Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Ильясов, О порядке приближения в равномерной метрике средними Фейера–Зигмунда на классах $E_p[\varepsilon]$, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 5, 679–687

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm531>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 09:18:00

УДК 517.51

О ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ СРЕДНИМИ ФЕЙЕРА–ЗИГМУНДА НА КЛАССАХ $E_p[\varepsilon]$

Н. А. Ильясов

В заметке приводится решение задачи о точном порядке уклонения в равномерной метрике средних Фейера–Зигмунда на классах 2π -периодических функций с заданной мажорантой последовательности наилучших в L_p приближений, $1 \leq p < \infty$.

Библиография: 19 названий.

Пусть L_p , $1 \leq p < \infty$, – пространство всех измеримых 2π -периодических функций f , для которых L_p -норма $\|f\|_p < +\infty$; $L_\infty \equiv C$ – соответствующее пространство непрерывных функций, $\|f\|_\infty = \|f\| = \max\{|f(x)|; x \in [-\pi, \pi)\}$; C^r , $r \in \mathbb{Z}_+$, – класс функций $f \in C$, имеющих производную r -го порядка $f^{(r)} \in C$ ($f^{(0)} \equiv f$; $C^0 \equiv C$); $E_n(f)_p$ – наилучшее приближение в L_p функции f тригонометрическими полиномами порядка $\leq n \in \mathbb{Z}_+$; $\omega_l(f; \delta)_p$ – модуль гладкости l -го порядка функции $f \in L_p$, $l \in \mathbb{N}$; M_0 – класс всех числовых последовательностей $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ таких, что $0 < \varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$; $S_n(f; x)$ и $Z_{n,k}(f; x)$ – соответственно сумма Фурье и k -е нормальные средние Зигмунда ($k \in \mathbb{N}$; при $k = 1$ – средние Фейера) порядка $n \in \mathbb{Z}_+$ ряда Фурье функции $f \in L_p$ (см. [1], [2, с. 591], [3, с. 236, 258]):

$$\begin{aligned} S_n(f; x) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{\nu=1}^n A_\nu(f; x), \quad A_\nu(f; x) = a_\nu(f) \cos \nu x + b_\nu(f) \sin \nu x, \\ Z_{n,k}(f; x) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{\nu^k}{(n+1)^k}\right) A_\nu(f; x) \\ &= S_n(f; x) - (n+1)^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^k A_\nu(f; x), \quad S_0(f; x) = Z_{0,k}(f; x) = \frac{a_0(f)}{2}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$E_p[\varepsilon] = \{f \in L_p; E_{n-1}(f)_p \leq \varepsilon_n, n \in \mathbb{N}\}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad \varepsilon \in M_0.$$

С. Б. Стечкиным была поставлена следующая задача: для заданных чисел $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и последовательности $\varepsilon = \{\varepsilon_n\} \in M_0$ найти точные порядки уклонений $Z_{n,k}(f^{(r)}; x)$ от $f^{(r)}(x)$ в метрике L_q на классах функций $E_p[\varepsilon]$. Автором в [4, с. 368], [5, с. 49], [6, с. 63–64], [7, с. 92] приведено решение указанной задачи соответственно для случаев $r = 0$, $1 \leq p = q \leq \infty$; $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p < q \leq 2$; $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p < q$, $2 \leq q < \infty$ и $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p = q \leq \infty$. В настоящей заметке рассматривается случай $1 \leq p < q = \infty$.

ТЕОРЕМА. Пусть $1 \leq p < \infty$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$, $\sigma = r + 1/p$, $\varepsilon \in M_0$ и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1} \varepsilon_n < +\infty. \quad (1)$$

Тогда¹⁾

$$\sup\{\|\psi^{(r)} - Z_{n,k}(\psi^{(r)})\|; f \in E_p[\varepsilon]\} \underset{(k,r,p)}{\asymp} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} \varepsilon_{\nu} + n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} \varepsilon_{\nu}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

где ψ обозначает соответствующую функцию из C^r , эквивалентную $f \in E_p[\varepsilon]$, существование которой обеспечивается условием (1).

