Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ш. Кожегельдинов, К решению системы уравнений Герона, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 5, 688–698

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm532>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 04:29:37

УДК 511

К РЕШЕНИЮ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГЕРОНА

С. Ш. Кожегельдинов

Изучается система, состоящая из конечного числа уравнений Герона с общей переменной, и доказывается эквивалентность общих формул всех решений такой системы.

Библиография: 6 названий.

Рассматривается следующая система:

$$\begin{cases} 16S_1^2 = (x_1 - y_1 + z)(x_1 + y_1 - z)(-x_1 + y_1 + z)(x_1 + y_1 + z), \\ 16S_2^2 = (x_2 - y_2 + z)(x_2 + y_2 - z)(-x_2 + y_2 + z)(x_2 + y_2 + z), \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} S_1, x_1, y_1, z, x_2, y_2, S_2 \in \mathbb{N}, \quad x_1 < y_1 + z, \quad y_1 < z + x_1, \\ z < x_1 + y_1, \quad x_2 < y_2 + z, \quad y_2 < z + x_2, \quad z < x_2 + y_2, \end{aligned} \quad (2)$$

состоящая из двух уравнений Герона с общей переменной z . Для отыскания всех решений такой системы используются результаты и методы работ [1]–[6].

Решение $\langle S_1; x_1, y_1, z, x_2, y_2; S_2 \rangle$ системы (1) с условием (2) называется *основным*, если $\langle x_1, y_1, z, x_2, y_2 \rangle = 1$, т.е. если x_1, y_1, z, x_2, y_2 – взаимно простые числа.

Система (1) с условием (2) получается при $z_1 = z_2 = z$ из системы

$$\begin{cases} 16S_1^2 = (x_1 - y_1 + z_1)(x_1 + y_1 - z_1)(-x_1 + y_1 + z_1)(x_1 + y_1 + z_1), \\ 16S_2^2 = (x_2 - y_2 + z_2)(x_2 + y_2 - z_2)(-x_2 + y_2 + z_2)(x_2 + y_2 + z_2), \end{cases} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} S_1, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, S_2 \in \mathbb{N}, \quad x_1 < y_1 + z_1, \quad y_1 < z_1 + x_1, \\ z_1 < x_1 + y_1, \quad x_2 < y_2 + z_2, \quad y_2 < z_2 + x_2, \quad z_2 < x_2 + y_2. \end{aligned} \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 1. Все решения системы героновых уравнений (1) с условием (2) получаются из формулы

$$\begin{aligned} S_1 &= k^2 \frac{abcd(a+b)(ac^2 - bd^2)(u^2w^2 + v^2t^2)^2}{\Delta_1^2}, \\ x_1 &= k \frac{(a+b)(ac^2 - bd^2)(u^2w^2 + v^2t^2)}{\Delta_1}, \quad y_1 = k \frac{ab(c^2 + d^2)(u^2w^2 + v^2t^2)}{\Delta_1}, \\ z &= k \frac{(a^2c^2 + b^2d^2)(u^2w^2 + v^2t^2)}{\Delta_1}, \\ x_2 &= k \frac{(u+v)(uw^2 - vt^2)(a^2c^2 + b^2d^2)}{\Delta_1}, \quad y_2 = k \frac{uv(w^2 + t^2)(a^2c^2 + b^2d^2)}{\Delta_1}, \\ S_2 &= k^2 \frac{uvwt(u+v)(uw^2 - vt^2)(a^2c^2 + b^2d^2)^2}{\Delta_1^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} k, a, b, c, d, u, v, w, t \in \mathbb{N}, \quad ac^2 > bd^2, \quad uw^2 > vt^2, \\ (a, b) = (c, d) = (u, v) = (w, t) = 1, \\ \Delta_1 = ((a^2c^2 + b^2d^2)(uw^2 - vt^2, vt^2(u + v)), (u^2w^2 + v^2t^2)(ac^2 - bd^2, bd^2(a + b))). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь и в дальнейшем для удобства совокупность формул вида (5) мы называем формулой.

ТЕОРЕМА 2. *Все решения системы героновых уравнений (1) с условием (2) получаются из формулы*

$$\begin{aligned} S_1 &= k^2 \frac{mnpq(m+n)(np^2 - mq^2)\alpha^2\beta^2(\gamma^2 + \delta^2)^2}{\Delta_2^2}, \\ x_1 &= k \frac{(m+n)(np^2 - mq^2)\alpha\beta(\gamma^2 + \delta^2)}{\Delta_2}, \quad y_1 = k \frac{\alpha\beta(\gamma^2 + \delta^2)(n^2p^2 + m^2q^2)}{\Delta_2}, \\ z &= k \frac{mn(p^2 + q^2)\alpha\beta(\gamma^2 + \delta^2)}{\Delta_2}, \\ x_2 &= k \frac{(\alpha + \beta)(\beta\gamma^2 - \alpha\delta^2)mn(p^2 + q^2)}{\Delta_2}, \quad y_2 = k \frac{(\beta^2\gamma^2 + \alpha^2\delta^2)mn(p^2 + q^2)}{\Delta_2}, \\ S_2 &= k^2 \frac{\alpha\beta\gamma\delta(\alpha + \beta)(\beta\gamma^2 - \alpha\delta^2)m^2n^2(p^2 + q^2)^2}{\Delta_2^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} k, m, n, p, q, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}, \quad np^2 > mq^2, \quad \beta\gamma^2 > \alpha\delta^2, \\ (m, n) = (p, q) = (\alpha, \beta) = (\gamma, \delta) = 1, \\ \Delta_2 = (mn(p^2 + q^2)(\beta\gamma^2 - \alpha\delta^2, \alpha\delta^2(\alpha + \beta)), \alpha\beta(\gamma^2 + \delta^2)(np^2 - mq^2, mq^2(m + n))). \end{aligned} \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 3. *Все решения системы героновых уравнений (1) с условием (2) получаются из формулы*

