Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Конягин, М. А. Скопина, О сравнении L^1 -норм полной и усеченной экспоненциальных сумм, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 5, 699–707

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm533>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 12:58:24

УДК 517.5

О СРАВНЕНИИ L^1 -НОРМ ПОЛНОЙ И УСЕЧЕННОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СУММ

С. В. Конягин, М. А. Скопина

Работа посвящена гипотезе, поставленной в 70-х годах С. В. Бочкаревым, о наличии некоторой “стабильности” для L^1 -нормы тригонометрических полиномов при добавлении новых гармоник. Справедливость этой гипотезы влечет, в частности, известное неравенство Литтлвуда. Дано опровержение утверждения, близкого к гипотезе Бочкарева. Для доказательства использован следующий метод: L^1 -норма суммы одномерных гармоник заменяется на константу Лебега некоторого многогранника достаточно высокой размерности.

Библиография: 6 названий.

Известная гипотеза Литтлвуда [1] состояла в том, что для любых различных целых чисел $n_1, \dots, n_N$ выполнено неравенство

$$\int_{[-1/2, 1/2]} \left| \sum_{k=1}^N e^{2\pi i n_k x} \right| dx \geq c \log N,$$

где $c > 0$ – абсолютная константа. С. В. Бочкарев [2, с. 42] доказал ее справедливость в среднем:

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \int_{[-1/2, 1/2]} \left| \sum_{k=1}^m e^{2\pi i n_k x} \right| dx \geq c \log N.$$

Этот результат является частным случаем оценки функций Лебега для произвольных ограниченных в совокупности ортонормированных систем. Гипотеза Литтлвуда была доказана независимо в [3] и [4]. Бочкарев в многочисленных обсуждениях ставил вопрос о существовании доказательства гипотезы Литтлвуда, которое было бы основано на оценках функций Лебега для общих ортонормированных систем и специальных свойствах тригонометрической системы, связанных с изменением L^1 -нормы тригонометрических полиномов при добавлении новых гармоник. Точнее, существует ли такая константа C , что для любого возрастающего набора целых чисел $n_1, \dots, n_N$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \int_{[-1/2, 1/2]} \left| \sum_{k=1}^m e^{2\pi i n_k x} \right| dx \leq C \int_{[-1/2, 1/2]} \left| \sum_{k=1}^N e^{2\pi i n_k x} \right| dx. \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00357.

Заметим, что (1) вытекает из неравенства

$$\int_{[-1/2, 1/2]} \left| \sum_{k=1}^m e^{2\pi i n_k x} \right| dx \leq C \int_{[-1/2, 1/2]} \left| \sum_{k=1}^N e^{2\pi i n_k x} \right| dx, \quad (2)$$

где $m \leq N$.

Цель настоящей работы – показать, что (2) не выполняется. Возможно, предложенный в настоящей работе подход позволяет показать, что (1) также не имеет места, но в настоящее время мы этого делать не умеем.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $A > 0$ существуют ограниченное множество неотрицательных целых чисел L и натуральное число ℓ_0 такие, что*

$$\int_{[-1/2, 1/2]} \left| \sum_{\ell \in L, \ell \leq \ell_0} e^{2\pi i \ell x} \right| dx > A \int_{[-1/2, 1/2]} \left| \sum_{\ell \in L} e^{2\pi i \ell x} \right| dx. \quad (3)$$

Идея доказательства этой теоремы состоит в следующем. L^1 -нормы сумм одномерных гармоник в левой и правой частях (3) близки к L^1 -нормам сумм многомерных гармоник с номерами из некоторых многогранников (константам Лебега этих многогранников). При достаточно высокой размерности пространства многогранники можно выбрать так, что соответствующие константы Лебега будут удовлетворять требуемому соотношению. Для реализации этой идеи нам понадобятся вспомогательные утверждения.