Доказательство теоремы основывается на следующих леммах.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$, $\sigma = r + 1/p$ и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1} E_{n-1}(f)_p < +\infty. \quad (3)$$

Тогда f почти всюду совпадает с некоторой функцией $\psi \in C^r$ и справедлива оценка

$$\|\psi^{(r)} - Z_{n,k}(\psi^{(r)})\| \leq C_1(k, r, p) \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} E_{\nu-1}(f)_p + n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} E_{\nu-1}(f)_p \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу сходимости ряда в (3) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{p}-1} E_{n-1}(f)_p < +\infty,$$

откуда в силу теоремы 2 из [8, с. 56] $f \sim \psi \in C$ (f почти всюду совпадает с некоторой функцией $\psi \in C$) и справедлива оценка

$$E_{n-1}(\psi) \leq C_2(p) \left(n^{\frac{1}{p}} E_{n-1}(f)_p + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\frac{1}{p}-1} E_{\nu-1}(f)_p \right). \quad (5)$$

¹⁾ $\alpha_n \underset{(k,r,p)}{\asymp} \beta_n$ обозначает существование таких постоянных $0 < C_1 \leq C_2$, зависящих лишь от k, r, p , что $C_1 \beta_n \leq \alpha_n \leq C_2 \beta_n$.

Далее, в силу оценки (5) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} E_{n-1}(\psi) &\leq C_2(p) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1} E_{n-1}(f)_p + \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\frac{1}{p}-1} E_{\nu-1}(f)_p \right) \\ &= C_2(p) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1} E_{n-1}(f)_p + \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\frac{1}{p}-1} E_{\nu-1}(f)_p \sum_{n=1}^{\nu} n^{r-1} \right) \\ &\leq 2C_2(p) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1} E_{n-1}(f)_p < +\infty, \quad r \in \mathbb{N}; \end{aligned}$$

следовательно, в силу теоремы С. Н. Бернштейна (см., например, [9, с. 236]) $\psi \in C^r$ и в силу неравенства С. Б. Стечкина [9, с. 237, неравенство (5.23)] получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(\psi^{(r)}) &\leq C_3(r) \left(n^r E_{n-1}(\psi) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_{\nu-1}(\psi) \right) \\ &\leq C_3(r) \cdot C_2(p) \left(n^{\sigma} E_{n-1}(f)_p + n^r \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\frac{1}{p}-1} E_{\nu-1}(f)_p \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} E_{\nu-1}(f)_p + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \mu^{\frac{1}{p}-1} E_{\mu-1}(f)_p \right) \\ &\leq C_3(r) \cdot C_2(p) \left(n^{\sigma} E_{n-1}(f)_p + 2 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} E_{\nu-1}(f)_p \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \mu^{\frac{1}{p}-1} E_{\mu-1}(f)_p \sum_{\nu=n+1}^{\mu} \nu^{r-1} \right) \\ &\leq C_3(r) \cdot C_2(p) \left(n^{\sigma} E_{n-1}(f)_p + 3 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} E_{\nu-1}(f)_p \right). \end{aligned}$$

Учитывая последнюю оценку в неравенстве (см. [10, с. 48, неравенство (1.3)], случай $k = 1$; [11, с. 742, неравенство (4)], [12, с. 589, неравенство (1.15)], случай $k \geq 1$):

$$\|g - Z_{n,k}(g)\| \leq C_4(k) \cdot n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k-1} E_{\nu-1}(g), \quad g \in C, \quad n \in \mathbb{N},$$

получим ($r \in \mathbb{Z}_+$)

$$\begin{aligned} \|\psi^{(r)} - Z_{n,k}(\psi^{(r)})\| &\leq C_4(k) \cdot n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k-1} E_{\nu-1}(\psi^{(r)}) \\ &\leq C_4(k) C_3(r) C_2(p) \left(n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} E_{\nu-1}(f)_p \right. \\ &\quad \left. + 3n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k-1} \sum_{\mu=\nu+1}^n \mu^{\sigma-1} E_{\mu-1}(f)_p + 3n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k-1} \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \mu^{\sigma-1} E_{\mu-1}(f)_p \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_4 \cdot C_3 \cdot C_2 \left(n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} E_{\nu-1}(f)_p \right. \\
&\quad \left. + 3n^{-k} \sum_{\mu=1}^n \mu^{\sigma-1} E_{\mu-1}(f)_p \sum_{\nu=1}^{\mu} \nu^{k-1} + 3 \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \mu^{\sigma-1} E_{\mu-1}(f)_p \right) \\
&\leq C_4(k) \cdot C_3(r) \cdot C_2(p) \left(3 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} E_{\nu-1}(f)_p + 4n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} E_{\nu-1}(f)_p \right),
\end{aligned}$$

откуда и следует требуемая оценка (4). Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $f \in C$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\omega_l \left(f; \frac{\pi}{n+1} \right) \leq C_5(k) \|f - Z_{n,k}(f)\|, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (6)$$

где $l = k + [1 - (-1)^k]/2 = \{k, k - \text{четное}; k+1, k - \text{нечетное}\}$, $C_5(k) = 2^l + (2k+1)\pi^l$.

