Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Илларионов, Оптимальное граничное управление стационарным течением вязкой неоднородной несжимаемой жидкости, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 5, 666–678

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm530>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 02:58:00

УДК 517.95

ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫМ ТЕЧЕНИЕМ ВЯЗКОЙ НЕОДНОРОДНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. Илларионов

Рассматривается задача оптимального граничного управления двумерным стационарным течением вязкой неоднородной несжимаемой жидкости. Роль управления играют значения скорости на части границы рассматриваемой области. На оставшейся части границы задаются вектор скорости течения и плотность жидкости. Плотность жидкости ищется в виде некоторой скалярной функции, определяемой исходными данными, от функции тока. Исследована разрешимость задачи управления и получены необходимые условия оптимальности.

Библиография: 10 названий.

1. Введение

1.1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$, состоящей из конечного числа связных компонент $\Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(L)}$.

Будем рассматривать задачу оптимального управления для следующей системы уравнений, описывающей стационарное движение вязкой неоднородной несжимаемой жидкости в Ω :

$$-\mu \Delta u + \rho(u \nabla)u + \nabla P = \rho f, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u \nabla \rho = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (1.1)$$

$$u = y_0, \quad \rho = \rho_0 \quad \text{на } \Gamma_0, \quad u = y_c \quad \text{на } \Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0, \quad (1.2)$$

где $u = (u_1, u_2)$ – вектор скорости течения, $(u \nabla)u = u_1 \partial u / \partial x_1 + u_2 \partial u / \partial x_2$, P – давление, $\mu > 0$ – коэффициент динамической вязкости, ρ – плотность жидкости, $f = (f_1, f_2)$ – заданная плотность внешних сил, y_0, ρ_0 – заданные значения скорости и плотности на участке границы Γ_0 , y_c – значения скорости на Γ_1 , играющие роль управления.

Предполагаем, что

$$\Gamma_0 \text{ – линейно-связное замкнутое множество на } \Gamma^{(1)}, \operatorname{meas} \Gamma_0 > 0; \quad (1.3)$$

$$y_0 \cdot n > 0 \text{ на } \Gamma_0 \text{ либо } y_0 \cdot n < 0 \text{ на } \Gamma_0. \quad (1.4)$$

Здесь и далее n – единичный вектор внешней нормали к Γ , $\operatorname{meas} \Gamma_0$ – мера Лебега множества Γ_0 на Γ .

Заметим, что из условия (1.4) следует, что Γ_0 является участком вытекания либо втекания жидкости соответственно.

Плотность жидкости будем искать в виде: $\rho = \eta(\psi)$, где η – скалярная функция, определяемая y_0, ρ_0 , а ψ – функция тока, т.е. $\text{rot } \psi = (\partial\psi/\partial x_2, -\partial\psi/\partial x_1) = u$. Такой подход был применен в [1] для доказательства разрешимости краевой задачи (1.1), (1.2). Разрешимость подобной трехмерной задачи была исследована в [2], а уравнения (1.1) с субдифференциальными граничными условиями рассмотрены в [3].

Пусть функция η фиксирована, а граничные значения скорости на Γ_1 (т.е. функция y_c) неизвестны. Требуется отыскать течение u и управление y_c по дополнительному экстремальному условию

$$J_\lambda(u, y_c) = J(u) + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma_1} (y_c - y_d)^2 ds \rightarrow \inf, \quad y_c \in U_{ad}, \quad (1.5)$$

где U_{ad} – множество допустимых управлений, $\lambda \geq 0$, J – заданный функционал, y_d – заданная функция.

Оптимальное управление уравнениями движения вязкой *однородной* несжимаемой жидкости рассматривалось рядом авторов. Например, задачи с распределенным управлением в правой части для нестационарных уравнений Навье–Стокса исследованы в статьях А.В. Фурсикова [4], [5]. Подобные задачи для эволюционных и стационарных уравнений изучались в монографии Ж.-Л. Лионса [6]. Задачи граничного управления рассматривались в [7]. В этой статье доказана разрешимость поставленных задач, а с помощью принципа неопределенных множителей Лагранжа получены необходимые условия оптимальности.

Основная проблема, возникающая при исследовании задачи управления (1.1), (1.2), (1.5), обусловлена наличием дополнительного уравнения первого порядка для плотности жидкости. Последнее приводит к необходимости получения новых априорных оценок решений прямой и экстремальной задач, основанных на явном представлении плотности через функцию тока.

1.2. Определение функциональных пространств и операторов. Пусть $W^{s,p}(Q)$ – стандартное пространство Соболева, $s \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, Q представляет собой либо область Ω , либо границу Γ , либо некоторую часть границы Γ с положительной мерой. При этом $W^{s,2}(Q) = H^s(Q)$, $W^{0,p}(Q) = L^p(Q)$. Через $C^l(\bar{\Omega})$ ($C^l(\mathbb{R})$) обозначим банахово пространство всех l раз непрерывно дифференцируемых функций, которые вместе со своими производными до l -го порядка включительно ограничены на Ω (на $\mathbb{R}$). Аналогичные пространства вектор-функций обозначаем $\mathbf{H}^s(Q)$, $\mathbf{L}^p(Q)$, $\mathbf{C}^l(Q)$ и т.д. Нормы элементов в $H^s(Q)$, $H^s(\Omega)$, $L^2(Q)$ и $C^l(\mathbb{R})$ обозначаем через $\|\cdot\|_{s,Q}$, $\|\cdot\|_s$, $\|\cdot\|_Q$ и $\|\cdot\|_{C^l}$ соответственно. Через $D'(\Omega)$ обозначаем пространство обобщенных функций на Ω .