Введем следующие обозначения: $\mathbb{R}^d$ – d -мерное евклидово пространство, $x = (x_1, \dots, x_d)$, $y = (y_1, \dots, y_d)$ – его элементы (векторы), $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$ – скалярное произведение векторов x, y , $|x| = \sqrt{(x, x)}$, $\mathbb{T}^d = [-1/2, 1/2]^d$, $\mathbb{Z}^d$ – целочисленная решетка в $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{T} = \mathbb{T}^1$, $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^1$, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ – единичные орты в $\mathbb{R}^d$, $x^{(j)} = x - x_j \mathbf{e}_j$, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$, χ_e – характеристическая функция множества $e \subset \mathbb{R}^d$, $\hat{f}$ – преобразование Фурье функции $f \in L(\mathbb{R}^d)$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть α_k, β_k , $k = 1, \dots, d$, – рациональные числа, $k_0 \in \{0, \dots, d\}$, $0 < \alpha_k < \beta_k$ при $k = 1, \dots, k_0$, $0 < \beta_k < \alpha_k$ при $k = k_0 + 1, \dots, d$, $\alpha_k \beta_j \neq \alpha_j \beta_k$ при $j \neq k$,*

$$D_d(k_0) = \left\{ t \in \mathbb{R}^d : \sum_{k=1}^d \frac{t_k}{\alpha_k} \leq 1, \sum_{k=1}^d \frac{t_k}{\beta_k} \leq 1, t_k \geq 0, k = 1, \dots, d \right\},$$

$$G_d(k_0) = \left\{ t \in \mathbb{R}^d : \sum_{k=1}^d \frac{t_k}{\alpha_k} \geq 1, \sum_{k=1}^d \frac{t_k}{\beta_k} \leq 1, t_k \geq 0, k = 1, \dots, d \right\}.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\int_{\mathbb{T}^d} \left| \sum_{k \in n D_d(k_0) \cap \mathbb{Z}^d} e^{2\pi i (x, k)} \right| dx = \frac{2(k_0 + 1)(d - k_0 + 1)}{\pi^{d+1}} \log^d n + O(\log^{d-1} n),$$

$$\int_{\mathbb{T}^d} \left| \sum_{k \in n G_d(k_0) \cap \mathbb{Z}^d} e^{2\pi i (x, k)} \right| dx = \frac{2k_0(d - k_0 + 2)}{\pi^{d+1}} \log^d n + O(\log^{d-1} n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из результатов работы [5, следствие 1 к теореме 1] следует

$$\int_{\mathbb{T}^d} \left| \sum_{k \in n\Lambda \cap \mathbb{Z}^d} e^{2\pi i(x, k)} \right| dx = \int_{\mathbb{T}^d} |\widehat{\chi}_{n\Lambda}(x)| dx + O(\log^{d-1} n)$$

при $\Lambda = D_d(k_0)$ и $\Lambda = G_d(k_0)$. Докажем, что

$$\int_{\mathbb{T}^d} |\widehat{\chi}_{nD_d(k_0)}(x)| dx = \frac{A_d(k_0)}{\pi^{d+1}} \log^d n + O(\log^{d-1} n), \quad (4)$$

$$\int_{\mathbb{T}^d} |\widehat{\chi}_{nG_d(k_0)}(x)| dx = \frac{B_d(k_0)}{\pi^{d+1}} \log^d n + O(\log^{d-1} n), \quad (5)$$

где $A_d(k_0), B_d(k_0)$ не зависят от выбора чисел α_k, β_k , при $0 < k_0 < d$ удовлетворяют соотношениям

$$A_d(k_0) = \frac{1}{d}((k_0 + 1)A_{d-1}(k_0 - 1) + (d - k_0)A_{d-1}(k_0) + B_{d-1}(d - k_0)), \quad (6)$$

$$B_d(k_0) = \frac{1}{d}(2A_{d-1}(k_0 - 1) + k_0 B_{d-1}(k_0 - 1) + (d - k_0)B_{d-1}(k_0)) \quad (7)$$

и

$$\begin{aligned} A_1(1) = B_1(1) = 4, \quad B_d(0) = 0, \quad A_d(0) = A_d(d) = 2(d + 1), \\ B_d(d) = \frac{1}{d}(2A_{d-1}(d - 1) + dB_{d-1}(d - 1)). \end{aligned} \quad (8)$$

