Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Я. Медведев, Вложения в решеточно доупорядочиваемые группы, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 5, 708–712

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm534>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 10:44:12

УДК 512.54

ВЛОЖЕНИЯ В РЕШЕТОЧНО ДООПОРЯДОЧИВАЕМЫЕ ГРУППЫ

Н. Я. Медведев

В работе получены следующие результаты: показано существование простых делимых решеточно доупорядочиваемых групп (теорема 2.1); доказано, что любая счетная решеточно упорядочиваемая или правоупорядочиваемая группа изоморфно вложима в простую делимую решеточно доупорядочиваемую группу (теорема 2.2, следствие 2.3).

Библиография: 10 названий.

Группа G называется *решеточно линейно упорядочиваемой* (*правоупорядочиваемой*), если на ней можно определить решеточный (линейный) порядок, устойчивый относительно умножения справа и слева (умножения справа) на элементы группы G . Группа G называется *решеточно доупорядочиваемой*, если любой ее частичный порядок может быть продолжен до решеточного порядка. Группа G называется *делимой*, если в ней разрешимы уравнения $x^n = g$ (n – натуральное число) для любого элемента $g \in G$. В работе получены следующие результаты: 1) показано существование простых делимых решеточно доупорядочиваемых групп (теорема 2.1), 2) доказано, что любая счетная решеточно упорядочиваемая или правоупорядочиваемая группа изоморфно вложима в простую делимую решеточно доупорядочиваемую группу (теорема 2.2, следствие 2.3).

1. Определения и вспомогательные результаты. Группа G называется *частично упорядоченной*, если на ней определено отношение частичного порядка $\leq$, устойчивое относительно умножения слева и справа на элементы группы G , т.е. для любых $x, y, z \in G$ если $x \leq y$, то $zx \leq zy$ и $xz \leq yz$. Хорошо известно, что любой частичный порядок группы G единственным образом определяется полугруппой положительных элементов и что любая чистая инвариантная полугруппа P группы G определяет единственным образом частичный порядок на группе G , при котором P является полугруппой положительных элементов [1, с. 16]. Поэтому в дальнейшем мы определяем частичные порядки на группе либо задавая отношение $\leq$, либо определяя чистую инвариантную полугруппу. Все необходимые факты по упорядоченным группам можно найти в [1]–[3], по теории групп – в [4]. Всюду в работе $\mathbb{R}$ обозначает естественно линейно упорядоченное множество действительных чисел, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ – множества натуральных и целых чисел соответственно. Символ $S_G(M)$ обозначает инвариантную полугруппу группы G , порожденную подмножеством M .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00156, и грантового центра НГУ Минобразования РФ, грант № 1.

Пусть $A(\mathbb{R})$ – группа всех порядковых автоморфизмов линейно упорядоченного множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Для любого $g \in A(\mathbb{R})$ положим $\text{supp}(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x)g \neq x\}$. Рассмотрим в $A(\mathbb{R})$ нормальную подгруппу $L(\mathbb{R})$, состоящую из всех порядковых автоморфизмов $g (g \in A(\mathbb{R}))$, носитель $\text{supp}(g)$ которых ограничен сверху. Свойства группы $A(\mathbb{R})$, ее подгрупп и, в частности, фактор-группа $A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})$ рассматривались в работах [5]–[9]. В работах [5], [6] доказано, что группа $A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})$ является делимой простой группой. В [8] получено полное описание всех максимальных и всех минимальных нетривиальных частичных порядков группы $A(\mathbb{R})$ и, в частности, доказано, что группа $A(\mathbb{R})$ имеет в точности два (взаимно обратных) различных решеточных порядка.

Напомним, что *опорным интервалом* $o(f, a)$ элемента $f \in A(\mathbb{R})$, содержащим $a \in \mathbb{R}$, называется множество тех $x \in \mathbb{R}$, для которых найдутся целые числа $m, n \in \mathbb{N}$ такие, что $(a)f^n < x < (a)f^m$. Опорный интервал $o(f, a)$ состоит из одной точки a лишь в том случае, если $(a)f = a$. В противном случае f действует на $o(f, a)$ без неподвижных точек, т.е. если $(a)f > a$, то выполнено $(x)f > x$ для любого $x \in o(f, a)$ (f действует на $o(f, a)$ положительно) или $(x)f < x$ для любого $x \in o(f, a)$ (f действует на $o(f, a)$ отрицательно).