Линейные непрерывные операторы следа функций из $H^1(\Omega)$ на границу Γ или ее части Γ_i обозначим

$$\gamma|_\Gamma: H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma), \quad \gamma|_{\Gamma_i}: H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_i), \quad i = 0, 1.$$

Определим гильбертовы пространства

$$H = \left\{ v \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \operatorname{div} v = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \int_{\Gamma^{(i)}} v \cdot n \, ds = 0 \quad i \in \{1, \dots, L\} \right\},$$

$$H_0 = \{v \in H : \gamma|_{\Gamma} v = 0\}, \quad H_{\Gamma_0} = \{v \in H : \gamma|_{\Gamma_0} v = 0\}$$

с нормой $\mathbf{H}^1(\Omega)$ и

$$U = \left\{ g \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) : \int_{\Gamma^{(i)}} g \cdot n \, ds = 0, \quad i \in \{1, \dots, L\} \right\}$$

с нормой $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$. Соотношение двойственности между произвольным банаховым либо гильбертовым пространством X и его сопряженным X^* будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^* \times X}$ или, если это не вызовет недоразумений, просто $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Введем линейный непрерывный оператор $A: H \rightarrow H^*$ и трилинейные непрерывные операторы $C, C^T: L^\infty(\Omega) \times H \times H \rightarrow H^*$ по формулам

$$\langle Au, v \rangle = \sum_{i=1}^2 (\nabla u_i, \nabla v_i)_\Omega, \quad \langle C(\rho, u, w), v \rangle = \int_{\Omega} \rho (u \nabla) w \cdot v \, dx,$$

$$\langle C^T(\rho, u, v), w \rangle = \langle C(\rho, u, w), v \rangle + \langle C(\rho, w, u), v \rangle$$

для любых $u, w, v \in H, \rho \in L^\infty(\Omega)$. Заметим, что существует $\gamma > 0$ такая, что

$$\gamma \|u\|_1^2 \leq \langle Au, u \rangle \quad \forall u \in H_0. \quad (1.6)$$

Через $C_1, C_2, \dots$ будем обозначать константы, значения которых являются неизменными на протяжении доказательства одной теоремы, леммы и т.д.

2. Слабое решение краевой задачи

2.1. Определение слабого решения. Предполагаем, что

$$\rho_0 \in C^0(\Gamma_0), \quad 0 < \rho_0(x), \quad x \in \Gamma_0, \quad y_0 \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_0). \quad (2.1)$$

Пусть x_0 – начало кривой Γ_0 . Для любого $u \in H$ существует единственная скалярная функция $\psi \in H^2(\Omega)$ (см., например, [1]) такая, что

$$\operatorname{rot} \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) = u \quad \text{в } \Omega, \quad \psi(x) = \int_{\Gamma_0(x_0, x)} u \cdot n \, ds, \quad x \in \Gamma_0, \quad (2.2)$$

где $\Gamma_0(x_0, x)$ – часть кривой Γ_0 , соединяющая точки x_0 и x . Введем оператор $N: H \rightarrow H^2(\Omega)$, который каждому $u \in H$ ставит в соответствие $\psi \in H^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнениям (2.2). Рассмотрим функцию ψ_0 , определяемую формулой

$$\psi_0(x) = \int_{\Gamma_0(x_0, x)} y_0 n \, ds, \quad x \in \Gamma_0.$$

Так как $y_0 \cdot n \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_0)$, то $\psi_0 \in H^{3/2}(\Gamma_0) \subset C^0(\Gamma_0)$. Из условий (1.3), (1.4) следует строгая монотонность ψ_0 на Γ_0 ; значит, существует $\psi_0^{-1} \in C^0(B)$, где $B = \{\psi_0(x), x \in \Gamma_0\}$. Следовательно, при выполнении условий (1.3), (1.4), (2.1) найдется функция η такая, что

$$\eta \in C^0(\mathbb{R}), \quad 0 < \eta(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \eta(\xi) = \rho_0(\psi_0^{-1}(\xi)), \quad \xi \in B. \quad (2.3)$$

Далее считаем η , удовлетворяющую (2.3), фиксированной.

ЗАМЕЧАНИЕ. Далее в ряде случаев нам потребуется дополнительная гладкость функции η . Нетрудно проверить, что если в дополнение к условиям (1.3), (1.4), (2.1) $\rho \in C^k(\mathbb{R})$, $\Gamma_0 \in C^k$, $(y_0 \cdot n) \in C^{k-1}(\Gamma_0)$ ($k \geq 1$), то найдется $\eta \in C^k(\mathbb{R})$, удовлетворяющая соотношениям (2.3).

Для любого $u \in H$ имеет место равенство

$$\int_{\Omega} u \nabla \varphi \cdot \eta(Nu) d\Omega = 0 \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad \gamma|_{\Gamma} \varphi = 0, \quad (2.4)$$

которое непосредственно проверяется для $\eta \in C^1(\mathbb{R})$, а в случае $\eta \in C^0(\mathbb{R})$ получается регуляризацией функции η . Если дополнительно $\gamma|_{\Gamma_0} u \cdot n = y_0 \cdot n$, то из построения функции η вытекает

$$\eta(Nu) = \rho_0 \quad \text{на } \Gamma_0. \quad (2.5)$$

Положим

$$g(x) = \begin{cases} y_0(x), & \text{если } x \in \Gamma_0, \\ y_c(x), & \text{если } x \in \Gamma_1. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пару $u \in H$, $\rho = \eta(Nu)$ назовем *слабым решением краевой задачи* (1.1), (1.2), если

$$\mu Au + C(\eta(Nu), u, u) = \eta(Nu)f \quad \text{в } H_0^*, \quad \gamma|_{\Gamma} u = g, \quad (2.6)$$

$$\eta \in C^0(\mathbb{R}), \quad \eta(Nu) = \rho_0 \quad \text{на } \Gamma_0. \quad (2.7)$$

Пусть $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $\rho \in C^1(\overline{\Omega})$ – решение системы (1.1), (1.2). Если $u \neq 0$ в Ω , $u \in C^1(\overline{\Omega})$, то общее решение уравнения $u \nabla \rho = 0$ в Ω имеет вид

$$\rho = \tilde{\eta}(\psi), \quad \text{rot } \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) = u,$$

где $\tilde{\eta}$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Тогда систему (1.1), (1.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} -\mu \Delta u + \tilde{\eta}(Nu)(u \nabla) u + \nabla p &= \tilde{\eta}(Nu)f, \quad \text{div } u = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u &= g \quad \text{на } \Gamma, \quad \tilde{\eta}(Nu) = \rho_0 \quad \text{на } \Gamma_0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Скалярно в $L^2(\Omega)$ умножая первое соотношение в (2.8) на произвольную $v \in H_0$ и пользуясь формулой интегрирования по частям, получаем, что u удовлетворяет первому соотношению в (2.6).