Сразу заметим, что соотношения (4), (5) очевидны при $d = k_0 = 1$, при $k_0 = 0$ (5) также очевидно, а (4) при $k_0 = 0$ и $k_0 = d$ доказано в [6]. Проведем индукцию по d . Пусть $0 < k_0 < d$. Принимая во внимание тот факт (см., например, [6, соотношения (6), (8)]), что для любого d -мерного рационального многогранника D и для любых чисел $\Delta, \delta > 0$, $\Delta > \delta$,

$$\int_{\Delta \mathbb{T}^d \setminus \delta \mathbb{T}^d} |\widehat{\chi}_{nD}(x)| dx = O(\log^{d-1} n), \quad (9)$$

с помощью замены переменных можем преобразовать множество $D_d(k_0)$ к виду

$$D_d(k_0) = \left\{ t \in \mathbb{R}^d : 2\frac{t_1}{\alpha_1} + \sum_{k=2}^d \frac{t_k}{\alpha_k} \leq 1, 2t_1 + \sum_{k=2}^d t_k \leq 1, t_k \geq 0, k = 1, \dots, d \right\},$$

где $\alpha_j \neq 1, j = 1, \dots, d, \alpha_j \neq \alpha_k, j \neq k$. Не умаляя общности, можно считать, что $\alpha_1 < \alpha_k, k = 2, \dots, d$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^d} |\widehat{\chi}_{nD_d(k_0)}(x)| dx &= \sum_{\nu=1}^d \left(\int_{K_\nu^+ \cap (\mathbb{T}^d \setminus \frac{1}{n}\mathbb{T}^d)} |\widehat{\chi}_{nD_d(k_0)}(x)| dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{K_\nu^- \cap (\mathbb{T}^d \setminus \frac{1}{n}\mathbb{T}^d)} |\widehat{\chi}_{nD_d(k_0)}(x)| dx \right) + O(1), \end{aligned} \quad (10)$$

где $K_\nu^\pm = \{x \in \mathbb{R}^d : \pm x_\nu > 0, |x_k| \leq \pm x_\nu, k \neq \nu\}$. Пусть Q и R соответственно обозначают проекции множеств

$$\left\{ t \in D_d(k_0) : 1 - \sum_{k=2}^d t_k \leq \alpha_1 - \sum_{k=2}^d \frac{\alpha_1}{\alpha_k} t_k \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ t \in D_d(k_0) : 1 - \sum_{k=2}^d t_k \geq \alpha_1 - \sum_{k=2}^d \frac{\alpha_1}{\alpha_k} t_k \right\}$$

на гиперплоскость $t_1 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{K_1^+ \cap (\mathbb{T}^d \setminus \frac{1}{n} \mathbb{T}^d)} |\widehat{\chi}_{nD_d(k_0)}(x)| dx \\ &= \int_{1/2n}^{1/2} dx_1 \int_{2x_1 \mathbb{T}^{d-1}} dx^{(1)} \left| \int_{nQ} e^{-2\pi i(x^{(1)}, t^{(1)})} dt^{(1)} \int_0^{\frac{n}{2} - \sum_{k=2}^d \frac{1}{2} t_k} e^{-2\pi i x_1 t_1} dt_1 \right. \\ & \quad \left. + \int_{nR} e^{-2\pi i(x^{(1)}, t^{(1)})} dt^{(1)} \int_0^{\frac{n\alpha_1}{2} - \sum_{k=2}^d \frac{\alpha_1}{2\alpha_k} t_k} e^{-2\pi i x_1 t_1} dt_1 \right|. \end{aligned}$$