$$\begin{aligned} S_1 &= k^2 \frac{abcd(a+b)(abc^2 - d^2)v^2(u^2w^2 + t^2)^2}{\Delta_3^2}, \\ x_1 &= k \frac{(a+b)(abc^2 - d^2)v(u^2w^2 + t^2)}{\Delta_3}, \quad y_1 = k \frac{a(b^2c^2 + d^2)v(u^2w^2 + t^2)}{\Delta_3}, \\ z &= k \frac{b(a^2c^2 + d^2)v(u^2w^2 + t^2)}{\Delta_3}, \\ x_2 &= k \frac{(u+v)(uvw^2 - t^2)b(a^2c^2 + d^2)}{\Delta_3}, \quad y_2 = k \frac{u(v^2w^2 + t^2)b(a^2c^2 + d^2)}{\Delta_3}, \\ S_2 &= k^2 \frac{uvwt(u+v)(uvw^2 - t^2)b^2(a^2c^2 + d^2)^2}{\Delta_3^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} k, a, b, c, d, u, v, w, t \in \mathbb{N}, \quad abc^2 > d^2, \quad uvw^2 > t^2, \\ (a, b) = (c, d) = (u, v) = (w, t) = 1, \\ \Delta_3 = (b(a^2c^2 + d^2)(uvw^2 - t^2, t^2(u + v)), v(u^2w^2 + t^2)(abc^2 - d^2, d^2(a + b))). \end{aligned} \quad (10)$$

ТЕОРЕМА 4. Все решения системы героновых уравнений (1) с условием (2) получаются из формулы

$$\begin{aligned}
 S_1 &= k^2 \frac{mnpq(m+n)(p^2 - mnq^2)\alpha^2(\gamma^2 + \beta^2\delta^2)^2}{\Delta_4^2}, \\
 x_1 &= k \frac{(m+n)(p^2 - mnq^2)\alpha(\gamma^2 + \beta^2\delta^2)}{\Delta_4}, \quad y_1 = k \frac{n(p^2 + m^2q^2)\alpha(\gamma^2 + \beta^2\delta^2)}{\Delta_4}, \\
 z &= k \frac{m(p^2 + n^2q^2)\alpha(\gamma^2 + \beta^2\delta^2)}{\Delta_4}, \\
 x_2 &= k \frac{(\alpha + \beta)(\gamma^2 - \alpha\beta\delta^2)m(p^2 + n^2q^2)}{\Delta_4}, \quad y_2 = k \frac{\beta(\gamma^2 + \alpha^2\delta^2)m(p^2 + n^2q^2)}{\Delta_4}, \\
 S_2 &= k^2 \frac{\alpha\beta\gamma\delta(\alpha + \beta)(\gamma^2 - \alpha\beta\delta^2)m^2(p^2 + n^2q^2)^2}{\Delta_4^2},
 \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}
 k, m, n, p, q, \alpha, \beta, \gamma, \delta &\in \mathbb{N}, \quad p^2 > mnq^2, \quad \gamma^2 > \alpha\beta\delta^2, \\
 (m, n) &= (p, q) = (\alpha, \beta) = (\gamma, \delta) = 1, \\
 \Delta_4 &= (m(p^2 + n^2q^2)(\gamma^2 - \alpha\beta\delta^2, \alpha\beta(\alpha + \beta)), \alpha(\gamma^2 + \beta^2\delta^2)(p^2 - mnq^2, mn(m + n))).
 \end{aligned} \tag{12}$$

ТЕОРЕМА 5. Все решения системы героновых уравнений (1) с условием (2) получаются из формулы

$$\begin{aligned}
 S_1 &= k^2 \frac{abcd(ad + bc)(ac - bd)w^2t^2(u^2 + v^2)^2}{\Delta_5^2}, \\
 x_1 &= k \frac{(ad + bc)(ac - bd)wt(u^2 + v^2)}{\Delta_5}, \quad y_1 = k \frac{ab(c^2 + d^2)wt(u^2 + v^2)}{\Delta_5}, \\
 z &= k \frac{cd(a^2 + b^2)wt(u^2 + v^2)}{\Delta_5}, \\
 x_2 &= k \frac{(ut + vw)(uw - vt)cd(a^2 + b^2)}{\Delta_5}, \quad y_2 = k \frac{uv(w^2 + t^2)cd(a^2 + b^2)}{\Delta_5}, \\
 S_2 &= k^2 \frac{uvwt(ut + vw)(uw - vt)c^2d^2(a^2 + b^2)^2}{\Delta_5^2},
 \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
 k, a, b, c, d, u, v, w, t &\in \mathbb{N}, \quad ac > bd, \quad uw > vt, \\
 (a, b) &= (c, d) = (u, v) = (w, t) = 1, \\
 \Delta_5 &= (cd(a^2 + b^2)((uw - vt)(ut, vw), vt(ut + vw)), \\
 &\quad wt(u^2 + v^2)((ac - bd)(ad, bc), bd(ad + bc))).
 \end{aligned} \tag{14}$$

