Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Попов, Многообразие колец, не обладающее независимым базисом, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 5, 713–732

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm535>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 03:58:02

УДК 512+519.4

МНОГООБРАЗИЕ КОЛЕЦ, НЕ ОБЛАДАЮЩЕЕ НЕЗАВИСИМЫМ БАЗИСОМ

В. Ю. Попов

Построен пример многообразия колец, не обладающего независимым базисом. Доказано, что это многообразие является пересечением двух независимо базизируемых многообразий.

Библиография: 10 названий.

Система тождеств $\{u_i = v_i \mid i \in I\}$ называется *независимой*, если никакое из тождеств этой системы не является следствием всех остальных (см., например, [1, с. 148]). Говорят, что *многообразие алгебраических систем независимо базизируемо*, если существует независимая система тождеств, являющаяся базисом этого многообразия.

Любое многообразие, которое может быть определено конечной системой тождеств, очевидно, может быть задано и независимой системой тождеств. В работах [2] и [3] доказано, что каждое многообразие полугрупп, заданное уравновешенными и 0-приведенными тождествами, обладает независимым базисом. Первый пример многообразия полугрупп, не имеющего независимого базиса, построен в работе [4]. Другие примеры многообразий полугрупп, не обладающих независимым базисом, построены в работах [5]–[7]. В [5] приведен пример системы тождеств моноидов, в [8] – инверсных полугрупп, в [9] – групп, не имеющих независимого базиса. В [6] доказано, что существует многообразие полугрупп, порожденное конечной полугруппой и не имеющее независимого базиса. Заметим, что любое полиоднородное многообразие колец, а значит и многообразие алгебр над бесконечным полем, независимо базизируемо, поскольку тождества меньшей степени не следуют из тождеств большей степени. Цель настоящей заметки – построение многообразия колец, не имеющего независимого базиса.

ТЕОРЕМА. *Существует многообразие колец $\mathfrak{X}$, не обладающее независимым базисом.*

Введем ряд обозначений. Пусть $\mathcal{K}$ – некоторое, не обязательно ассоциативное кольцо, $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathcal{K}$. Определим левонормированное произведение $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$ индукцией по n , полагая $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n = (a_1 a_2 \dots a_{n-1}) a_n$ при $n > 1$. При $n = 1$ имеем просто a_1 . Более того, полагаем

$$\underbrace{a_1 a_2 \dots a_2}_{m \text{ раз}} = a_1 a_2^m,$$

b^0 – пустой символ для любого символа b . Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ – некоторое счетное множество, Γ – свободный группоид с множеством свободных образующих X .

Обозначим через F свободное кольцо, базисом которого как $\mathbb{Z}$ -модуля является множество Γ . Определим линейные отображения A, B, C, D , переводящие элементы декартова произведения $F \times F$ в элементы кольца F , полагая

$$\begin{aligned} A(y, x) &= (x(x(yx)x^2)x), & C(y, x) &= (x(x(yx)x^4)x), \\ B(y, x) &= (x(x(yx)x^3)x), & D(y, x) &= (x(x(yx)x^5)x). \end{aligned}$$

Если $Y_1 = Y_1(x, y)$, $Y_2 = Y_2(x, y)$, $\dots$, $Y_{n-1} = Y_{n-1}(x, y)$, $Y_n = Y_n(x, y)$ – некоторые отображения, то суперпозицию этих отображений $Y_2(Y_1(z_1, z_2), z_3)$ будем обозначать через $Y_1(z_1, z_2)Y_2(z_3)$; распространяя это обозначение индукцией по n , полагаем

$$Y_n(Y_1(z_1, z_2)Y_2(z_3) \dots Y_{n-1}(z_n), z_{n+1}) = Y_1(z_1, z_2)Y_2(z_3) \dots Y_{n-1}(z_n)Y_n(z_{n+1}).$$

Кроме того, считаем, что

$$X(z_1, z_2)Y^n(z_3) = X(z_1, z_2) \underbrace{Y(z_3) \dots Y(z_3)}_{n \text{ раз}}.$$