Вычислив внутренние интегралы, после замены переменной $n x_1 \rightarrow x_1$ во внешнем интеграле преобразуем правую часть к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{1/2}^{n/2} \frac{dx_1}{x_1} \int_{\frac{2x_1}{n} \mathbb{T}^{d-1}} \left| e^{-\pi i x_1} \int_{nQ} e^{-2\pi i \sum_{k=2}^d t_k (x_k - \frac{x_1}{2n})} dt^{(1)} \right. \\ & \quad \left. + e^{-\pi i \alpha_1 x_1} \int_{nR} e^{-2\pi i \sum_{k=2}^d t_k (x_k - \frac{\alpha_1 x_1}{2\alpha_k n})} dt^{(1)} \right. \\ & \quad \left. - \int_{nQ} e^{-2\pi i(x^{(1)}, t^{(1)})} dt^{(1)} - \int_{nR} e^{-2\pi i(x^{(1)}, t^{(1)})} dt^{(1)} \right|. \end{aligned}$$

Далее, производя замены переменных $n x_k / x_1 \rightarrow x_k$, $x_1 t_k / n \rightarrow t_k$, $k = 2, \dots, d$, в кратных интегралах, получаем

$$\begin{aligned} \int_{K_1^+ \cap (\mathbb{T}^d \setminus \frac{1}{n} \mathbb{T}^d)} |\widehat{\chi}_{nD_d(k_0)}(x)| dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{1/2}^{n/2} \frac{dx_1}{x_1} \int_{2\mathbb{T}^{d-1}} |e^{-\pi i x_1} \widehat{\chi}_{x_1 Q}(x^{(1)} - b) \\ & \quad + e^{-\pi i \alpha_1 x_1} \widehat{\chi}_{x_1 R}(x^{(1)} - a) - \widehat{\chi}_{x_1(Q \cup R)}(x^{(1)})| dx^{(1)}, \end{aligned}$$

где $b = (1/2, \dots, 1/2)$, $a = (\alpha_1/(2\alpha_2), \dots, \alpha_1/(2\alpha_d)) \in \mathbb{R}^{d-1}$. Поскольку $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$, существует столь малое $\delta > 0$ такое, что множества $\delta \mathbb{T}^{d-1}$, $\delta \mathbb{T}^{d-1} + b$, $\delta \mathbb{T}^{d-1} + a$ не пересекаются и содержатся в $2\mathbb{T}^{d-1}$. Разбивая область интегрирования кратного интеграла на четыре части, три из которых суть отмеченные множества, и учитывая (9), имеем

$$\begin{aligned} & \int_{K_1^+ \cap (\mathbb{T}^d \setminus \frac{1}{n} \mathbb{T}^d)} |\widehat{\chi}_{nD_d(k_0)}(x)| dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{1/2}^{n/2} \frac{dx_1}{x_1} \left(\int_{\delta \mathbb{T}^{d-1}} |\widehat{\chi}_{x_1 Q}(x^{(1)})| dx^{(1)} \right. \\ & \quad \left. + \int_{\delta \mathbb{T}^{d-1}} |\widehat{\chi}_{x_1 R}(x^{(1)})| dx^{(1)} + \int_{\delta \mathbb{T}^{d-1}} |\widehat{\chi}_{x_1(Q \cup R)}(x^{(1)})| dx^{(1)} \right) + O(\log^{d-1} n). \end{aligned} \quad (11)$$

Положим $\gamma_k = (1 - \alpha_1)/(1 - \alpha_1/\alpha_k)$. Числа γ_k обладают следующими очевидными свойствами: $\gamma_k \neq \gamma_j$, $\gamma_k \alpha_j \neq \gamma_j \alpha_k$ при $k \neq j$, $\gamma_k \neq 1$ для $k = 1, \dots, d$, $\gamma_k < 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha_k > 1$. Кроме того, нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} Q &= \left\{ (t_2, \dots, t_d) : \sum_{k=2}^d t_k \leq 1, \sum_{k=2}^d \frac{t_k}{\gamma_k} \geq 1, t_k \geq 0, k = 2, \dots, d \right\}, \\ R &= \left\{ (t_2, \dots, t_d) : \sum_{k=2}^d \frac{t_k}{\alpha_k} \leq 1, \sum_{k=2}^d \frac{t_k}{\gamma_k} \leq 1, t_k \geq 0, k = 2, \dots, d \right\}, \\ Q \cup R &= \left\{ (t_2, \dots, t_d) : \sum_{k=2}^d t_k \leq 1, \sum_{k=2}^d \frac{t_k}{\alpha_k} \leq 1, t_k \geq 0, k = 2, \dots, d \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому из (11) и индукционного предположения следует