ЛЕММА 1.1 (Холланд [5]). *Элементы f и g группы $A(\mathbb{R})$ сопряжены в $A(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда существует взаимно однозначное отображение φ множества опорных интервалов g на множество опорных интервалов f такое, что если $o(g, a) < o(f, a)$, то $(o(g, a))\varphi < (o(f, a))\varphi$, и если g действует на $o(g, a)$ положительно (отрицательно или тождественно), то f действует на $(o(f, a))\varphi$ также положительно (отрицательно или тождественно).*

Отметим также, что группа $A(\mathbb{R})$ является решеточно упорядоченной [2, с. 22] относительно порядка $P = \{f \in A(\mathbb{R}) \mid (x)f \geq x \forall x \in \mathbb{R}\}$ и подгруппа $L(\mathbb{R})$ является идеалом [2, с. 83] в l -группе $A(\mathbb{R})$.

Хорошо известно, что множество всех частичных порядков в любой группе замкнуто относительно произвольных пересечений и, следовательно, образует полную нижнюю полурешетку относительно пересечения. Из леммы Порна следует, что любой частичный порядок содержится в некотором максимальном частичном порядке. Те же самые утверждения выполняются и для изолированных частичных порядков группы. Тривиальный частичный порядок $P = \{e\}$ является наименьшим частичным порядком в любой группе. В общем случае минимальных нетривиальных частичных порядков может и не быть, как, например, в случае аддитивной группы целых чисел, но если они есть, то мощность множества всех минимальных нетривиальных частичных порядков либо четное натуральное число, либо бесконечна.

2. Основные результаты. Выберем действительное число b такое, что $-\infty < b < +\infty$. Положим $(x)q$ равной произвольной функции из группы $A(\mathbb{R})$, удовлетворяющей следующим условиям:

- 1) $\text{supp}(q) = (b, +\infty)$,
- 2) $(x)q > x$ для любого $x \in (b, +\infty)$.

Положим $Q = S_{A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})}(qL(\mathbb{R}), eL(\mathbb{R}))$. Несложная проверка показывает, что Q является частичным порядком в группе $A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})$.

ЛЕММА 2.1. *Частичный порядок Q группы $A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})$ является минимальным нетривиальным частичным порядком в группе $A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $fL(\mathbb{R})$ – произвольный элемент полугруппы Q . Тогда $fL(\mathbb{R}) = q^{g_1} q^{g_2} \dots q^{g_n} L(\mathbb{R})$ для некоторых $g_1, g_2, \dots, g_n \in A(\mathbb{R})$, где $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что носитель $\text{supp}(q^{g_i})$ любого элемента q^{g_i} ($i = 1, \dots, n$) состоит из одного интервала $(b_i, +\infty)$. Но тогда очевидно, что носитель $q^{g_1} q^{g_2} \dots q^{g_n}$ совпадает с некоторым интервалом $(b_{i(0)}, +\infty)$ для некоторого $1 \leq i(0) \leq n$ и $q^{g_1} q^{g_2} \dots q^{g_n}$ действует положительно на опорном интервале $(b_{i(0)}, +\infty)$. По лемме 1.1 элемент $q^{g_1} q^{g_2} \dots q^{g_n}$ сопряжен с элементом q . Поэтому инвариантная полугруппа $S_{A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})}(fL(\mathbb{R}), eL(\mathbb{R}))$ содержит полугруппу Q , что и доказывает минимальность порядка Q .

ЛЕММА 2.2. *Любой нетривиальный частичный порядок группы $A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})$ содержит либо частичный порядок Q , либо частичный порядок Q^{-1} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – произвольный частичный порядок группы $A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})$. Тогда $X \supseteq S_{A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})}(fL(\mathbb{R}), eL(\mathbb{R}))$ для некоторого $f \in A(\mathbb{R}) \setminus L(\mathbb{R})$. Без ограничения общности можно считать, что носитель $\text{supp}(f)$ ограничен снизу и содержит первый опорный интервал. Предположим также для определенности, что f действует положительно на первом опорном интервале. Если $\text{supp}(f)$ содержит опорный интервал вида $(b, +\infty)$, то, очевидно, $X \subseteq Q$ или Q^{-1} . Если $\text{supp}(f)$ не содержит опорного интервала вида $(b, +\infty)$, то $\text{supp}(f)$ содержит строго возрастающую последовательность опорных интервалов (a_n, b_n) ($n \in \mathbb{N}$) такую, что $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \lim_{n \in \mathbb{N}} b_n = +\infty$ и f действует одновременно на всех опорных интервалах (a_n, b_n) ($n \in \mathbb{N}$) положительно или отрицательно. Предположим, что f действует положительно. Повторяя рассуждения, проведенные в работе [8] при доказательстве предложения 13, получаем, что инвариантная полугруппа $S_{A(\mathbb{R})}(f, e)$ содержит элемент q .