Неравенство (6) при четном k получено Р. М. Тригубом [13, с. 625–626] и В. В. Жукком [14, с. 96] (см. также [3, с. 260, лемма 3]), при нечетном k оно приведено в [3, с. 260, лемма 5]. Ввиду особой роли неравенства (6) при получении оценок снизу (см. ниже доказательство леммы 3 в случае $p = 1$) мы приводим здесь его доказательство.

Принимая во внимание очевидное тождество

$$\begin{aligned}
T_n(f; x) - Z_{n,k}(T_n(f); x) &= f(x) - Z_{n,k}(f; x) \\
&\quad + T_n(f; x) - f(x) + Z_{n,k}(f - T_n(f); x), \quad k \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

где $T_n(f; x)$ – тригонометрический полином наилучшего в C приближения функции f : $\|f - T_n(f)\| = E_n(f)$, в силу известного неравенства (см., например, [3, с. 260, лемма 8, замечание 2]) $\|Z_{n,k}(g; \cdot)\| \leq (2k-1)\|g\|$ ($g \in C$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$) имеем

$$\begin{aligned}
\|T_n(f) - Z_{n,k}(T_n(f))\| &\leq \|f - Z_{n,k}(f)\| + \|T_n(f) - f\| \\
&\quad + \|Z_{n,k}(f - T_n(f))\| \leq \|f - Z_{n,k}(f)\| + 2kE_n(f) \leq (2k+1)\|f - Z_{n,k}(f)\|.
\end{aligned}$$

При четном k в силу равенства $T_n(f; x) - Z_{n,k}(T_n(f); x) = (-1)^{k/2}(n+1)^{-k} T_n^{(k)}(f; x)$ и известных свойств модулей гладкости (см., например, [3, с. 99–106]) получаем

$$\begin{aligned}
\omega_k \left(f; \frac{\pi}{n+1} \right) &\leq 2^k \|f - T_n(f)\| + \omega_k \left(T_n(f); \frac{\pi}{n+1} \right) \\
&\leq 2^k E_n(f) + \pi^k (n+1)^{-k} \|T_n^{(k)}(f)\| \\
&= 2^k E_n(f) + \pi^k \|T_n(f) - Z_{n,k}(T_n(f))\| \\
&\leq 2^k E_n(f) + \pi^k (2k+1) \|f - Z_{n,k}(f)\| \\
&\leq (2^k + (2k+1)\pi^k) \|f - Z_{n,k}(f)\|.
\end{aligned}$$

При нечетном k в силу равенства

$$T_n(f; x) - Z_{n,k}(T_n(f); x) = (-1)^{(k+3)/2} (n+1)^{-k} \tilde{T}_n^{(k)}(f; x),$$

где $\tilde{g}$ – функция, тригонометрически сопряженная с g , и неравенства $\|T_n^{(k+1)}(f)\| \leq n\|\tilde{T}_n^{(k)}(f)\|$, являющегося следствием неравенства (127) из [3, с. 115], имеем

$$\begin{aligned}\omega_{k+1}\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right) &\leq 2^{k+1}E_n(f) + \pi^{k+1}(n+1)^{-(k+1)}\|T_n^{(k+1)}(f)\| \\ &\leq 2^{k+1}E_n(f) + \pi^{k+1}(n+1)^{-k}\|\tilde{T}_n^{(k)}(f)\| \\ &= 2^{k+1}E_n(f) + \pi^{k+1}\|T_n(f) - Z_{n,k}(T_n(f))\| \\ &\leq 2^{k+1}E_n(f) + \pi^{k+1}(2k+1)\|f - Z_{n,k}(f)\| \\ &\leq (2^{k+1} + (2k+1)\pi^{k+1})\|f - Z_{n,k}(f)\|.\end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $1 \leq p < \infty$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$, $\sigma = r + 1/p$, $\varepsilon \in M_0$. Существует функция $g(x; p; \varepsilon) \in L_p$ такая, что