$$\begin{aligned} & \int_{K_1^+ \cap (\mathbb{T}^d \setminus \frac{1}{n} \mathbb{T}^d)} |\hat{\chi}_{nD_d(k_0)}(x)| dx \\ &= \frac{B_{d-1}(d - k_0) + 2A_{d-1}(k_0 - 1)}{2\pi^{d+1}} \int_{1/2}^{n/2} \frac{\log^{d-1} x_1 dx_1}{x_1} + O(\log^{d-1} n) \\ &= \frac{\log^d n}{2\pi^{d+1}d} (B_{d-1}(d - k_0) + 2A_{d-1}(k_0 - 1)) + O(\log^{d-1} n). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\int_{K_1^- \cap (\mathbb{T}^d \setminus \frac{1}{n} \mathbb{T}^d)} |\hat{\chi}_{nD_d(k_0)}(x)| dx = \frac{\log^d n}{2\pi^{d+1}d} (B_{d-1}(d - k_0) + 2A_{d-1}(k_0 - 1)) + O(\log^{d-1} n).$$

Теперь займемся вычислением слагаемых с номерами $\nu > 1$ суммы в правой части (10). Пусть $1 < \nu \leq k_0$. Используя те же рассуждения, что и в случае $\nu = 1$, принимая во внимание, что векторы

$$b' = (2, 1, \dots, 1), \quad a' = \left(\frac{2\alpha_\nu}{\alpha_1}, \dots, \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}}, \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}}, \dots, \frac{\alpha_\nu}{\alpha_d} \right) \in \mathbb{R}^{d-1}$$

(возникающие в этом случае вместо векторов b, a) не принадлежат $2\mathbb{T}^{d-1}$, и учитывая (9), получаем

$$\int_{K_\nu^\pm \cap (\mathbb{T}^d \setminus \frac{1}{n} \mathbb{T}^d)} |\hat{\chi}_{nD_d(k_0)}(x)| dx = \frac{\log^d n}{2\pi^{d+1}d} A_{d-1}(k_0 - 1) + O(\log^{d-1} n).$$

Аналогично при $\nu > k_0$

$$\int_{K_\nu^\pm \cap (\mathbb{T}^d \setminus \frac{1}{n} \mathbb{T}^d)} |\hat{\chi}_{nD_d(k_0)}(x)| dx = \frac{\log^d n}{2\pi^{d+1}d} A_{d-1}(k_0) + O(\log^{d-1} n).$$

Суммирование этих равенств по всем $\nu = 1, \dots, d$ дает (4). Пусть теперь $0 < k_0 \leq d$. Учитывая (9), в определении множества $G_d(k_0)$ можно считать $\beta_k = 1$, $k = 1, \dots, d$,

$\alpha_1 < \alpha_k$, $k = 2, \dots, d$, и заменить первые слагаемые в суммах $\sum_{k=1}^d$ на вдвое большие величины. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{K_1^+ \cap (\mathbb{T}^d \setminus \frac{1}{n}\mathbb{T}^d)} |\widehat{\chi}_{nG_d(k_0)}(x)| dx \\ &= \int_{1/2n}^{1/2} dx_1 \int_{2x_1\mathbb{T}^{d-1}} dx^{(1)} \left| \int_{nQ'} e^{-2\pi i(x^{(1)}, t^{(1)})} dt^{(1)} \int_{\frac{n\alpha_1}{2} - \sum_{k=2}^d \frac{\alpha_1}{2\alpha_k} t_k}^{\frac{n}{2} - \sum_{k=2}^d \frac{1}{2} t_k} e^{-2\pi i x_1 t_1} dt_1 \right. \\ & \quad \left. + \int_{nR'} e^{-2\pi i(x^{(1)}, t^{(1)})} dt^{(1)} \int_0^{\frac{n}{2} - \sum_{k=2}^d \frac{1}{2} t_k} e^{-2\pi i x_1 t_1} dt_1 \right|, \end{aligned}$$