ТЕОРЕМА 6. Все решения системы героновых уравнений (1) с условием (2) получаются из формулы

$$\begin{aligned}
 S_1 &= k^2 \frac{mnpq(mq + np)(nq - mp)\gamma^2\delta^2(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\Delta_6^2}, \\
 x_1 &= k \frac{(mq + np)(nq - mp)\gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2)}{\Delta_6}, \quad y_1 = k \frac{mn(p^2 + q^2)\gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2)}{\Delta_6}, \\
 z &= k \frac{pq(m^2 + n^2)\gamma\delta(\gamma^2 + \beta^2)}{\Delta_6}, \\
 x_2 &= k \frac{(\alpha\delta + \beta\alpha)(\beta\delta - \alpha\gamma)pq(m^2 + n^2)}{\Delta_6}, \quad y_2 = k \frac{\alpha\beta(\gamma^2 + \delta^2)pq(m^2 + n^2)}{\Delta_6}, \\
 S_2 &= k^2 \frac{\alpha\beta\gamma\delta(\alpha\delta + \beta\gamma)(\beta\delta - \alpha\gamma)p^2q^2(m^2 + n^2)^2}{\Delta_6^2},
 \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
 k, m, n, p, q, \alpha, \beta, \gamma, \delta &\in \mathbb{N}, \quad nq > mp, \quad \beta\delta > \alpha\gamma, \\
 (m, n) &= (p, q) = (\alpha, \beta) = (\gamma, \delta) = 1, \\
 \Delta_6 &= (pq(m^2 + n^2)((\beta\delta - \alpha\gamma)(\alpha\delta, \beta\gamma), \alpha\gamma(\alpha\delta + \beta\gamma)), \\
 &\quad \gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2)((nq - mp)(mq, np), mp(mq + np))).
 \end{aligned} \tag{16}$$

ТЕОРЕМА 7. Все решения системы героновых уравнений (1) с условием (2) получаются из формулы

$$\begin{aligned}
 S_1 &= k^2 \frac{abc(a + b)(c^2 - ab)u^2(v^2 + w^2)^2}{\Delta_7^2}, \\
 x_1 &= k \frac{(a + b)(c^2 - ab)u(v^2 + w^2)}{\Delta_7}, \quad y_1 = k \frac{b(c^2 + a^2)u(v^2 + w^2)}{\Delta_7}, \\
 z &= k \frac{a(c^2 + b^2)u(v^2 + w^2)}{\Delta_7}, \\
 x_2 &= k \frac{(u + v)(w^2 - uv)a(c^2 + b^2)}{\Delta_7}, \quad y_2 = k \frac{v(w^2 + u^2)a(c^2 + b^2)}{\Delta_7}, \\
 S_2 &= k^2 \frac{uvw(u + v)(w^2 - uv)a^2(c^2 + b^2)^2}{\Delta_7^2},
 \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}
 k, a, b, c, u, v, w &\in \mathbb{N}, \quad c^2 > ab, \quad w^2 > uv, \\
 (a, b, c) &= (u, v, w) = 1, \\
 \Delta_7 &= (u(w^2 + v^2)((c^2 - ab)(a, b), ab(a + b)), a(c^2 + b^2)((w^2 - uv)(u, v), uv(u + v))).
 \end{aligned} \tag{18}$$

ТЕОРЕМА 8. Все решения системы героновых уравнений (1) с условием (2) получаются из формулы

$$\begin{aligned} S_1 &= k^2 \frac{mnq(m+n)(mn-q^2)\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)^2}{\Delta_8^2}, \\ x_1 &= k \frac{(m+n)(mn-q^2)\alpha(\beta^2+\gamma^2)}{\Delta_8}, \quad y_1 = k \frac{n(m^2+q^2)\alpha(\beta^2+\gamma^2)}{\Delta_8}, \\ z &= k \frac{m(n^2+q^2)\alpha(\beta^2+\gamma^2)}{\Delta_8}, \\ x_2 &= k \frac{(\alpha+\beta)(\alpha\beta-\gamma^2)m(n^2+q^2)}{\Delta_8}, \quad y_2 = k \frac{\beta(\alpha^2+\gamma^2)m(n^2+q^2)}{\Delta_8}, \\ S_2 &= k^2 \frac{\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta)(\alpha\beta-\gamma^2)m^2(n^2+q^2)^2}{\Delta_8^2}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} k, m, n, q, \alpha, \beta, \gamma &\in \mathbb{N}, \quad mn > q^2, \quad \alpha\beta > \gamma^2, \\ (m, n, q) &= (\alpha, \beta, \gamma) = 1, \\ \Delta_8 &= (m(n^2+q^2)((\alpha\beta-\gamma^2)(\alpha, \beta), \gamma^2(\alpha+\beta)), \\ &\quad \alpha(\beta^2+\gamma^2)((mn-q^2)(m, n), q^2(m+n))). \end{aligned} \quad (20)$$

СЛЕДСТВИЕ. Если имеют место соответственно условия (6), (8), (10), (12), (14), (16), (18), (20), то каждая из формул (5), (7), (9), (11), (13), (15), (17), (19) при $k = 1$ дает все основные решения системы героновых уравнений (1) с условием (2).