Пусть теперь f действует одновременно на всех опорных интервалах (a_n, b_n) ($n \in \mathbb{N}$) отрицательно. Тогда рассуждения, проведенные в работе [8] при доказательстве предложения 13, показывают, что инвариантная полугруппа $S_{A(\mathbb{R})}(f, e)$ содержит элемент q_2 такой, что:

- 1) $\text{supp}(q_2) = (\alpha, \beta) \cup (\gamma, +\infty)$,
- 2) на интервале (α, β) элемент q_2 действует положительно,
- 3) на интервале $(\gamma, +\infty)$ элемент q_2 действует отрицательно.

В этом случае ясно, что $X \supseteq S_{A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})}(fL(\mathbb{R}), eL(\mathbb{R}))$ содержит элемент q^{-1} и, следовательно, частичный порядок Q^{-1} . Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Любой минимальный частичный порядок группы $A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})$ совпадает либо с порядком Q , либо с порядком Q^{-1} .*

ЛЕММА 2.3. *Пусть M_1 и M_2 – максимальные частичные порядки группы $A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})$ и порядки M_1 и M_2 содержат минимальный порядок $Q(Q^{-1})$. Тогда $M_1 = M_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что порядки M_1 и M_2 содержат минимальный порядок Q . Пусть $gL(\mathbb{R}) \in M_1 \setminus M_2$. Тогда $S_{A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})}(M_2, gL(\mathbb{R}))$ не является частичным порядком. Следовательно, существует $mL(\mathbb{R}) \in M_2$ такой, что $mL(\mathbb{R}) = (g^{f_1})^{-1} \times (g^{f_2})^{-1} \dots (g^{f_n})^{-1} L(\mathbb{R})$ для некоторых $f_1, \dots, f_n \in A(\mathbb{R})$.

Тогда по лемме 2.2 для некоторого $\varepsilon = \pm 1$ выполняется

$$Q^\varepsilon \subseteq S_{A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})}(mL(\mathbb{R}), eL(\mathbb{R})) \subseteq S_{A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})}(g^{-1}L(\mathbb{R}), eL(\mathbb{R})) \subseteq M_2.$$

Отсюда непосредственно следует, что $Q^\varepsilon \subseteq M_1^{-1}, M_2$, а это невозможно по нашему предположению.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Группа $A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})$ имеет не более двух максимальных частичных порядков.*

ТЕОРЕМА 2.1.

- 1) *Простая группа $A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})$ имеет в точности два максимальных частичных порядка.*
- 2) *Оба эти частичных порядка являются решеточными.*
- 3) *Любой частичный порядок группы $A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})$ продолжается до решеточного порядка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в группе $A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})$ подмножество

$$R^+ = \{gL(\mathbb{R}) \mid g \in A(\mathbb{R}) \text{ \& } (\exists \alpha \in \mathbb{R}) (\alpha)g > \alpha \\ \text{\& } (\forall \beta \in \mathbb{R}) \beta \geq \alpha \implies (\beta)g \geq \beta\}.$$

Непосредственная проверка показывает, что подмножество R^+ является частичным порядком в группе $A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})$. Заметим, что этот порядок максимален. Рассмотрим элемент $f \in A(\mathbb{R}) \setminus L(\mathbb{R})$. Если $fL(\mathbb{R}) \in (R^+)^{-1}$, то, очевидно, не существует частичного порядка, содержащего $R^+ \cup \{fL(\mathbb{R})\}$. Поэтому считаем, что $fL(\mathbb{R}) \notin R^+ \cup (R^+)^{-1}$. Но тогда элемент f обладает следующими свойствами:

- 1) носитель $\text{supp}(f)$ элемента f содержит строго возрастающие последовательности опорных интервалов (a_n, b_n) ($n \in \mathbb{N}$) и (c_n, d_n) ($n \in \mathbb{N}$) такие, что

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = \lim_{n \in \mathbb{N}} b_n = \lim_{n \in \mathbb{N}} c_n = \lim_{n \in \mathbb{N}} d_n = +\infty;$$

- 2) на интервалах (a_n, b_n) элемент f действует положительно, а на интервалах (c_n, d_n) элемент f действует отрицательно.