- 1) $E_{n-1}(g)_p \leq C_6(p)\varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$;
- 2) $g \in C^r \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1}\varepsilon_n < +\infty$, при этом

$$\|g^{(r)}\| \geq |g^{(r)}(0; p; \varepsilon)| \geq C_7(r, p) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1}\varepsilon_n;$$

- 3) если ряд в 2) сходится, то

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1}\varepsilon_{\nu} + n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1}\varepsilon_{\nu} \leq C_8(k; r; p) \|g^{(r)} - Z_{n,k}(g^{(r)})\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что $g(x; p; \varepsilon)$ в качестве функции для оценок снизу была ранее использована в заметке автора [15], в силу чего при доказательстве настоящей леммы мы будем пользоваться некоторыми оценками, приведенными в доказательстве леммы 5 указанной заметки.

Рассмотрим случай $p = 1$. Положим $g(x; 1; \varepsilon) = f_1(x; \varepsilon) + f_2(x; \varepsilon)$, где f_1 и f_2 – функции, рассмотренные в [16, с. 574–575, с. 579], [17, с. 24–25]:

$$\begin{aligned}f_1(x; \varepsilon) &= \frac{\varepsilon_1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = a_n(\varepsilon) = \sum_{\nu=n}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{\nu+1}\right) \Delta\varepsilon_{\nu}, \\ f_2(x; \varepsilon) &= \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin jx, \quad b_j = b_j(\varepsilon) = \sum_{\nu=j}^{2(j-1)} \Delta\varepsilon_{\nu} \left(1 - \frac{j}{\nu+1}\right) \\ &+ j \sum_{\nu=2j-1}^{\infty} (\nu+1)^{-1} \Delta\varepsilon_{\nu}, \quad \Delta\varepsilon_{\nu} = \varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\nu+1}, \quad \nu = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

В [16, с. 575, 579], [17, с. 24–25] доказано, что $f_i \in L_1$ и $E_{n-1}(f_i)_1 \leq C_i \varepsilon_n$ ($i = 1, 2$); следовательно, $g \in L_1$ и $E_{n-1}(g)_1 \leq E_{n-1}(f_1)_1 + E_{n-1}(f_2)_1 \leq (C_1 + C_2)\varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$, т.е.

имеет место 1) с постоянной $C_6(1) = C_1 + C_2$. Далее, соотношение 2) доказано в [15, п. 2) леммы 5 на с. 57].

Докажем 3). При $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|g^{(r)} - Z_{n,k}(g^{(r)})\| \geq |g^{(r)}(0; 1; \varepsilon) - Z_{n,k}(g^{(r)}; 0)| = \{|f_1^{(r)}(0; \varepsilon) - Z_{n,k}(f_1^{(r)}; 0)|,$$

$$0 \leq r - \text{четное}; |f_2^{(r)}(0; \varepsilon) - Z_{n,k}(f_2^{(r)}; 0)|, r - \text{нечетное}\}.$$

В случае $0 \leq r - \text{четное}$ в силу 7), 8) и 2) леммы 2 [15] получаем ($\sigma = r + 1$ при $p = 1$)

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^r \varepsilon_{\nu} + n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+r} \varepsilon_{\nu} \\ & \leq (r+2) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^r a_{\nu} + (n+1)^{r+1} a_{n+1} + (k+r+2)n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+r} a_{\nu} \\ & \leq [(2^{r+1} + 1)(k+r+1) + 1]n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+r} a_{\nu} + (r+2) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^r a_{\nu} \\ & \leq C_9(k, r) \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^r a_{\nu} + n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+r} a_{\nu} \right) \\ & \leq 2^k C_9(k, r) |f_1^{(r)}(0; \varepsilon) - Z_{n,k}(f_1^{(r)}; 0)| \leq C_8(k, r, 1) \|g^{(r)} - Z_{n,k}(g^{(r)})\|. \end{aligned}$$

В случае, когда $r - \text{нечетное}$, имеем

$$|f_2^{(r)}(0; \varepsilon) - Z_{n,k}(f_2^{(r)}; 0)| = \sum_{j=n+1}^{\infty} j^r b_j(\varepsilon) + (n+1)^{-k} \sum_{j=1}^n j^{k+r} b_j(\varepsilon).$$