Пусть $\mathfrak{R}$ – многообразие всех метабелевых колец характеристики 2; $F\mathfrak{R}$ – кольцо, свободное в многообразии $\mathfrak{R}$ и имеющее счетное множество свободных образующих $\{e, e_1, \dots, e_n, \dots\}$, $F_1\mathfrak{R}$ – моногенное кольцо, свободное в многообразии $\mathfrak{R}$. Пусть $\mathfrak{Y}$ – многообразие, заданное тождеством

$$B(z, x)B(x)C(x)D(x) = B(z, x)C(x) \quad (1)$$

и системой тождеств

$$A(x, x)B^n(x)C(x) = 0, \quad (2)$$

где $n \in \mathbb{N}$; $\mathfrak{Y}_m$ – многообразие, заданное тождеством (1) и системой тождеств вида (2), где $n < m$. Положим $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} \cap \mathfrak{R}$. Обозначим через $\mathfrak{X}_m, F\mathfrak{X}, F\mathfrak{X}_m$ многообразия $\mathfrak{Y}_m \cap \mathfrak{R}$; кольцо счетного ранга, свободное в многообразии $\mathfrak{X}$; кольцо счетного ранга, свободное в многообразии $\mathfrak{X}_m$, соответственно. Для удобства образующие колец $F\mathfrak{X}$ и $F\mathfrak{X}_m$ будем обозначать теми же буквами, что и образующие кольца $F\mathfrak{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Покажем, что многообразие $\mathfrak{X}$ не имеет независимого базиса. Для этого нам потребуются следующие две леммы.

ЛЕММА 1. *Для любого $n > 1$ из тождеств (1) и (2) следует тождество*

$$A(x, x)B^m(x)C(x) = 0, \quad (3)$$

где $m \in \{1, \dots, n-1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по n .

База индукции. Пусть $n = 2$. Тогда нам нужно показать, что из выполнимости тождеств (1) и

$$A(x, x)B^2(x)C(x) = 0 \quad (4)$$

следует тождество $A(x, x)B(x)C(x) = 0$. В самом деле, из выполнимости тождества (4) вытекает выполнимость тождества $A(x, x)B^2(x)C(x)D(x) = 0$. Отсюда в силу тождества (1) получаем

$$\begin{aligned} A(x, x)B^2(x)C(x)D(x) &= B(A(x, x), x)B(x)C(x)D(x) \\ &= B(A(x, x), x)C(x) = A(x, x)B(x)C(x) = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Шаг индукции. Допустим, что утверждение леммы справедливо для некоторого n . Покажем, что оно выполняется и для $n + 1$. Покажем сначала, что из тождеств (1) и

$$A(x, x)B^{n+1}(x)C(x) = 0 \quad (5)$$

следует тождество (2). В самом деле, из выполнимости тождества (5) вытекает выполнимость тождества $A(x, x)B^{n+1}(x)C(x)D(x) = 0$. Отсюда в силу тождества (1) получаем следующую цепочку тождеств:

$$\begin{aligned} A(x, x)B^{n+1}(x)C(x)D(x) &= B(A(x, x)B^{n-1}(x), x)B(x)C(x)D(x) \\ &= B(A(x, x)B^{n-1}(x), x)C(x) = A(x, x)B^n(x)C(x) = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. По предположению индукции из тождеств (1) и (2) следует тождество (3), где $m \in \{1, \dots, n - 1\}$. С учетом того, что из тождеств (1) и (5) следует тождество (2), получаем, что из тождеств (1) и (5) следует тождество (3), где $m \in \{1, \dots, n\}$. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. *Для любого натурального числа n тождество (2) выполняется в многообразии $\mathfrak{X}_m$ тогда и только тогда, когда $n < m$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $n < m$. Тогда тождество (2) выполняется в многообразии $\mathfrak{X}_m$ по определению многообразия $\mathfrak{X}_m$. Допустим теперь, что $n \geq m$. Нам нужно показать, что тождество (2) не выполняется в многообразии $\mathfrak{X}_m$. Предположим противное. Из выполнимости тождества (2) в многообразии $\mathfrak{X}_m$ вытекает выполнимость этого тождества в кольце $F\mathfrak{X}_m$. Тождество (2) выполняется в кольце $F\mathfrak{X}_m$ тогда и только тогда, когда в кольце $F\mathfrak{X}_m$ выполняется равенство

$$A(e, e)B^n(e)C(e) = 0. \quad (6)$$

Обозначим через S множество многочленов $f(e)$ таких, что $f(e) = 0$ – соотношение в кольце $F\mathfrak{X}_m$, полученное подстановкой конкретных элементов кольца $F\mathfrak{X}_m$ вместо переменных в тождество (1) или в тождество

$$A(x, x)B^{m-1}(x)C(x) = 0. \quad (7)$$

Пусть I – идеал кольца $F\mathfrak{R}$, порожденный множеством S . Согласно лемме 1 имеет место равенство

$$\mathfrak{X}_m = \text{var}\{B(z, x)B(x)C(x)D(x) = B(z, x)C(x), A(x, x)B^{m-1}(x)C(x) = 0\}.$$