ПРИМЕР. Если $k = 1, a = 3, b = 1, c = 5, d = 3, u = 5, v = 4, w = 6, t = 5$, то условие (6) выполнено. Так как $\Delta_1 = 1560$, то формула (5) дает $S_1 = 8250, x_1 = 220, y_1 = 85, z = 195, x_2 = 108, y_2 = 183, S_2 = 9720$. Это решение является основным, так как $(220, 85, 195, 108, 183) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Так как все решения системы двух героновых уравнений (3) с условием (4) получаются из формул:

$$\begin{aligned} x_1 &= k_1 \frac{(a+b)(ac^2-bd^2)}{(ac^2-bd^2, bd^2(a+b))}, \quad y_1 = k_1 \frac{ab(c^2+d^2)}{(ac^2-bd^2, bd^2(a+b))}, \\ z_1 &= k_1 \frac{a^2c^2+b^2d^2}{(ac^2-bd^2, bd^2(a+b))}, \quad S_1 = k_1^2 \frac{abcd(a+b)(ac^2-bd^2)}{(ac^2-bd^2, bd^2(a+b))^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$k_1, a, b, c, d \in \mathbb{N}, \quad ac^2 > bd^2, \quad (a, b) = (c, d) = 1; \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= k_2 \frac{(u+v)(uw^2-vt^2)}{(uw^2-vt^2, vt^2(u+v))}, \quad y_2 = k_2 \frac{uv(w^2+t^2)}{(uw^2-vt^2, vt^2(u+v))}, \\ z_2 &= k_2 \frac{u^2w^2+v^2t^2}{(uw^2-vt^2, vt^2(u+v))}, \quad S_2 = k_2^2 \frac{uvw t(u+v)(uw^2-vt^2)}{(uw^2-vt^2, vt^2(u+v))^2}, \end{aligned} \quad (23)$$

а

$$k_2, u, v, w, t \in \mathbb{N}, \quad uw^2 > vt^2, \quad (u, v) = (w, t) = 1, \quad (24)$$

ТО ПОЛОЖИМ, ЧТО

$$\begin{aligned} k_1 &= k \frac{(u^2w^2 + v^2t^2)(ac^2 - bd^2, bd^2(a+b))}{\Delta_1}, \\ k_2 &= k \frac{(a^2c^2 + b^2d^2)(uw^2 - vt^2, vt^2(u+v))}{\Delta_1}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} k, a, b, c, d, u, v, w, t &\in \mathbb{N}, \quad ac^2 > bd^2, \quad uw^2 > vt^2, \\ (a, b) &= (c, d) = (u, v) = (w, t) = 1, \\ \Delta_1 &= ((a^2c^2 + b^2d^2)(uw^2 - vt^2, vt^2(u+v)), (u^2w^2 + v^2t^2)(ac^2 - bd^2, bd^2(a+b))). \end{aligned} \quad (26)$$

Из формулы (21) с условием (22) и формулы (23) с условием (24) в силу (25) с условием (26) получается формула (5) с условием (6), которая, как нетрудно убедиться, не только удовлетворяет системе двух героновых уравнений (1) с условием (2), но и дает все решения. Теорема 1 доказана.

Доказательства теорем 2–8 аналогичны доказательству теоремы 1.

ТЕОРЕМА 9. Если имеют место соответственно условия (6), (8), (10), (12), (14), (16), (18), (20), то общие формулы (5), (7), (9), (11), (13), (15), (17), (19) всех решений системы двух героновых уравнений (1) с условием (2) эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в (5) $k = k$,

$$\begin{aligned} a &= m, \quad b = n, \quad c = \frac{np}{(mq, np)}, \quad d = \frac{mq}{(mq, np)}, \\ u &= \alpha, \quad v = \beta, \quad w = \frac{\beta\gamma}{(\alpha\delta, \beta\gamma)}, \quad t = \frac{\alpha\delta}{(\alpha\delta, \beta\gamma)}, \end{aligned}$$

где $k, m, n, p, q, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$, $np^2 > mq^2$, $\beta\gamma^2 > \alpha\delta^2$, $(m, n) = (p, q) = (\alpha, \beta) = (\gamma, \delta) = 1$. Тогда из формулы (5) получается формула (7). Действительно, так как $k = k$,

$$\begin{aligned} abcd(a+b)(ac^2 - bd^2)(u^2w^2 + v^2t^2)^2 &= \frac{m^3n^3(m+n)(np^2 - mq^2)\alpha^4\beta^4(\gamma^2 + \delta^2)^2}{(mq, np)^4(\alpha\delta, \beta\gamma)^4}, \\ (a+b)(ac^2 - bd^2)(u^2w^2 + v^2t^2) &= \frac{mn(m+n)(np^2 - mq^2)\alpha^2\beta^2(\gamma^2 + \delta^2)}{(mq, np)^2(\alpha\delta, \beta\gamma)^2}, \\ ab(c^2 + d^2)(u^2w^2 + v^2t^2) &= \frac{mn(n^2p^2 + m^2q^2)\alpha^2\beta^2(\gamma^2 + \delta^2)}{(mq, np)^2(\alpha\delta, \beta\gamma)^2}, \\ (a^2c^2 + b^2d^2)(u^2w^2 + v^2t^2) &= \frac{m^2n^2(p^2 + q^2)\alpha^2\beta^2(\gamma^2 + \delta^2)}{(mq, np)^2(\alpha\delta, \beta\gamma)^2}, \\ (u+v)(uw^2 - vt^2)(a^2c^2 + b^2d^2) &= \frac{(\alpha + \beta)\alpha\beta(\beta\gamma^2 - \alpha\delta^2)m^2n^2(p^2 + q^2)}{(mq, np)^2(\alpha\delta, \beta\gamma)^2}, \\ uv(w^2 + t^2)(a^2c^2 + b^2d^2) &= \frac{\alpha\beta(\beta^2\gamma^2 + \alpha^2\delta^2)m^2n^2(p^2 + q^2)}{(mq, np)^2(\alpha\delta, \beta\gamma)^2}, \\ uvwt(u+v)(uw^2 - vt^2)(a^2c^2 + b^2d^2) &= \frac{\alpha^3\beta^3\gamma\delta(\alpha + \beta)(\beta\gamma^2 - \alpha\delta^2)m^4n^4(p^2 + q^2)^2}{(mq, np)^4(\alpha\delta, \beta\gamma)^4}, \\ \Delta_1 &= \frac{mn\alpha\beta\Delta_2}{(mq, np)^2(\alpha\delta, \beta\gamma)^2}, \end{aligned}$$