Оценим снизу слагаемые в правой части последнего равенства. Так как (см. доказательство 4) леммы 5 в [15] при $p = 1$)

$$\sum_{j=1}^n j^{k+r} b_j(\varepsilon) \geq C_{10}(k, r) \left(\sum_{i=1}^n i^{k+r} \varepsilon_i - \varepsilon_{n+1} \sum_{i=1}^n i^{k+r} \right),$$

то

$$n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k+r} \varepsilon_i \leq C_{10}^{-1}(k, r) n^{-k} \sum_{j=1}^n j^{k+r} b_j(\varepsilon) + n^{r+1} \varepsilon_{n+1}.$$

Далее, в силу оценок ($b_j(\varepsilon) \geq j \sum_{\nu=2j-1}^{\infty} (\nu+1)^{-1} \Delta \varepsilon_{\nu}$, $j = 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=2n+1}^{\infty} (\nu+1)^{r+1} \Delta \varepsilon_{\nu} \geq (r+1) \sum_{\nu=2n+1}^{\infty} \Delta \varepsilon_{\nu} \left(\sum_{i=1}^{2n} i^r + \sum_{i=2n+1}^{\nu} i^r \right) \\ & = (r+1) \varepsilon_{2n+1} \sum_{i=1}^{2n} i^r + (r+1) \sum_{i=2n+1}^{\infty} i^r \sum_{\nu=i}^{\infty} \Delta \varepsilon_{\nu} \geq (r+1) \sum_{i=2n+1}^{\infty} i^r \varepsilon_i, \\ & \sum_{j=n+1}^{\infty} j^r b_j(\varepsilon) \geq \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{r+1} \sum_{\nu=2j-1}^{\infty} (\nu+1)^{-1} \Delta \varepsilon_{\nu} \geq \sum_{\nu=2n+1}^{\infty} (\nu+1)^{-1} \Delta \varepsilon_{\nu} \sum_{j=n+1}^{[(\nu+1)/2]} j^{r+1} \\ & \geq (r+2)^{-1} \sum_{\nu=2n+1}^{\infty} (\nu+1)^{-1} \Delta \varepsilon_{\nu} \left(\left[\frac{(\nu+1)}{2} \right]^{r+2} - n^{r+2} \right) \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^r \varepsilon_{\nu} &= \sum_{\nu=n+1}^{2n} \nu^r \varepsilon_{\nu} + \sum_{\nu=2n+1}^{\infty} \nu^r \varepsilon_{\nu} \\
 &\leq 2^r n^{r+1} \varepsilon_{n+1} + (r+1)^{-1} \sum_{\nu=2n+1}^{\infty} (\nu+1)^{r+1} \Delta \varepsilon_{\nu} \\
 &\leq 2^r n^{r+1} \varepsilon_{n+1} + (r+1)^{-1} (r+2) 4^{r+2} \sum_{j=n+1}^{\infty} j^r b_j(\varepsilon) \\
 &\quad + (r+1)^{-1} 4^{r+2} \cdot n^{r+2} \sum_{\nu=2n+1}^{\infty} (\nu+1)^{-1} \Delta \varepsilon_{\nu} \\
 &\leq (r+1)^{-1} (r+2) 4^{r+2} \sum_{j=n+1}^{\infty} j^r b_j(\varepsilon) + (2^r + (r+1)^{-1} 4^{r+1}) n^{r+1} \varepsilon_{n+1} \\
 &\quad \left(\left\lfloor \frac{\nu+1}{2} \right\rfloor \geq \frac{1}{4}(\nu+1) \right).
 \end{aligned}$$

Объединяя полученные оценки, имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^r \varepsilon_{\nu} + n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+r} \varepsilon_{\nu} &\leq (r+1)^{-1} \cdot (r+2) \cdot 4^{r+2} \sum_{j=n+1}^{\infty} j^r b_j(\varepsilon) \\
 &\quad + C_{10}^{-1}(k, r) \cdot n^{-k} \sum_{j=1}^n j^{k+r} b_j(\varepsilon) + (2^r + 1 + (r+1)^{-1} \cdot 4^{r+1}) n^{r+1} \varepsilon_{n+1} \\
 &\leq C_{11}(k, r) |f_2^{(r)}(0; \varepsilon) - Z_{n,k}(f_2^{(r)}; 0)| + C_{12}(r) n^{r+1} \varepsilon_{n+1}.
 \end{aligned}$$