Обратно, пусть $u \in H$, $\rho = \eta(Nu)$ – слабое решение (1.1), (1.2); тогда, как и в [8], заключаем, что найдется $P \in L^2(\Omega)$ такой, что

$$-\mu \Delta u + \rho(u \nabla) u + \nabla P = \rho f \quad \text{в } D'(\Omega).$$

Из формул (2.4), (2.5) вытекает $\text{div}(u\rho) = 0$ в $D'(\Omega)$, $\rho = \rho_0$ на Γ_0 .

2.2. Существование слабого решения. Нашей ближайшей целью является доказательство разрешимости задачи (2.6) для любых $g \in U$, $\eta \in C^0(\mathbb{R})$. Подобный результат был получен в [1] для случая $g \in U \cap C^1(\Gamma)$, $\eta \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$, $\alpha > 0$.

ЛЕММА 2.1. *Оператор N непрерывен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор

$$\text{rot}: H_{x_0} = \{\psi \in H^2(\Omega): \psi(x_0) = 0\} \rightarrow H.$$

Очевидно, что если $\text{rot } \psi = 0$, то $\psi = 0$, т.е. rot является инъективным оператором. Пусть $u \in H$; из определения оператора N следует, что $\psi = Nu \in H_{x_0}$, $\text{rot } \psi = u$, т.е. оператор rot сюръективен. Из непрерывности вложения $H^2(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ вытекает, что пространство H_{x_0} гильбертово с нормой $\|\cdot\|_2$. Таким образом, непрерывный линейный оператор rot осуществляет биективное отображение H_{x_0} на H ; следовательно, по теореме Банаха [9] обратный к нему оператор N также является непрерывным.

Для краткости введем операторы $\tilde{C}: H \times H \times H \rightarrow H^*$, $F: H \rightarrow H^*$ с помощью формул

$$\tilde{C}(u, w, v) = C(\eta(Nu), w, v), \quad \langle F(u), v \rangle = \int_{\Omega} \eta(Nu) f \cdot v \, d\Omega \quad \forall u, w, v \in H.$$

Имеет место равенство

$$\langle \tilde{C}(u, u, v), v \rangle = 0 \quad \forall v \in H_0, u \in H, \quad (2.9)$$

которое проверяется непосредственно для $\eta \in C^1(\mathbb{R})$, а для $\eta \in C^0(\mathbb{R})$ получается регуляризацией функции η .

Пусть X, Y – банаховы пространства. Будем говорить, что оператор $\Phi: X \rightarrow Y$ *компактный*, если он ограниченные множества переводит в компактные; *слабо непрерывный*, если он слабо сходящиеся последовательности переводит в слабо сходящиеся; *усиленно непрерывный*, если он слабо сходящиеся последовательности переводит в сильно сходящиеся. Очевидно, что если пространства X, Y рефлексивные, то для того чтобы оператор $\Phi: X \rightarrow Y$ был усиленно непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был слабо непрерывным и компактным.

ЛЕММА 2.2. *Пусть $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p$, $\eta \in C^0(\mathbb{R})$. Тогда операторы $\tilde{C}, F$ усиленно непрерывные.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что операторы $\tilde{B}, F$ слабо непрерывные и компактные. Пусть $u_k, w_k, v_k \rightarrow u, w, v$ слабо в H . Из компактности вложений

$$H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad H^2(\Omega) \subset W^{1,q}(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty, \quad (2.10)$$

непрерывности вложения $W^{1,r}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ и леммы 2.1 вытекает, что $w_k, v_k \rightarrow w, v$ сильно в $L^q(\Omega)$, $Nu_k \rightarrow Nu$ сильно в $C^0(\bar{\Omega})$; следовательно, $\rho_k = \eta(Nu_k) \rightarrow \rho = \eta(Nu)$ в $C^0(\bar{\Omega})$. Тогда, используя неравенство Гёльдера, нетрудно показать, что

$$\int_{\Omega} \rho_k (w_k \nabla v_k) \cdot y \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho_k f \cdot y \, d\Omega \rightarrow \int_{\Omega} \rho (w \nabla v) \cdot y \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho f \cdot y \, d\Omega$$

для любого $y \in H$. Следовательно, операторы $\tilde{B}$, F слабо непрерывные. Используя неравенство Гёльдера и непрерывность вложений (2.10), нетрудно проверить, что если множества $M_1 \subset H \times H \times H$, $M_2 \subset H$ ограничены, то множества

$$\tilde{B}(M_1) = \{\tilde{B}(u, w, y) : (u, w, y) \in M_1\}, \quad F(M_2) = \{F(u) : u \in M_2\}$$

ограничены в норме пространства $(L^r(\Omega))^*$ ($2 < r < \infty$). В силу компактности вложения $(L^r(\Omega))^* \subset H^*$ M_1, M_2 – компактные множества пространства H^* . Значит, операторы $\tilde{B}$, F компактные. Лемма доказана.