то из формулы (5) следует формула (7). Пусть теперь в (7) $k = k$,

$$\begin{aligned} m &= a, & n &= b, & p &= \frac{ac}{(a, d)}, & q &= \frac{d}{(a, d)}, \\ \alpha &= u, & \beta &= v, & \gamma &= \frac{uw}{(u, t)}, & \delta &= \frac{t}{(u, t)}, \end{aligned}$$

где $k, a, b, c, d, u, v, w, t \in \mathbb{N}$, $abc^2 > d^2$, $uvw^2 > t^2$, $(a, b) = (c, d) = (u, v) = (w, t) = 1$. Тогда из формулы (7) получается формула (9). В самом деле, так как $k = k$,

$$\begin{aligned} mnprq(m+n)(np^2 - mq^2)\alpha^2\beta^2(\gamma^2 + \delta^2)^2 &= \frac{a^3bcd(a+b)(abc^2 - d^2)u^2v^2(u^2w^2 + t^2)^2}{(a, d)^4(u, t)^4}, \\ (m+n)(np^2 - mq^2)\alpha\beta(\gamma^2 + \delta^2) &= \frac{a(a+b)(abc^2 - d^2)v(u^2w^2 + t^2)}{(a, d)^2(u, t)^2}, \\ (n^2p^2 + m^2q^2)\alpha\beta(\gamma^2 + \delta^2) &= \frac{a^2(b^2c^2 + d^2)uv(u^2w^2 + t^2)}{(a, d)^2(u, t)^2}, \\ mn(p^2 + q^2)\alpha\beta(\gamma^2 + \delta^2) &= \frac{ab(a^2c^2 + d^2)uv(u^2w^2 + t^2)}{(a, d)^2(u, t)^2}, \\ (\alpha + \beta)(\beta\gamma^2 - \alpha\delta^2)mn(p^2 + q^2) &= \frac{u(u+v)(uvw^2 - t^2)ab(a^2c^2 + d^2)}{(a, d)^2(u, t)^2}, \\ (\beta^2\gamma^2 + \alpha^2\delta^2)mn(p^2 + q^2) &= \frac{u^2(v^2w^2 + t^2)ab(a^2c^2 + d^2)}{(a, d)^2(u, t)^2}, \\ \alpha\beta\gamma\delta(\alpha + \beta)(\beta\gamma^2 - \alpha\delta^2)m^2n^2(p^2 + q^2)^2 &= \frac{u^3vwt(u+v)(uvw^2 - t^2)a^2b^2(a^2c^2 + d^2)^2}{(a, d)^4(u, t)^4}, \\ \Delta_2 &= \frac{au\Delta_3}{(a, d)^2(u, t)^2}, \end{aligned}$$

то из формулы (7) получается формула (9). Теперь пусть в (9) $k = k$,

$$\begin{aligned} a &= m, & b &= n, & c &= \frac{p}{(mn, p)}, & d &= \frac{mnq}{(mn, p)}, \\ u &= \alpha, & v &= \beta, & w &= \frac{\gamma}{(\alpha\beta, \gamma)}, & t &= \frac{\alpha\beta\delta}{(\alpha\beta, \gamma)}, \end{aligned}$$

где $k, m, n, p, q, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$, $p^2 > mnq^2$, $\gamma^2 > \alpha\beta\delta^2$, $(m, n) = (p, q) = (\alpha, \beta) = (\gamma, \delta) = 1$. Тогда из формулы (9) получается формула (11). Действительно, так как $k = k$,