Теперь оценим сверху $n^{r+1} \varepsilon_{n+1}$. При k – четном (значит, $(k+r)$ – нечетное) в силу неравенства (24) леммы 3 из [18, с. 72] и 8) леммы 2 в [15] (см. также доказательство 4) леммы 5 в [15] при $p = 1$)

$$\begin{aligned}
 C_{13}(k+r) \cdot n^{k+r+1} \omega_{k+r} \left(f_1; \frac{\pi}{n} \right) &\geq \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+r+1} a_{\nu} \\
 &\geq (k+r+3)^{-1} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+r+1} \varepsilon_{\nu} \geq (k+r+3)^{-1} \cdot \varepsilon_n \cdot \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+r+1} \\
 &\geq (k+r+3)^{-1} (k+r+2)^{-1} \cdot n^{k+r+2} \cdot \varepsilon_n,
 \end{aligned}$$

откуда в силу неравенства (6) леммы 2 (k – четное) получаем

$$\begin{aligned}
 n^{r+1} \cdot \varepsilon_{n+1} &\leq n^{r+1} \cdot \varepsilon_n \leq C_{13}(k+r) \cdot (k+r+2)(k+r+3) n^r \cdot \omega_{k+r} \left(f_1; \frac{\pi}{n} \right) \\
 &\leq C_{14}(k+r) \cdot \pi^r \cdot \omega_k \left(f_1^{(r)}; \frac{\pi}{n} \right) \leq C_{15}(k, r) \cdot \|f_1^{(r)} - Z_{n,k}(f_1^{(r)})\|.
 \end{aligned}$$

При k – нечетном (значит, $k + r + 1$ – нечетное) в силу неравенства (24) леммы 3 в [18, с. 72] и 8) леммы 2 в [15]

$$\begin{aligned} C_{13}(k+r+1) \cdot n^{k+r+2} \cdot \omega_{k+r+1} \left(f_1; \frac{\pi}{n} \right) &\geq \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+r+2} a_\nu \\ &\geq (k+r+4)^{-1} \cdot \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+r+2} \varepsilon_\nu \geq (k+r+4)^{-1} \cdot (k+r+3)^{-1} \cdot n^{k+r+3} \varepsilon_n, \end{aligned}$$

откуда в силу неравенства (6) леммы 2 (k – нечетное) получаем

$$\begin{aligned} n^{r+1} \varepsilon_{n+1} &\leq C_{13}(k+r+1) \cdot (k+r+3)(k+r+4) n^r \omega_{k+r+1} \left(f_1; \frac{\pi}{n} \right) \\ &\leq C_{16}(k+r) \cdot \pi^r \cdot \omega_{k+1} \left(f_1^{(r)}; \frac{\pi}{n} \right) \leq C_{17}(k, r) \cdot \|f_1^{(r)} - Z_{n,k}(f_1^{(r)})\|. \end{aligned}$$

В силу полученных оценок для $n^{r+1} \varepsilon_n$ окончательно имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^r \varepsilon_\nu + n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+r} \varepsilon_\nu \\ \leq C_{11}(k, r) |f_2^{(r)}(0; \varepsilon) - Z_{n,k}(f_2^{(r)}; 0)| + C_{12}(r) C_{18}(k, r) \cdot \|f_1^{(r)} - Z_{n,k}(f_1^{(r)})\| \\ \leq C_{19}(k, r) \cdot \|g^{(r)} - Z_{n,k}(g^{(r)})\|. \end{aligned}$$

Пусть теперь $1 < p < \infty$. Положим (см. [15, с. 59])

$$g(x; p; \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\cos nx + \sin nx), \quad a_n = a_n(p; \varepsilon) = \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{1/p-1} \Delta \varepsilon_\nu.$$

В [15, с. 59] доказано, что $g \in L_p$ и $E_{n-1}(g) \leq C_6(p) \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$, т.е. имеет место 1). Там же доказано и утверждение 2). Докажем 3). В силу 6) и 7) леммы 3 в [15] имеем ($\sigma = r + 1/p$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} \varepsilon_\nu + n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} \varepsilon_\nu \\ \leq C_{20}(p) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^r a_\nu + \left(2 - \frac{1}{p}\right) n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+r} a_\nu + \left(1 - \frac{1}{p}\right) n^r \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu \\ \leq \left(C_{20}(p) + 1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^r a_\nu + \left(2 - \frac{1}{p}\right) n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+r} a_\nu \\ \leq C_{21}(p) \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^r a_\nu + 2^k (n+1)^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+r} a_\nu \right) \\ \leq 2^k C_{21}(p) |g^{(r)}(0; p; \varepsilon) - Z_{n,k}(g^{(r)}; 0)| \leq C_{22}(k, p) \|g^{(r)} - Z_{n,k}(g^{(r)})\|, \end{aligned}$$