Выберем вектор-функцию $u_g \in H$ из условий

$$\langle Au_g, v \rangle = 0 \quad \forall v \in H_0, \quad \gamma|_\Gamma u_g = g.$$

Такая u_g существует и единственна [8], причем $\|u_g\|_1 \leq C_1(\Omega)\|g\|_{1/2, \Gamma}$. Из леммы 2.1 вытекает, что функция $b = Nu_g$ удовлетворяет оценке

$$\|b\|_2 \leq C_2(\Omega)\|u_g\|_1 \leq C_1 C_2 \|g\|_{1/2, \Gamma}. \quad (2.11)$$

В [8, с. 366] построено множество “срезающих” функций $\theta_\varepsilon \in C^2(\bar{\Omega})$, $\varepsilon > 0$, таких, что функция $u_\varepsilon = \text{rot}(b \cdot \theta_\varepsilon)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \int_\Omega |(v \nabla) u_\varepsilon \cdot v| dx &\leq C_3(\Omega) \left(\sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 b}{\partial^2 x_i x_j} \right\|_{L^{3/2}(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon \|b\|_2 \right) \|v\|_1^2 \quad \forall v \in H_0, \\ \gamma|_\Gamma u_\varepsilon &= g \quad \text{на } \Gamma, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Gamma) \leq 2 \exp(-1/\varepsilon)\}$. Здесь $\text{dist}(x, \Gamma)$ – расстояние от точки x до границы Γ . Используя (2.11), (2.12) и неравенство Гёльдера, нетрудно получить оценку

$$\begin{aligned} \int_\Omega |(v \nabla) u_\varepsilon \cdot v| dx &\leq \delta_\varepsilon(g) \cdot \|v\|_1 \quad \forall v \in H_0, \\ \delta_\varepsilon(g) &= C_4(\Omega)(\varepsilon + (\text{meas } \Omega_\varepsilon)^{1/6}) \|g\|_{1/2, \Gamma}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из построения функции u_ε вытекает, что

$$\|u_\varepsilon\|_1 \leq C_5(\Omega) \|g\|_{1/2, \Gamma} \cdot \|\theta_\varepsilon\|_{C^2(\Omega)}. \quad (2.14)$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p$, $\eta \in C^0(\mathbb{R})$. Тогда для любого $g \in U$ существует функция $u \in H$, удовлетворяющая уравнениям (2.6), причем имеет место априорная оценка

$$\|u\|_1 \leq \|u_\varepsilon\|_1 + \frac{\mu \|u_\varepsilon\|_1 + C_1 \|\eta\|_{C^0} \cdot (\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|u_\varepsilon\|_1^2)}{\gamma \mu - \delta_\varepsilon(g) \|\eta\|_{C^0}}, \quad (2.15)$$

верная для любого $u_\varepsilon \in H$, удовлетворяющего (2.13), с $\delta_\varepsilon(g) < \gamma \mu / \|\eta\|_{C^0}$, $C_1 = C_1(\Omega, p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение ищем в виде: $u = u_\varepsilon + u_0$, где $u_0 \in H_0$ – новая неизвестная функция, u_ε удовлетворяет условиям (2.13), в которых $\delta_\varepsilon(g) < \gamma\mu/\|\eta\|_{C^0}$. Тогда соотношения (2.6) эквивалентны уравнению

$$\begin{aligned} \mu Au_0 + \tilde{C}(u_\varepsilon + u_0, u_0 + u_\varepsilon, u_0) + \tilde{C}(u_\varepsilon + u_0, u_0, u_\varepsilon) \\ = F(u_\varepsilon + u_0) - \mu Au_\varepsilon - \tilde{C}(u_\varepsilon + u_0, u_\varepsilon, u_\varepsilon) \quad \text{в } H_0^*. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Введем нелинейный оператор $T: H_0 \rightarrow H_0$, который каждому $w \in H_0$ ставит в соответствие элемент $u_0 \in H_0$, являющийся решением уравнения

$$a_w(u_0, v) = \langle f_w, v \rangle \quad \forall v \in H_0, \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} \langle f_w, v \rangle &= \langle F(u_\varepsilon + w), v \rangle - \mu \langle Au_\varepsilon, v \rangle - \langle \tilde{C}(u_\varepsilon + w, u_\varepsilon, u_\varepsilon), v \rangle, \\ a_w(u_0, v) &= \mu \langle Au_0, v \rangle + \langle \tilde{C}(u_\varepsilon + w, w + u_\varepsilon, u_0), v \rangle \\ &\quad + \langle \tilde{C}(u_\varepsilon + w, u_0, u_\varepsilon), v \rangle \quad \forall v \in H_0. \end{aligned}$$

Очевидно, что билинейная форма a_w непрерывна на $H_0 \times H_0$; более того, из (1.6), (2.9) и условия (2.13) вытекает, что

$$0 < (\mu\gamma - \delta_\varepsilon(g)\|\eta\|_{C^0})\|v\|_1^2 \leq a_w(v, v) \quad \forall v \in H_0, \quad v \neq 0;$$

следовательно, форма a_w коэрцитивна на $H_0 \times H_0$. Нетрудно показать, что линейный функционал f_w непрерывен на H_0 , причем

$$\langle f_w, v \rangle \leq \mu\|u_\varepsilon\|_1 \cdot \|v\|_1 + C_1\|\eta\|_{C^0} \cdot \|v\|_1 (\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|u_\varepsilon\|_1^2) \quad \forall v \in H_0.$$

Тогда по теореме Лакса–Мильграмма для любого $w \in H_0$ существует единственный $u_0 \in H_0$, удовлетворяющий уравнению (2.17), причем

$$\|u_0\|_1 \leq \frac{\mu\|u_\varepsilon\|_1 + C_1\|\eta\|_{C^0}(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|u_\varepsilon\|_1^2)}{\gamma\mu - \delta_\varepsilon(g)\|\eta\|_{C^0}}. \quad (2.18)$$