$$\begin{aligned} abcd(a+b)(abc^2 - d^2)v^2(u^2w^2 + t^2)^2 &= \frac{m^3n^3pq(m+n)(p^2 - mnq^2)\alpha^4\beta^2(\gamma^2 + \beta^2\delta^2)^2}{(mn, p)^4(\alpha\beta, \gamma)^4}, \\ (a+b)(abc^2 - d^2)v(u^2w^2 + t^2) &= \frac{mn(m+n)(p^2 - mnq^2)\alpha^2\beta(\gamma^2 + \beta^2\delta^2)}{(mn, p)^2(\alpha\beta, \gamma)^2}, \\ a(b^2c^2 + d^2)v(u^2w^2 + t^2) &= \frac{mn^2(p^2 + m^2q^2)\alpha^2\beta(\gamma^2 + \beta^2\delta^2)}{(mn, p)^2(\alpha\beta, \gamma)^2}, \\ b(a^2c^2 + d^2)v(u^2w^2 + t^2) &= \frac{m^2n(p^2 + n^2q^2)\alpha^2\beta(\gamma^2 + \beta^2\delta^2)}{(mn, p)^2(\alpha\beta, \gamma)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (u+v)(uvw^2 - t^2)b(a^2c^2 + d^2) &= \frac{\alpha\beta(\alpha + \beta)(\gamma^2 - \alpha\beta\delta^2)m^2n(p^2 + n^2q^2)}{(mn, p)^2(\alpha\beta, \gamma)^2}, \\
 u(v^2w^2 + t^2)b(a^2c^2 + d^2) &= \frac{\alpha\beta^2(\gamma^2 + \alpha^2\delta^2)m^2n(p^2 + n^2q^2)}{(mn, p)^2(\alpha\beta, \gamma)^2}, \\
 uvwt(u+w)(uvw^2 - t^2)b^2(a^2c^2 + d^2)^2 &= \frac{\alpha^3\beta^3\gamma\delta(\alpha + \beta)(\gamma^2 - \alpha\beta\delta^2)m^4n^2(p^2 + n^2q^2)^2}{(mn, p)^4(\alpha\beta, \gamma)^4}, \\
 \Delta_3 &= \frac{mn\alpha\beta\Delta_4}{(mn, p)^2(\alpha\beta, \gamma)^2},
 \end{aligned}$$

то из формулы (9) получается формула (11). Пусть далее в (11) $k = k$,

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{ad}{(ad, bc)}, & n &= \frac{bc}{(ad, bc)}, & p &= \frac{ac}{(a, c)}, & q &= \frac{(ad, bc)}{(a, c)}, \\
 \alpha &= \frac{ut}{(ut, vw)}, & \beta &= \frac{vw}{(ut, vw)}, & \gamma &= \frac{uw}{(u, w)}, & \delta &= \frac{(ut, vw)}{(u, w)},
 \end{aligned}$$

где $k, a, b, c, d, u, v, w, t \in \mathbb{N}$, $ac > bd$, $uw > vt$, $(a, b) = (c, d) = (u, v) = (w, t) = 1$. Тогда из формулы (11) получается формула (13). В самом деле, так как $k = k$,

$$\begin{aligned}
 mnprq(m+n)(p^2 - mnq^2)\alpha^2(\gamma^2 + \beta^2\delta^2)^2 &= \frac{a^3bc^3d(ad+bc)(ac-bd)u^2w^4t^2(u^2+v^2)^2}{(ad, bc)^2(a, c)^4(ut, vw)^2(u, w)^4}, \\
 (m+n)(p^2 - mnq^2)\alpha(\gamma^2 + \beta^2\delta^2) &= \frac{ac(ad+bc)(ac-bd)uw^2t(u^2+v^2)}{(ad, bc)(a, c)^2(ut, vw)(u, w)^2}, \\
 n(p^2 + m^2q^2)\alpha(\gamma^2 + \beta^2\delta^2) &= \frac{a^2bc(c^2 + d^2)uw^2t(u^2+v^2)}{(ad, bc)(a, c)^2(ut, vw)(u, w)^2}, \\
 m(p^2 + n^2q^2)\alpha(\gamma^2 + \beta^2\delta^2) &= \frac{ac^2d(a^2 + b^2)uw^2t(u^2+v^2)}{(ad, bc)(a, c)^2(ut, vw)(u, w)^2}, \\
 (\alpha + \beta)(\gamma^2 - \alpha\beta\delta^2)m(p^2 + n^2q^2) &= \frac{uw(ut+vw)(uw-vt)ac^2d(a^2+b^2)}{(ad, bc)(a, c)^2(ut, vw)(u, w)^2}, \\
 \beta(\gamma^2 + \alpha^2\delta^2)m(p^2 + n^2q^2) &= \frac{u^2vw(w^2 + t^2)ac^2d(a^2+b^2)}{(ad, bc)(a, c)^2(ut, vw)(u, w)^2}, \\
 \alpha\beta\gamma\delta(\alpha + \beta)(\gamma^2 - \alpha\beta\delta^2)m^2(p^2 + n^2q^2)^2 &= \frac{u^3vw^3t(ut+vw)(uw-vt)a^2c^4d^2(a^2+b^2)^2}{(ad, bc)^2(a, c)^4(ut, vw)^2(u, w)^4}, \\
 \Delta_4 &= \frac{acuw\Delta_5}{(ad, bc)(a, c)^2(ut, vw)(u, w)^2},
 \end{aligned}$$

то из формулы (11) получается формула (13). Далее, пусть в (13) $k = k$, $a = n$, $b = m$, $c = q$, $d = p$, $u = \beta$, $v = \alpha$, $w = \delta$, $t = \gamma$, где $k, m, n, p, q, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$, $nq > mp$, $\beta\delta > \alpha\gamma$, $(m, n) = (p, q) = (\alpha, \beta) = (\gamma, \delta) = 1$. Тогда из формулы (13) получается формула (15).