где Q' и R' обозначают соответственно проекции на гиперплоскость $t_1 = 0$ множеств

$$\left\{ t \in G_d(k_0) : \sum_{k=2}^d \frac{t_k}{\alpha_k} \leq 1 \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ t \in G_d(k_0) : \sum_{k=2}^d \frac{t_k}{\alpha_k} \geq 1 \right\}.$$

Рассуждая, как и выше, и принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} Q' &= \left\{ (t_2, \dots, t_d) : \sum_{k=2}^d \frac{t_k}{\alpha_k} \leq 1, \sum_{k=2}^d \frac{t_k}{\gamma_k} \leq 1, t_k \geq 0, k = 2, \dots, d \right\}, \\ R' &= \left\{ (t_2, \dots, t_d) : \sum_{k=2}^d \frac{t_k}{\alpha_k} \geq 1, \sum_{k=2}^d t_k \leq 1, t_k \geq 0, k = 2, \dots, d \right\}, \\ Q' \cup R' &= \left\{ (t_2, \dots, t_d) : \sum_{k=2}^d t_k \leq 1, \sum_{k=2}^d \frac{t_k}{\gamma_k} \leq 1, t_k \geq 0, k = 2, \dots, d \right\}, \end{aligned}$$

имеем

$$\int_{K_1^\pm \cap (\mathbb{T}^d \setminus \frac{1}{n}\mathbb{T}^d)} |\widehat{\chi}_{nD_d(k_0)}(x)| dx = \frac{\log^d n}{2\pi^{d+1}d} (2A_{d-1}(k_0 - 1) + B_{d-1}(k_0 - 1)) + O(\log^{d-1} n).$$

Аналогично для $1 < \nu \leq k_0$

$$\int_{K_\nu^\pm \cap (\mathbb{T}^d \setminus \frac{1}{n}\mathbb{T}^d)} |\widehat{\chi}_{nD_d(k_0)}(x)| dx = \frac{\log^d n}{2\pi^{d+1}d} B_{d-1}(k_0 - 1) + O(\log^{d-1} n),$$

а для $\nu > k_0$

$$\int_{K_\nu^\pm \cap (\mathbb{T}^d \setminus \frac{1}{n}\mathbb{T}^d)} |\widehat{\chi}_{nD_d(k_0)}(x)| dx = \frac{\log^d n}{2\pi^{d+1}d} B_{d-1}(k_0) + O(\log^{d-1} n).$$

Суммируя эти равенства по всем ν , получаем (5). Из соображений симметрии следует $A_d(k) = A_d(d - k)$. По индукции нетрудно проверить, что $B_d(k) = A_d(k - 1)$. Подставляя эти соотношения в (6), получаем

$$A_d(k) = \frac{1}{d} ((k + 1)A_{d-1}(k - 1) + (d - k + 1)A_{d-1}(k))$$

для $k = 1, \dots, d - 1$. Отсюда с учетом начальных данных следует

$$A_d(k) = 2(k + 1)(d - k + 1).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть B – положительное число. Будем говорить, что числа $m_1, \dots, m_d$ B -независимы, если равенство $m_1 k_1 + \dots + m_d k_d = 0$ для целых $k_1, \dots, k_d$, $|k_j| \leq B, j = 1, \dots, d$, влечет $k_1 = \dots = k_d = 0$.

ЛЕММА. Пусть Λ – ограниченное подмножество $\mathbb{Z}^d$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует B_0 такое, что для всех $B \geq B_0$ и для любого вектора $m \in \mathbb{Z}^d$ с B -независимыми координатами выполняется неравенство

$$\left| \int_{\mathbb{T}^d} \left| \sum_{k \in \Lambda} e^{2\pi i(x, k)} \right| dx - \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k \in \Lambda} e^{2\pi i(m, k)t} \right| dt \right| < \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U – количество точек в Λ , $\Delta = \max_{k \in \Lambda} |k|$. Задав $\varepsilon > 0$, выберем полином

$$P(u) = \sum_{r=0}^R c_r u^r,$$

аппроксимирующий функцию $\sqrt{u}$ на отрезке $[0, U^2]$:

$$|\sqrt{u} - P(u)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (12)$$

Выберем $B_0 \geq 2R\Delta$. Пусть $B \geq B_0, m \in \mathbb{Z}^d, m_1, \dots, m_d$ B -независимы. Положим

$$I_r = \int_{\mathbb{T}^d} \left| \sum_{k \in \Lambda} e^{2\pi i(x, k)} \right|^{2r} dx, \quad I'_r = \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k \in \Lambda} e^{2\pi i(m, k)t} \right|^{2r} dt.$$