Следовательно, оператор T введен корректно. Очевидно, что (2.16) эквивалентно уравнению $T(u_0) = u_0$. Для доказательства существования неподвижной точки оператора T , учитывая оценку (2.18), по теореме Шаудера о существовании неподвижной точки у вполне непрерывного оператора [9, с. 411] достаточно показать, что оператор T компактен. Пусть $w_m \rightarrow w_0$ слабо в H_0 , $T(w_m) = u_m$, $T(w_0) = u_0$. Вычитая из (2.17), записанного для $w = w_m$, то же самое уравнение, записанное для $w = w_0$, получаем, что

$$\begin{aligned} \mu A(u_m - u_0) + (\tilde{C}(u_\varepsilon + w_m, w_m + u_\varepsilon, u_0) - \tilde{C}(u_\varepsilon + w_0, w_0 + u_\varepsilon, u_0)) \\ + (\tilde{C}(u_\varepsilon + w_m, u_0 + u_\varepsilon, u_\varepsilon) - \tilde{C}(u_\varepsilon + w_0, u_0 + u_\varepsilon, u_\varepsilon)) \\ + \tilde{C}(u_\varepsilon + w_m, w_m + u_\varepsilon, u_m - u_0) - \tilde{C}(u_\varepsilon + w_m, u_0 - u_m, u_\varepsilon) \\ = F(u_\varepsilon + w_m) - F(u_\varepsilon + w_0) \quad \text{в } H_0^*. \end{aligned}$$

Скалярно умножая полученное выше уравнение на $(u_m - u_0) \in H_0$ и пользуясь свойствами (1.6), (2.9), условием (2.13) и леммой 2.2, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} (\mu\gamma - \delta_\varepsilon(g)\|\eta\|_{C^0})\|u_m - u_0\|_1 &\leq \|F(u_\varepsilon + w_m) - F(u_\varepsilon + w_0)\|_{H^*} \\ &+ \|(\tilde{C}(u_\varepsilon + w_m, w_m + u_\varepsilon, u_0) - \tilde{C}(u_\varepsilon + w_0, w_0 + u_\varepsilon, u_0))\|_{H^*} \\ &+ \|(\tilde{C}(u_\varepsilon + w_m, u_0 + u_\varepsilon, u_\varepsilon) - \tilde{C}(u_\varepsilon + w_0, u_0 + u_\varepsilon, u_\varepsilon))\|_{H^*} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $u_m = T(w_m) \rightarrow u_0 = T(w_0)$ сильно в H при $m \rightarrow \infty$. Доказали, что оператор T усиленно непрерывный, а значит, он вполне непрерывный. Для получения оценки (2.15) достаточно заметить, что $\|u\|_1 \leq \|u_\varepsilon\|_1 + \|u_0\|_1$, и воспользоваться неравенством (2.18). Теорема доказана.

3. Оптимальное граничное управление системой (1.1), (1.2)

3.1. Постановка экстремальной задачи. Введем в рассмотрение множество допустимых управлений U_{ad} , удовлетворяющее условию

(а) $U_{ad} \subset U$, $g = y_0$ на $\Gamma_0 \forall g \in U_{ad}$, $U_{ad} \neq \emptyset$, U_{ad} – замкнутое выпуклое множество.

Определим множество допустимых пар “течение–управление” S и функционал качества $J_\lambda: H \times H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ по формулам

$$\begin{aligned} S &= \{(u, g) \in H \times U_{ad}: \mu Au + \tilde{B}(u, u, u) = F(u) \quad \text{в } H_0^*, \quad \gamma|_\Gamma u = g\}, \\ J_\lambda(u, g) &= J(u) + \frac{\lambda}{2}\|g - y_d\|_{\Gamma_1}^2 \quad \forall u \in H, \quad g \in H^{1/2}(\Gamma), \end{aligned}$$

где $\lambda \geq 0$, $y_d \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ – заданный элемент, $J: H \rightarrow \mathbb{R}$ – заданный функционал.

Обозначим через $\tilde{S}$ множество допустимых “течений”, т.е. $\tilde{S}$ состоит из всех функций $u \in H$ таких, что $(u, \gamma|_\Gamma u) \in S$. Используя лемму 2.2 и условие (а), нетрудно показать, что множества S и $\tilde{S}$ слабо замкнуты.

Далее считаем, что

(b) $J(v) \geq 0 \forall v \in H$, J слабо полунепрерывен снизу на $\tilde{S}$.

ЗАДАЧА 1. Найти $(u_*, g_*) \in S: J_\lambda(u_*, g_*) \leq J_\lambda(u, g) \forall (u, g) \in S$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполняются условия (а), (b), $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p$, $\eta \in C^0(\mathbb{R})$. Тогда если множество U_{ad} ограничено либо функционал J коэрцитивен на $\tilde{S}$, то существует решение экстремальной задачи 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2.1 множество S непусто. Пусть

$$J_\lambda(u_m, g_m) \rightarrow J^* = \inf_{(u, g) \in S} J_\lambda(u, g), \quad (u_m, g_m) \in S.$$

Если множество U_{ad} ограничено, то $\|g_m\|_{1,2,\Gamma} \leq C_1$ и из оценок (2.14), (2.15) вытекает $\|u_m\|_1 \leq C_2$. Если функционал J коэрцитивен на $\tilde{S}$, то $\|u_m\|_1 \leq C'_2$; следовательно,

$\|g_m\|_{1,2,\Gamma} \leq C'_1$. Постоянные C_1, C_2, C'_1, C'_2 не зависят от m . Значит, можно извлечь подпоследовательности

$$u_{m_k} \rightarrow u_* \text{ слабо в } H, \quad g_{m_k} \rightarrow g_* \text{ слабо в } H^{1/2}(\Gamma), \quad (u_{m_k}, g_{m_k}) \in S.$$

Из слабой замкнутости множества S вытекает, что $(u_*, g_*) \in S$. Следовательно,

$$J^* \leq J_\lambda(u_*, g_*) \leq \lim_{m_k \rightarrow \infty} J_\lambda(u_{m_k}, g_{m_k}) \leq J^*.$$

То есть $J_\lambda(u_*, g_*) = J^*$, (u_*, g_*) – решение задачи 1. Теорема доказана.