Действительно, так как $k = k$, $\Delta_5 = \Delta_6$,

$$\begin{aligned}abcd(ad + bc)(ac - bd)w^2t^2(u^2 + v^2)^2 &= mnprq(mq + np)(nq - mp)\gamma^2\delta^2(\alpha^2 + \beta^2)^2, \\(ad + bc)(ac - bd)wt(u^2 + v^2) &= (mq + np)(nq - mp)\gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2), \\ab(c^2 + d^2)wt(u^2 + v^2) &= mn(p^2 + q^2)\gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2), \\cd(a^2 + b^2)wt(u^2 + v^2) &= pq(m^2 + n^2)\gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2), \\(ut + vw)(uw - vt)cd(a^2 + b^2) &= (\alpha\delta + \beta\gamma)(\beta\delta - \alpha\gamma)pq(m^2 + n^2), \\uv(w^2 + t^2)cd(a^2 + b^2) &= \alpha\beta(\gamma^2 + \delta^2)pq(m^2 + n^2), \\uvw t(ut + vw)(uw - vt)c^2d^2(a^2 + b^2)^2 &= \alpha\beta\gamma\delta(\alpha\delta + \beta\gamma)(\beta\delta - \alpha\gamma)p^2q^2(m^2 + n^2)^2,\end{aligned}$$

то из формулы (13) получается формула (15). Пусть теперь в (15) $k = k$,

$$\begin{aligned}m &= \frac{b}{(b, c)}, & n &= \frac{c}{(b, c)}, & p &= \frac{a}{(a, c)}, & q &= \frac{c}{(a, c)}, \\ \alpha &= \frac{v}{(v, w)}, & \beta &= \frac{w}{(v, w)}, & \gamma &= \frac{u}{(u, w)}, & \delta &= \frac{w}{(u, w)},\end{aligned}$$

где $k, a, b, c, u, v, w \in \mathbb{N}$, $c^2 > ab$, $w^2 > uv$, $(a, b, c) = (u, v, w) = 1$. Тогда из формулы (15) получается формула (17). В самом деле, так как $k = k$,

$$\begin{aligned}mnprq(mq + np)(nq - mp)\gamma^2\delta^2(\alpha^2 + \beta^2)^2 &= \frac{abc^3(a + b)(c^2 - ab)u^2(v^2 + w^2)^2}{(a, c)^4(b, c)^4(u, w)^4(v, w)^4}, \\(mq + np)(nq - mp)\gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2) &= \frac{c(a + b)(c^2 - ab)uw(v^2 + w^2)}{(a, c)^2(b, c)^2(u, w)^2(v, w)^2}, \\mn(p^2 + q^2)\gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2) &= \frac{bc(a^2 + c^2)uw(v^2 + w^2)}{(a, c)^2(b, c)^2(u, w)^2(v, w)^2}, \\pq(m^2 + n^2)\gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2) &= \frac{ac(b^2 + c^2)uw(v^2 + w^2)}{(a, c)^2(b, c)^2(u, w)^2(v, w)^2}, \\(\alpha\delta + \beta\gamma)(\beta\delta - \alpha\gamma)pq(m^2 + n^2) &= \frac{w(u + v)(w^2 - uv)ac(b^2 + c^2)}{(a, c)^2(b, c)^2(u, w)^2(v, w)^2}, \\\alpha\beta(\gamma^2 + \delta^2)pq(m^2 + n^2) &= \frac{vw(u^2 + w^2)ac(b^2 + c^2)}{(a, c)^2(b, c)^2(u, w)^2(v, w)^2}, \\\alpha\beta\gamma\delta(\alpha\delta + \beta\gamma)(\beta\delta - \alpha\gamma)p^2q^2(m^2 + n^2)^2 &= \frac{uvw^3(u + v)(w^2 - uv)a^2c^2(b^2 + c^2)^2}{(a, c)^4(b, c)^4(u, w)^4(v, w)^4}, \\\Delta_6 &= \frac{cw\Delta_7}{(a, c)^2(b, c)^2(u, w)^2(v, w)^2},\end{aligned}$$

то из формулы (15) получается формула (17). Теперь пусть в (17) $k = k$,

$$\begin{aligned}a &= \frac{nq}{(mn, nq, qm)}, & b &= \frac{qm}{(mn, nq, qm)}, & c &= \frac{mn}{(mn, nq, qm)}, \\ u &= \frac{\beta\gamma}{(\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha)}, & v &= \frac{\gamma\alpha}{(\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha)}, & w &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha)},\end{aligned}$$

где $k, m, n, q, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$, $mn > q^2$, $\alpha\beta > \gamma^2$, $(m, n, q) = (\alpha, \beta, \gamma) = 1$. Тогда из формулы (17) получается формула (19). Действительно, так как $k = k$,

$$\begin{aligned} abc(a+b)(c^2-ab)u^2(v^2+w^2)^2 &= \frac{m^3n^3q^3(m+n)(mn-q^2)\alpha^4\beta^2\gamma^2(\beta^2+\gamma^2)^2}{(mn, nq, qm)^6(\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha)^6}, \\ (a+b)(c^2-ab)u(v^2+w^2) &= \frac{mnq(m+n)(mn-q^2)\alpha^2\beta\gamma(\beta^2+\gamma^2)}{(mn, nq, qm)^3(\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha)^3}, \\ b(c^2+a^2)u(v^2+w^2) &= \frac{mn^2q(m^2+q^2)\alpha^2\beta\gamma(\beta^2+\gamma^2)}{(mn, nq, qm)^3(\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha)^3}, \\ a(c^2+b^2)u(v^2+w^2) &= \frac{m^2nq(n^2+q^2)\alpha^2\beta\gamma(\beta^2+\gamma^2)}{(mn, nq, qm)^3(\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha)^3}, \\ (u+v)(w^2-uv)a(c^2+b^2) &= \frac{\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta)(\alpha\beta-\gamma^2)m^2nq(n^2+q^2)}{(mn, nq, qm)^3(\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha)^3}, \\ v(w^2+u^2)a(c^2+b^2) &= \frac{\alpha\beta^2\gamma(\alpha^2+\gamma^2)m^2nq(n^2+q^2)}{(mn, nq, qm)^3(\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha)^3}, \\ uvw(u+v)(w^2-uv)a^2(c^2+b^2)^2 &= \frac{\alpha^3\beta^3\gamma^3(\alpha+\beta)(\alpha\beta-\gamma^2)m^4n^2q^2(n^2+q^2)^2}{(mn, nq, qm)^6(\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha)^6}, \\ \Delta_7 &= \frac{mnq\alpha\beta\gamma\Delta_8}{(mn, nq, qm)^3(\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha)^3}, \end{aligned}$$