Теперь рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 17 из [8], показывают, что произведение некоторых элементов, сопряженных с элементом $fL(\mathbb{R})$ в группе $A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})$, является неединичным элементом, лежащим в полугруппе $(R^+)^{-1}$. Поэтому и в этом случае не существует частичного порядка, содержащего $R^+ \cup \{fL(\mathbb{R})\}$. Порядок R^+ является решеточным, поскольку он является ℓ -гомоморфным образом естественно решеточно упорядоченной группы $A(\mathbb{R})$ по идеалу $L(\mathbb{R})$. Оставшиеся утверждения очевидны.

ТЕОРЕМА 2.2. *Любая счетная решеточно упорядочиваемая группа изоморфно вложима в простую делимую решеточно доупорядочиваемую группу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – счетная решеточно упорядоченная группа. Тогда, как показано в книге [10, следствие 2L, с. 41], любая счетная l -группа изоморфна l -подгруппе порядковых автоморфизмов $A(\mathbb{Q})$ линейно упорядоченного множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Хорошо известно [2, с. 64], что $A(\mathbb{Q})$ изоморфно вложима в l -группу $A(\mathbb{R})$. Поскольку линейно упорядоченное множество $\mathbb{R}$ порядково изоморфно открытому отрезку $(0, 1)$, то можно считать, что G является l -подгруппой l -группы всех порядковых автоморфизмов замкнутого интервала $[0, 1]$, причем $(0)g = 0$ и $(1)g = 1$. Пусть g – произвольный элемент группы G . По элементу g определим отображение $\bar{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ линейно упорядоченного множества $\mathbb{R}$ на себя по правилу: $(x+k)\bar{g} = (x)g + k$ ($x \in [0, 1]$, $k \in \mathbb{Z}$).

Несложная проверка показывает, что $g \in A(\mathbb{R})$ и что l -подгруппа $\overline{G}$ решеточно упорядоченной группы $A(\mathbb{R})$, порожденная элементами $\{\bar{g} \mid g \in G\}$, l -изоморфна l -группе G . Поскольку $\overline{G} \cap L(\mathbb{R}) = e$, то l -группа $\overline{G}$ и, следовательно, l -группа G изоморфно вложима в фактор-группу $A(\mathbb{R})/L(\mathbb{R})$. Теперь применение теоремы 2.1 завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *Любая счетная решеточно правоупорядочиваемая группа изоморфно вложима в простую делимую решеточно доупорядочиваемую группу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, любая счетная правоупорядочиваемая группа изоморфно вложима в счетную решеточно упорядочиваемую группу [1, теорема 3.4.1]. Непосредственное применение теоремы 2.2 завершает доказательство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Копытов В. М., Медведев Н. Я. Правоупорядоченные группы. Новосибирск: Научная книга (НИИ МОО НГУ), 1996.
- [2] Копытов В. М. Решеточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984.
- [3] Kopytov V. M., Medvedev N. Ya. The Theory of Lattice-Ordered Groups. Dordrecht–Boston–New York: Kluwer Acad. Publ., 1994.
- [4] Караполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1977.
- [5] Holland C. W. The lattice-ordered group of automorphisms of an ordered set // Michigan Math. J. 1963. V. 10. P. 399–408.
- [6] Lloyd J. T. Lattice-Ordered Groups and o -Permutation Groups. Ph. D. Thesis. New Orleans: Tulane University, 1964.
- [7] Gurevich Y., Holland C. W. Recognizing the real line // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V. 265. P. 527–534.
- [8] Holland C. W. Partial orders of the group of automorphisms of the real line // Contemp. Math. 1992. V. 137. P. 197–207.
- [9] Giraudet M., Truss J. K. On distinguishing quotients of ordered permutation groups // Quart. J. Math. Oxford. 1994. V. 45. P. 181–209.
- [10] Glass A. M. W. Ordered Permutation Groups. London Math. Soc. Lect. Notes. Ser. V. 55. Cambridge: Univ. Press, 1981.

Алтайский государственный университет, г. Барнаул
E-mail: medvedev@math.dcn-asu.ru

Поступило
03.04.2000