где $C_{20}(p) = p$ при $r = 0$ и $C_{20}(p) = 2 - 1/p$ при $r > 0$. Утверждение 3) и лемма 3 доказаны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Условие сходимости ряда (1) необходимо и достаточно для справедливости вложения $E_p[\varepsilon] \subset C^r$ (точнее, всякая функция $f \in E_p[\varepsilon]$ эквивалентна некоторой функции $\psi \in C^r$). Достаточность известна и следует из первой части утверждения леммы 1. Необходимость при $r = 0$ доказана в [19, с. 214]. При $r \geq 0$ см. 1) и 2) леммы 3 настоящей заметки.

Оценка сверху в (2) следует из неравенства (4) леммы 1. Оценку снизу в (2) доставляет функция $C_6^{-1}(p)g(x; p; \varepsilon) \in E_p[\varepsilon]$, рассмотренная в лемме 3. Для нее согласно п. 3) этой леммы

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} \varepsilon_{\nu} + n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} \varepsilon_{\nu} &\leq C_8(k, r, p) \|g^{(r)} - Z_{n,k}(g^{(r)})\| \\ &\leq C_8(k, r, p) \sup\{\|\psi^{(r)} - Z_{n,k}(\psi^{(r)})\|; f \in E_p[\varepsilon]\}. \end{aligned}$$

Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Zygmund A. The approximation of functions by typical means of their Fourier series // Duke Math. J. 1945. V. 12. № 4. P. 695–704.
- [2] Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
- [3] Жук В. В. Аппроксимация периодических функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.
- [4] Ильясов Н. А. Приближение периодических функций средними Зигмунда // Матем. заметки. 1986. Т. 39. № 3. С. 367–382.
- [5] Ильясов Н. А. О приближении периодических функций средними Фейера–Зигмунда в разных метриках // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 4. С. 48–57.
- [6] Ильясов Н. А. Обратная теорема теории приближений в разных метриках // Матем. заметки. 1991. Т. 50. № 6. С. 57–65.
- [7] Ильясов Н. А. Приближение средними Фейера–Зигмунда на некоторых классах периодических функций в L_p // Труды Азерб. матем. о-ва. 1996. Т. 2. С. 91–110.
- [8] Конюшков А. А. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Матем. сб. 1958. Т. 44. № 1. С. 53–84.
- [9] Стечкин С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. № 3. С. 219–242.
- [10] Стечкин С. Б. Приближение периодических функций суммами Фейера // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1961. Т. 62. С. 48–60.
- [11] Тиман М. Ф. Некоторые линейные процессы суммирования рядов Фурье и наилучшее приближение // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145. № 4. С. 741–743.
- [12] Тиман М. Ф. Наилучшее приближение функции и линейные методы суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. № 3. С. 587–604.
- [13] Тригуб Р. М. Конструктивные характеристики некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. № 3. С. 615–630.
- [14] Жук В. В. О приближении 2π -периодической функции линейным оператором // Сб. научных трудов Ленингр. мех. ин-та. 1965. № 50. С. 93–115.
- [15] Ильясов Н. А. К обратной теореме теории приближений периодических функций в разных метриках // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 2. С. 53–61.
- [16] Гейт В. Э. О точности некоторых неравенств в теории приближений // Матем. заметки. 1971. Т. 10. № 5. С. 571–582.
- [17] Гейт В. Э. О структурных и конструктивных свойствах функции и ее сопряженной в L // Изв. вузов. Матем. 1972. № 7. С. 19–30.
- [18] Гейт В. Э. Теоремы вложения для некоторых классов периодических непрерывных функций // Изв. вузов. Матем. 1972. № 4. С. 67–77.
- [19] Коляда В. И. Теоремы вложения и неравенства разных метрик для наилучших приближений // Матем. сб. 1977. Т. 102. № 2. С. 195–215.