то из формулы (17) получается формула (19). Наконец, пусть в (19) $k = k$,

$$\begin{aligned} m &= \frac{bc}{(b, c)}, & n &= \frac{ac}{(b, c)}, & q &= \frac{bd}{(b, c)}, \\ \alpha &= \frac{vw}{(v, w)}, & \beta &= \frac{uw}{(v, w)}, & \gamma &= \frac{vt}{(v, w)}, \end{aligned}$$

где $k, a, b, c, d, u, v, w, t \in \mathbb{N}$, $ac^2 > bd^2$, $uw^2 > vt^2$, $(a, b) = (c, d) = (u, v) = (w, t) = 1$. Тогда из формулы (19) получается формула (5). В самом деле, так как $k = k$,

$$\begin{aligned} mnq(m+n)(mn-q^2)\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)^2 &= \frac{ab^3c^3d(a+b)(ac^2-bd^2)v^2w^2(u^2w^2+v^2t^2)^2}{(b, c)^6(v, w)^6}, \\ (m+n)(mn-q^2)\alpha(\beta^2+\gamma^2) &= \frac{bc(a+b)(ac^2-bd^2)vw(u^2w^2+v^2t^2)}{(b, c)^3(v, w)^3}, \\ n(m^2+q^2)\alpha(\beta^2+\gamma^2) &= \frac{ab^2c(c^2+d^2)vw(u^2w^2+v^2t^2)}{(b, c)^3(v, w)^3}, \\ m(n^2+q^2)\alpha(\beta^2+\gamma^2) &= \frac{bc(a^2c^2+b^2d^2)vw(u^2w^2+v^2t^2)}{(b, c)^3(v, w)^3}, \\ (\alpha+\beta)(\alpha\beta-\gamma^2)m(n^2+q^2) &= \frac{vw(u+v)(uw^2-vt^2)bc(a^2c^2+b^2d^2)}{(b, c)^3(v, w)^3}, \\ \beta(\alpha^2+\gamma^2)m(n^2+q^2) &= \frac{uv^2w(w^2+t^2)bc(a^2c^2+b^2d^2)}{(b, c)^3(v, w)^3}, \\ \alpha\beta\gamma(\alpha+\beta)(\alpha\beta-\gamma^2)m^2(n^2+q^2)^2 &= \frac{uv^3w^3t(u+v)(uw^2-vt^2)b^2c^2(a^2c^2+b^2d^2)^2}{(b, c)^6(v, w)^6}, \\ \Delta_8 &= \frac{bcvw\Delta_1}{(b, c)^3(v, w)^3}, \end{aligned}$$

то из формулы (19) получается формула (5).

Таким образом, при выполнении условий (6), (8), (10), (12), (14), (16), (18), (20) общие формулы (5), (7), (9), (11), (13), (15), (17), (19) всех решений системы двух героновых уравнений (1) с условием (2) эквивалентны. Теорема 9 доказана.

Тем же путем, каким мы получили все решения системы героновых уравнений (1) с условием (2), могут быть получены и все решения того же типа системы с большим числом уравнений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кожегельдинов С.Ш. Об основных героновых треугольниках // Матем. заметки. 1994. Т. 55. №2. С. 72–79.
- [2] Кожегельдинов С.Ш. Некоторые элементы теории диофантовых уравнений в упражнениях и задачах. М., 1993.
- [3] Кожегельдинов С.Ш. Отыскание основных героновых треугольников // Московский институт электронной техники. Деп. ВИНТИ 14.08.1990. № 4613-В90. М.: ВИНТИ, 1990.
- [4] Кожегельдинов С.Ш. Параметризация героновых треугольников со взаимно простыми сторонами // Межвузовская конференция, посвященная 70-летию со дня рождения проф. Т.И. Аманова (Семипалатинский пединститут им. Шакарима, 23 сентября 1993г.). Тезисы докладов, 1993. С. 21–23.
- [5] Кожегельдинов С.Ш., Кожатаева М.Ж. К вопросу решения системы уравнений Пифагора // Межвузовская конференция, посвященная 70-летию со дня рождения проф. Т.И. Аманова (Семипалатинский пединститут им. Шакарима, 23 сентября 1993г.). Тезисы докладов, 1993. С. 30–31.
- [6] Кожегельдинов С.Ш. К решению системы уравнений Герона // Международная конференция “Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел”. Воронеж: ВГУ, 1995.

Государственный университет “Семей”, г. Семипалатинск

Поступило
30.08.1999