3.2. Примеры функционалов качества. В качестве возможных J , с учетом физического смысла рассматриваемых задач, можно выбирать $J = J_i$, $1 \leq i \leq 5$, где

$$\begin{aligned} J_1(u) &= \frac{1}{s} \int_{\Omega} |u - u_d|^s d\Omega, & J_2(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{rot} u|^2 d\Omega, \\ J_3(u) &= \frac{1}{s} \int_{\Omega} |\eta(Nu) - \rho_d|^s d\Omega, & J_4(u) &= \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |(\nabla u) + (\nabla u)^T|^2 d\Omega, \\ J_5(u) &= \frac{1}{s} \int_{\Omega'} |\eta'(Nu)u|^s d\Omega, & u_d, \rho_d &\in L^s(\Omega), \quad 2 \leq s < \infty, \quad \Omega' \subset \Omega. \end{aligned}$$

Функционалы J_1, J_2, J_3 описывают отклонение вектора скорости течения от заданного, завихренность поля скоростей и отклонение плотности жидкости от заданной соответственно. Следует выбирать $J = J_4$, если необходимо минимизировать диссипацию энергии в жидкости, возникающую за счет сил вязкого трения, и $J = J_5$, если необходимо минимизировать градиент плотности жидкости в некоторой подобласти $\Omega' \subset \Omega$.

Очевидно, что при выполнении условия (а) функционалы J_i , $i = 1, 2, 3, 4$, слабо полунепрерывны снизу на множестве $\tilde{S}$. Слабая непрерывность на $\tilde{S}$ функционала J_5 гарантирована при дополнительном условии $\eta \in C^1(\mathbb{R})$.

Функционал J_4 коэрцитивен на $\tilde{S}$. Действительно, пусть $u_k \in \tilde{S}$, $\|u_k\|_1 \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$. Выберем элемент $u_{y_0} \in H$, удовлетворяющий условию $u_{y_0} = y_0$ на Γ_0 , и обозначим $\tilde{u}_k = u_k - u_{y_0}$. Очевидно, что $\|\tilde{u}_k\|_1 \rightarrow \infty$. Тогда из неравенства Корна (см., например, [7]) вытекает, что $J_4(\tilde{u}_k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$; следовательно, и $J_4(u_k) \rightarrow \infty$.

Если дополнительно предположить, что

$$U_{ad} \subset \{g \in U: g_\tau = g - (g \cdot n)n = 0 \quad \text{на } \Gamma_1\}, \quad (3.1)$$

то хорошо известно (см., например, [10]), что функционал J_2 коэрцитивен на $\tilde{S}$.

Таким образом, имеет место

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть выполняются условия (а), (b), $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p$, $\eta \in C^0(\mathbb{R})$ и имеет место одно из следующих предположений:

- 1) $J = J_i$, $i \in \{1, 3\}$, U_{ad} – ограниченное множество;
- 2) $J = J_5$, $\eta \in C^1(\mathbb{R})$, U_{ad} – ограниченное множество;
- 3) $J = J_4$;
- 4) $J = J_2$ и либо множество U_{ad} ограничено, либо выполняется условие (3.1).

Тогда существует решение экстремальной задачи 1.

3.3. Вывод системы оптимальности. Введем в рассмотрение операторы $\tilde{C}^T: H \times H \times H \rightarrow H^*$, $D: L^\infty(\Omega) \times H \times H \times H \rightarrow H^*$, $\tilde{D}: H \times H \times H \times H \rightarrow H^*$, $F': H \times H \rightarrow H^*$, действующие по формулам

$$\langle F'(u, w), y \rangle = \int_{\Omega} \eta'(Nu) w \cdot f N v \, d\Omega, \quad \tilde{C}^T(u, w, v) = C^T(N(\eta(u)), w, v),$$

$$\langle D(\rho, u, w, v), y \rangle = \int_{\Omega} \rho(u \nabla) w \cdot v \cdot N y \, d\Omega,$$

$$\tilde{D}(u, w, v, \phi) = D(\eta'(Nu), w, v, \phi) \quad \forall u, w, v, \phi \in H, \quad y \in H, \quad \rho \in L^\infty(\Omega).$$

Используя лемму 2.1, неравенство Гёльдера и непрерывность вложений (2.10), нетрудно показать, что $D(\tau, u, w, v)$, $F'(u, w) \in H^*$ для любых $\tau \in L^\infty(\Omega)$, $u, w, v \in H$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p$, $\eta \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда операторы $\tilde{D}$ и F' усиленно непрерывны.

Доказательство проводится по такой же схеме, как и в лемме 2.2.

Далее считаем, что

(с) функционал J непрерывно дифференцируем по Фреше.

Нетрудно проверить, что условие (с) выполняется для функционалов J_1 , J_2 , J_4 , причем

$$\langle J'_1(u), v \rangle = \int_{\Omega} |u - u_d|^{s-2} (u - u_d) \cdot v \, d\Omega,$$

$$\langle J'_2(u), v \rangle = \int_{\Omega} \operatorname{rot} u \cdot \operatorname{rot} v \, d\Omega \quad \forall u, v \in H,$$

$$\langle J'_4(u), v \rangle = \mu \int_{\Omega} (\nabla u + (\nabla u)^T)(\nabla v + (\nabla v)^T) \, d\Omega.$$