Применяя (12), имеем

$$\left| \int_{\mathbb{T}^d} \left| \sum_{k \in \Lambda} e^{2\pi i(x, k)} \right| dx - \sum_{r=0}^R c_r I_r \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k \in \Lambda} e^{2\pi i(m, k)t} \right| dt - \sum_{r=0}^R c_r I'_r \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для доказательства леммы осталось показать, что $I_r = I'_r$ для всех $r = 0, \dots, R$. Нетрудно видеть, что I_r, I'_r соответственно равны количеству решений уравнений

$$k^{(1)} + \dots + k^{(r)} = k^{(r+1)} + \dots + k^{(2r)}, \quad (13)$$

$$(m, k^{(1)}) + \dots + (m, k^{(r)}) = (m, k^{(r+1)}) + \dots + (m, k^{(2r)}), \quad (14)$$

где $k^{(j)} \in \Lambda, j = 1, \dots, d$. Ввиду линейности отображения $k \rightarrow (m, k)$ каждое решение (13), очевидно, удовлетворяет (14). Обратно, пусть $k^{(1)}, \dots, k^{(2r)}$ – решение уравнения (14). Тогда справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^d m_j \kappa_j = 0,$$

где $\kappa_j = k_j^{(1)} + \dots + k_j^{(r)} - k_j^{(r+1)} - \dots - k_j^{(2r)}, j = 1, \dots, d$. Поскольку $|k_j| \leq 2R\Delta \leq B$, из B -независимости чисел m_j следует $\kappa_j = 0$ для всех $j = 1, \dots, d$, т.е. $k^{(1)}, \dots, k^{(2r)}$ удовлетворяют (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $A > 0$. По теореме 2 существуют натуральные d, n и положительные $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ такие, что для соответствующих множеств

$$D_0 = \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 + \dots + x_d \leq 1, x_j \geq 0, j = 1, \dots, d\},$$

$$D = \left\{x \in D_0 : \frac{x_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{x_d}{\alpha_d} \leq 1\right\}$$

выполняется неравенство

$$\int_{\mathbb{T}^d} \left| \sum_{k \in nD \cap \mathbb{Z}^d} e^{2\pi i(x, k)} \right| dx > 3A \int_{\mathbb{T}^d} \left| \sum_{k \in nD_0 \cap \mathbb{Z}^d} e^{2\pi i(x, k)} \right| dx.$$

Отсюда на основании леммы при

$$\Lambda = nD \cap \mathbb{Z}^d, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} \left| \sum_{k \in nD \cap \mathbb{Z}^d} e^{2\pi i(k, x)} \right| dx$$

и

$$\Lambda = nD_0 \cap \mathbb{Z}^d, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} \left| \sum_{k \in nD_0 \cap \mathbb{Z}^d} e^{2\pi i(k, x)} \right| dx$$

следует, что для достаточно большого $B > 0$ и для любого вектора $m \in \mathbb{Z}^d$ с B -независимыми координатами

$$\int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k \in nD \cap \mathbb{Z}^d} e^{2\pi i(m, k)t} \right| dt > A \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k \in nD_0 \cap \mathbb{Z}^d} e^{2\pi i(m, k)t} \right| dt. \quad (15)$$

Выберем иррациональные числа $\xi_1, \dots, \xi_d$ (чуть большие, чем $\alpha_1, \dots, \alpha_d$) таким образом, чтобы

$$nD \cap \mathbb{Z}^d = \left\{x \in nD_0 : \frac{x_1}{\xi_1} + \dots + \frac{x_d}{\xi_d} \leq n\right\} \cap \mathbb{Z}^d$$

