дополняемость $[r_k]$ в г.и. пространстве E эквивалентна вложениям $G \subset E \subset G^*$.

Из теорем 1 и 2 нетрудно получить конкретные утверждения для основных классов г.и. пространств.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $2 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, то $\{\Psi_{n,k}\}$ есть RUC-базис в $L_{p,q}$.

Если $1 < p < 2$, $1 \leq q < \infty$ или $p = 2$, $2 < q < \infty$, то $\{\Psi_{n,k}\}$ не является RUC-базисом в $L_{p,q}$.

Обозначим через L_M^0 замыкание L_∞ в L_M .

СЛЕДСТВИЕ 2. Если

$$4 < \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{M(2u)}{M(u)} \leq \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{M(2u)}{M(u)} < \infty,$$

то $\{\Psi_{n,k}\}$ есть RUC-базис в пространстве Орлича L_M .

Если

$$\liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln M(2u)}{\ln M(u)} > 4 \quad (12)$$

или

$$\liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{M(u)}{u^2} = 0,$$

то $\{\Psi_{n,k}\}$ не является RUC-базисом в L_M .

Для пространств L_p это утверждение дает точный ответ.

СЛЕДСТВИЕ 3. Система Олевского есть RUC-базис в L_p тогда и только тогда, когда $2 \leq p < \infty$.

Так как $L_2 \subset L_{2,q}$ и $L_2 \neq L_{2,q}$ для $2 < q < \infty$, то в силу теоремы 2 система Олевского не является RUC-базисом в $L_{2,q}$. Однако $L_{2,q}$ q -вогнуто [9] и $\beta_{L_{2,q}} = 1/2$. Это замечание показывает, что условие $\beta_E < 1/2$ в теореме 1 точно и его нельзя заменить условием $\beta_E \leq 1/2$.

Для функций, удовлетворяющих условию (12), справедливо равенство $\beta_{L_M} = 0$. Поэтому предположение о q -вогнутости E для некоторого $q < \infty$ в теореме 1 также существенно.

Заметим, условие $G \subset E \subset L_2$ появляется при изучении RUC-базисов в г.и. пространствах не впервые. В [10] доказано, что это условие необходимо и достаточно для того, чтобы любая (некоторая) равномерно ограниченная полная ортонормированная система функций была RUC-базисом в E .

Функция $F(p) = \gamma(\{\Psi_{k,j}, L_p\})$ совпадает с нормой оператора A , определенного в доказательстве теоремы 2 и действующего из L_p в $L_1(L_p)$. Применение комплексного метода Кальдерона показывает, что функция $F(1/\lambda)$ логарифмически выпукла на $(0, 1/2]$. Отсюда вытекает, что функция $F(p)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $F(2) = 1$;
- 2) $F(p)$ непрерывна и монотонно возрастает при $p \geq 2$;
- 3) $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \infty$;
- 4) если

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad 0 < \theta < 1, \quad p_0, p_1 \geq 2,$$

$$\text{то } F(p) \leq F^{1-\theta}(p_0)F^\theta(p_1).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Function Spaces. Berlin: Springer, 1979.
- [2] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
- [3] Billard P., Kwapien S., Pelczynski A., Samuel C. Biorthogonal systems of random unconditional convergence in Banach spaces // Longhorn Notes, Functional Analysis Seminar 1985–1986. Austin: Univ. Texas, 1986. P. 13–35.
- [4] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999.
- [5] Novikov I., Semenov E. Haar Series and Linear Operators. Dordrecht: Kluwer, 1997.
- [6] Олевский А. М. Об одной ортонормированной системе и ее приложениях // Матем. сб. 1967. Т. 22. С. 207–236.
- [7] Казарян К. С. О некоторых задачах теории ортогональных рядов // Матем. сб. 1982. Т. 119. № 2. С. 278–294.
- [8] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Sequence Spaces. Berlin: Springer, 1977.
- [9] Carothers N. L., Dilworth S. J. Geometry of Lorentz spaces via interpolation // Longhorn Notes, Functional Analysis Seminar. Austin: Univ. Texas, 1985–86. P. 107–133.
- [10] Dodds P. G., Semenov E. M., Sukochev F. A. RUC-systems in rearrangement invariant spaces // Studia Math. 2002. V. 151. № 2. P. 161–173.

(К. С. Казарян) Автономный университет Мадрида
и Институт математики Национальной Академии наук Армении
(Е. М. Семенов) Воронежский государственный университет
E-mail: kazaros.kazarian@uam.es,
nadezhka@ssm.vsu.ru, root@func.vsu.ru

Поступило
24.03.2003
Исправленный вариант
11.07.2003