Если $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ ($\eta \in C^2(\mathbb{R})$), то условие (с) выполняется и для $J = J_3$ ($J = J_5$), причем

$$\langle J'_3(u), v \rangle = \int_{\Omega} |\eta(Nu) - \rho_d|^{s-2} (\eta(Nu) - \rho_d) \eta'(Nu) N v \, d\Omega,$$

$$\langle J'_5(u), v \rangle = \int_{\Omega'} |\eta'(Nu) u|^{s-2} \eta'(Nu) u \cdot (\eta''(Nu) u N v + \eta'(Nu) v) \, d\Omega.$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть выполняются условия (а)–(с), $f \in L^p(\Omega)$, $p > 1$, $\eta \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда для любого решения задачи 1 (u_* , g_*) существуют не равные одновременно нулю элементы $(w, \chi, \lambda_0) \in H_0 \times U^* \times \mathbb{R}^+$ такие, что

$$\begin{aligned} \mu \langle A w, v \rangle + \langle C^T(\eta(Nu_*), u_*, w), v \rangle + \langle D(\eta'(Nu_*), u_*, u_*, w), v \rangle \\ + \langle \chi, \gamma|_{\Gamma} v \rangle_{U^* \times U} + \lambda_0 \langle J'(u_*), v \rangle = \langle F'(u_*, w), v \rangle \quad \forall v \in H, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\langle \chi, g_* - g \rangle_{U^* \times U} + \lambda \lambda_0 (g - g_*, g_* - y_d)_{\Gamma_1} \geq 0 \quad \forall g \in U_{ad}. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (u_*, g_*) – решение задачи 1. Рассмотрим ε -задачу (метод адаптированного штрафа)

$$J_\varepsilon(u, g) \rightarrow \inf, \quad u \in H, \quad g \in U_{ad}, \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u, g) = & J_\lambda(u, g) + \frac{1}{2}\|u - u_*\|_1^2 + \frac{1}{2}\|g - g_*\|_{1/2, \Gamma_1}^2 \\ & + \frac{1}{2\varepsilon}\|\mu Au + \tilde{B}(u, u, u) - F(u)\|_{H_0^*}^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|u - g\|_{1/2, \Gamma}^2, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Для простоты доказательства считаем, что $\|f_1\|_{H_0^*} = \|\nabla(A^{-1}f_1)\|_\Omega$ для любых f_1 , $f_2 \in H_0^*$. Используя лемму 2.2, нетрудно показать, что существует решение $(u_\varepsilon, g_\varepsilon) \in H \times U_{ad}$ задачи (3.4), причем $u_\varepsilon \rightarrow u_*$ сильно в H , $g_\varepsilon \rightarrow g_*$ сильно в U при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Запишем необходимые условия оптимальности первого порядка для решения $(u_\varepsilon, g_\varepsilon)$ задачи (3.4). Пусть $\theta \in [0, 1]$,

$$f_1(\theta) = J_\varepsilon(u_\varepsilon + \theta v, g_\varepsilon), \quad f_2(\theta) = J_\varepsilon(u_\varepsilon, g_\varepsilon + \theta(g - g_\varepsilon)), \quad v \in H, \quad g \in U_{ad}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} w_\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon}A^{-1}(\mu A(u_\varepsilon) + \tilde{B}(u_\varepsilon, u_\varepsilon, u_\varepsilon) - F(u_\varepsilon)) \in H_0, \\ \chi_\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon}(\gamma|_\Gamma(u_\varepsilon - g)) \in L^2(\Gamma) \subset H^{-1/2}(\Gamma) \subset U^*. \end{aligned}$$

Тогда из условий $f'_1(0) = 0$, $f'_2(0) \geq 0$ вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \mu\langle Aw_\varepsilon, v \rangle + \langle \tilde{D}(u_\varepsilon, u_\varepsilon, u_\varepsilon, w_\varepsilon), v \rangle + \langle \chi_\varepsilon, \gamma|_\Gamma v \rangle + \langle J'(u_\varepsilon), v \rangle \\ + (u_\varepsilon - u_*, v)_1 + \langle \tilde{C}^T(u_\varepsilon, u_\varepsilon, w_\varepsilon), v \rangle = \langle F'(u_\varepsilon, w_\varepsilon), v \rangle \quad \forall v \in H, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \langle \chi_\varepsilon, g_\varepsilon - g \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} + \lambda(g - g_\varepsilon, g_\varepsilon - y_d)_{\Gamma_1} \\ + (g_\varepsilon - g_*, g - g_\varepsilon)_{1/2, \Gamma_1} \geq 0 \quad \forall g \in U_{ad}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из уравнения (3.5) нетрудно получить, что $\|\chi_\varepsilon\|_{-1/2, \Gamma} \leq C_1\|w_\varepsilon\|_1$. Если $\|w_\varepsilon\|_1 \leq C$, где постоянная C не зависит от ε , то, переходя к пределу в (3.5), (3.6), используя леммы 2.2 и 3.1, получаем (3.2), (3.3), в которых следует положить $\lambda_0 = 1$. Пусть $m_\varepsilon = \|w_\varepsilon\|_1 \rightarrow \infty$. Положим $\tilde{w}_\varepsilon = w_\varepsilon/m_\varepsilon$. Найдется подпоследовательность $\tilde{w}_{\varepsilon_n} \rightarrow w$ слабо в $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Если $w \neq 0$, то, разделив (3.5), (3.6) на m_{ε_n} и переходя к пределу при $\varepsilon_n \rightarrow +0$, получаем (3.2), (3.3), в которых $\lambda_0 = 0$, $w \neq 0$. Пусть $w = 0$. Разделив (3.5), записанное для $\tilde{w}_{\varepsilon_n}$, u_{ε_n} , на m_{ε_n} , выбрав $v = \tilde{w}_{\varepsilon_n} \in H_0$ и использовав леммы 2.2, 3.1, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} 0 < \mu\gamma \leq \mu\langle A\tilde{w}_{\varepsilon_n}, \tilde{w}_{\varepsilon_n} \rangle = -\langle \tilde{C}(u_{\varepsilon_n}, \tilde{w}_{\varepsilon_n}, u_{\varepsilon_n}), \tilde{w}_{\varepsilon_n} \rangle - \langle \tilde{D}(u_{\varepsilon_n}, u_{\varepsilon_n}, u_{\varepsilon_n}, \tilde{w}_{\varepsilon_n}), \tilde{w}_{\varepsilon_n} \rangle \\ - \frac{1}{m_{\varepsilon_n}}\langle J'(u_{\varepsilon_n}), \tilde{w}_{\varepsilon_n} \rangle - \frac{1}{m_{\varepsilon_n}}(u_{\varepsilon_n} - u_*, \tilde{w}_{\varepsilon_n})_1 + \langle F'(u_{\varepsilon_n}, \tilde{w}_{\varepsilon_n}), \tilde{w}_{\varepsilon_n} \rangle \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Противоречие. Следовательно, $w \neq 0$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть выполняются условия теоремы 3.2. Тогда существует постоянная $c_1 = c_1(\Omega, p)$ такая, что если u_* , g_* – решение задачи 1, причем