и $1/\xi_1, \dots, 1/\xi_d$ являлись бы независимыми над $\mathbb{Z}$. Такие числа найдутся, поскольку для любых независимых чисел $1/\xi_1, \dots, 1/\xi_k$, $k < d$, существует лишь не более, чем счетное множество зависимых наборов $1/\xi_1, \dots, 1/\xi_{k+1}$. Выберем столь большое натуральное M , что для всех целых $k_1, \dots, k_d$, $|k_j| \leq B$, $j = 1, \dots, d$, $k_1^2 + \dots + k_d^2 \neq 0$, выполняется неравенство

$$\left| M \left(\frac{k_1}{\xi_1} + \dots + \frac{k_d}{\xi_d} \right) \right| > Bd.$$

Положим $m_j = [M/\xi_j]$. Очевидно, что

$$\left| M \left(\frac{k_1}{\xi_1} + \dots + \frac{k_d}{\xi_d} \right) - (m, k) \right| \leq Bd \quad (16)$$

при $|k_j| \leq B$, $j = 1, \dots, d$. Отсюда и из независимости $1/\xi_1, \dots, 1/\xi_d$ следует B -независимость чисел $m_1, \dots, m_d$. Существует $\delta > 0$ такое, что $k'_1/\xi_1 + \dots + k'_d/\xi_d \geq n + \delta$ для всех $k' \in \mathbb{Z}^d \cap (nD_0 \setminus nD)$. Считая $M \geq 2\delta^{-1}Bd$, имеем $M(k'_1/\xi_1 + \dots + k'_d/\xi_d) \geq Mn + 2Bd$. При $B > n$ отсюда и из (16) следует $(m, k') \geq Mn + Bd > Mn$. Если $k \in nD \cap \mathbb{Z}^d$, то

$M(k_1/\xi_1 + \dots + k_d/\xi_d) \leq Mn$, тем более $(m, k) \leq Mn$. Таким образом, $(m, k) < (m, k')$ для всех $k \in nD \cap \mathbb{Z}^d$, $k' \in \mathbb{Z}^d \cap (nD_0 \setminus nD)$. Для доказательства теоремы осталось взять в качестве L образ множества $nD_0 \cap \mathbb{Z}^d$ при отображении $k \rightarrow (m, k)$, положить

$$l_0 = \max_{k \in nD \cap \mathbb{Z}^d} (m, k)$$

и применить (15).

В заключение отметим, что в связи с теоремой 1 нам представляется интересной следующая задача: как можно точнее оценить отношение

$$\int_{[-1/2, 1/2]} \left| \sum_{\ell \in L, \ell \leq \ell_0} e^{2\pi i \ell x} \right| dx \left(\int_{[-1/2, 1/2]} \left| \sum_{\ell \in L} e^{2\pi i \ell x} \right| dx \right)^{-1}$$

через мощность множества L .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hardy G. H., Littlewood J. E. A new proof of a theorem of rearrangement // J. London Math. Soc. 1948. V. 23. № 91. P. 163–168.
- [2] Бочкарев С. В. Метод усреднений в теории ортогональных рядов и некоторые вопросы теории базисов. Тр. МИАН. Т. 146. М.: Наука, 1978.
- [3] Конягин С. В. О проблеме Литтлвуда // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 2. С. 243–265.
- [4] McGehee O. C., Pigno L., Smith B. Hardy's inequality and the L^1 -norm of exponential sums // Ann. of Math. 1981. V. 113. № 3. P. 613–618.
- [5] Скопина М. А. Об асимптотическом поведении констант Лебега линейных методов суммирования кратных рядов Фурье // Изв. вузов. Матем. 1986. № 6. С. 70–71.
- [6] Скопина М. А. Константы Лебега кратных сумм Валье Пуссена // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1983. Т. 125. С. 154–165.

(С. В. Конягин) Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
(М. А. Скопина) Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: kon@mech.math.msu.su, skopina@sk.usr.lgu.spb.su

Поступило
23.02.2000