$$\mu > c_1 \|\eta\|_{C^1} (\|u_*\|_1 + \|f\|_{0,p} \|u_*\|_1 + \|u_*\|_1^2), \quad (3.7)$$

то существуют единственные $w \in H_0$, $\chi \in U^*$, удовлетворяющие уравнениям (3.2), (3.3), в которых следует положить $\lambda_0 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\lambda_0 = 0$. Выбирая в (3.2) $v = w$ и пользуясь соотношениями (1.6), (2.9), нетрудно получить априорную оценку

$$\mu \|w\|_1^2 \leq c_1 \|\eta\|_{C^1} (\|u_*\|_1^2 + \|f\|_{0,p} \|u_*\|_1 + \|u_*\|_1) \|w\|_1^2.$$

Таким образом, если условие (3.7) выполнено, то $w = 0$. В этом случае уравнение (3.2) принимает вид $\langle \chi, \gamma|_\Gamma v \rangle = 0$ для любого $v \in H$. Следовательно, и $\chi = 0$, что противоречит теореме 3.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в дополнение к условиям следствия 3.2 U_{ad} – ограниченное множество (либо $J = J_4$), то из неравенств (2.11)–(2.15) вытекает, что найдутся постоянные R, R_1 , зависящие только от исходных данных, такие, что

$$\|g_*\|_{1/2,\Gamma} \leq R, \quad \|u_*\|_1 \leq R_1,$$

причем $R_1 = R_1(\nu) \rightarrow R'_1 < \infty$ при $\nu \rightarrow +\infty$. Следовательно, (3.7) выполняется, если параметр $\nu = \mu/\|\eta\|_{C^1}$ достаточно большой.

Введем в рассмотрение оператор проектирования

$$P_R: L^2(\Gamma) \rightarrow U_{ad}^R = U_{ad} \cap \{g \in H^{1/2}(\Gamma): \|g\|_{1/2,\Gamma} \leq R\}.$$

Для того чтобы показать, что оператор P_R определен на всем $L^2(\Gamma)$, достаточно установить, что выпуклое множество U_{ad}^R замкнуто по норме $L^2(\Gamma)$. Действительно, пусть $g_m \in U_{ad}^R$, $g_m \rightarrow g$ в $L^2(\Gamma)$. Извлечем подпоследовательность $g_{m_k} \rightarrow \tilde{g} \in U_{ad}^R$ слабо в $H^{1/2}(\Gamma)$; вложение $H^{1/2}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$ компактно; следовательно, $g_{m_k} \rightarrow \tilde{g}$ сильно в $L^2(\Gamma)$. Таким образом, $\tilde{g} = g \in U_{ad}^R$.

Если $\lambda\lambda_0 > 0$, то из соотношения (3.3) вытекает

$$g_* = P_R \left(y_d - \frac{\chi}{\lambda\lambda_0} \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Соотношения (3.2), (3.3) (в которых полагаем $\lambda_0 = 1$) вместе с уравнениями

$$\mu Au_* + \tilde{B}(u_*, u_*, u_*) = F(u_*), \quad \gamma|_\Gamma u_* = g_*$$

образуют по терминологии [6] *сингулярную систему оптимальности*.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как уже отмечалось, в работе [7] исследована задача оптимизации функционала J_4 для уравнений Навье–Стокса однородной жидкости. В случае $\rho_0 = \text{const}$ (т.е. жидкость однородная), $J = J_4$ основные результаты настоящей работы совпадают с полученными в [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фролов Н. Н. О разрешимости краевой задачи движения неоднородной жидкости // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 6. С. 130–140.
- [2] Фролов Н. Н. Краевая задача, описывающая движение неоднородной жидкости // Сиб. матем. ж. 1996. Т. 37. № 2. С. 433–451.
- [3] Чеботарев А. Ю. Стационарные вариационные неравенства в модели неоднородной жидкости // Сиб. матем. ж. 1997. Т. 38. № 5. С. 1185–1193.
- [4] Фурсиков А. В. Свойства решений некоторых экстремальных задач, связанных с системой Навье–Стокса // Матем. сб. 1982. Т. 118(180). № 3(7). С. 323–349.
- [5] Фурсиков А. В. Задачи управления и теоремы, касающиеся однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для трехмерных уравнений Навье–Стокса // Матем. сб. 1981. Т. 115. № 2. С. 281–306.
- [6] Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами.. М.: Наука, 1987.
- [7] Gunzburger M. D., Hou L., Svobodny T. P. Boundary velocity control of incompressible flow with application to viscous drag reduction // SIAM J. Contr. Optim. 1992. V. 30. № 1. P. 167–182.
- [8] Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
- [9] Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
- [10] Conca C., Murat F., Pironneau O. The Stokes and Navier–Stokes equation with boundary conditions involving the pressure // Japan J. Math. 1994. V. 20. № 2. P. 279–318.

ИПМ ДВО РАН, г. Владивосток
E-mail: cheb@ipm.marine.ru

Поступило
05.09.1998
Исправленный вариант
29.08.2000