Следовательно, равенство (6) выполняется в кольце $F\mathfrak{X}_m$ тогда и только тогда, когда многочлен

$$A(e, e)B^n(e)C(e) \quad (8)$$

принадлежит идеалу I . Пусть

$$u_{i1}h_ju_{i2} \quad (9)$$

– некоторое произведение многочленов, имеющее вид $u_{i1}^{(1)} \dots u_{i1}^{(k)} h_j u_{i2}^{(1)} \dots u_{i2}^{(l)}$ с некоторым расположением скобок. Тогда принадлежность многочлена (8) идеалу I равносильна тому, что в кольце $F\mathfrak{R}$ выполняется равенство вида

$$A(e, e)B^n(e)C(e) = \sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i2}, \quad (10)$$

где $h_j \in S$. В силу дистрибутивности можно считать, что все многочлены, входящие в (9), за исключением h_j , являются одночленами. Поскольку многообразие $\mathfrak{R}$, а значит и кольцо $F\mathfrak{R}$, удовлетворяет тождеству $(xy)(zt) = 0$, то все эти одночлены являются суммами свободных образующих. Так как в левой части равенства (10) стоит многочлен, зависящий только от e , то в силу свободы кольца $F\mathfrak{R}$ можно считать, что многочлен

$$\sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i2} \quad (11)$$

тоже зависит только от e . Следовательно, равенство (10) выполняется в кольце $F\mathfrak{R}$ тогда и только тогда, когда оно выполняется в кольце $F_1\mathfrak{R}$. Для приведения многочлена (11) к более простому виду нам потребуется следующая

ЛЕММА 3. Пусть $W \rightleftharpoons \{A(e, e)B^n(e)C(e)D^k(e) \mid n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Тогда сумма (11) представима в виде $f_1 + f_2$, где f_1 – многочлен, который сам может быть представлен в виде (11), каждый одночлен многочлена f_1 принадлежит множеству W , а f_2 – многочлен, ни один одночлен которого не принадлежит множеству W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по числу одночленов в сумме (11). Допустим, что число d одночленов в сумме (11) равно нулю. Тогда утверждение очевидно. Допустим, что утверждение справедливо для некоторого числа одночленов d . Покажем, что оно верно и для $d + 1$. Пусть число одночленов в сумме (11) не больше $d + 1$. Тогда

$$\sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i2} = \sum_{i>1,j} u_{i1}h_ju_{i2} + u_{11}h_1u_{12}. \quad (12)$$

Так как число одночленов в сумме

$$\sum_{i>1,j} u_{i1}h_ju_{i2} \quad (13)$$

не превосходит d , то по предположению индукции имеем, что

$$\sum_{i>1, j} u_{i1} h_j u_{i2} = f_1 + f_2. \quad (14)$$

Рассмотрим многочлен

$$u_{11} h_1 u_{12}. \quad (15)$$

В зависимости от того, получен ли многочлен h_1 из тождества (1) или из тождества (7), следует рассмотреть два случая.

Пусть h_1 получен из тождества (7). В силу метабелевости кольца $F_1 \mathfrak{R}$ получаем, что либо $h_1 = 0$, либо $h_1 = A(e, e)B^{m-1}(e)C(e)$, либо

$$h_1 = A(e, e)B^{m-1}(e)C(e) + A(y, e)B^{m-1}(e)C(e) + A(e, y)B^{m-1}(e)C(e),$$

где y — многочлен, отличный от нуля и не содержащий одночлена e . Поскольку многочлен y входит в многочлены

$$A(y, e)B^{m-1}(e)C(e) \quad (16)$$

и

$$A(e, y)B^{m-1}(e)C(e) \quad (17)$$

линейно, в силу дистрибутивности y можно считать одночленом. Покажем, что имеют место следующие два соотношения:

$$u_{11}(A(y, e)B^{m-1}(e)C(e))u_{12} \notin W, \quad (18)$$

$$u_{11}(A(e, y)B^{m-1}(e)C(e))u_{12} \notin W. \quad (19)$$

Рассмотрим сначала случай слова $u_{11}(A(y, e)B^{m-1}(e)C(e))u_{12}$. Допустим, что слово $u_{11}(A(y, e)B^{m-1}(e)C(e))u_{12} \in W$. Тогда для некоторых n и k должно выполняться равенство $A(e, e)B^n(e)C(e)D^k(e) = u_{11}(A(y, e)B^{m-1}(e)C(e))u_{12}$. Следовательно, слово (16) является подсловом слова

$$A(e, e)B^n(e)C(e)D^k(e). \quad (20)$$

Предположим, что

$$A(e, e)B^n(e)C(e)D^k(e) = A(y, e)B^{m-1}(e)C(e). \quad (21)$$

Следует рассмотреть два случая в зависимости от того, будет ли k числом положительным или $k = 0$. Допустим, что $k > 0$. Тогда из равенства (21) непосредственно вытекает равенство $(e(A(e, e)B^n(e)C(e)D^{k-1}(e))e) = e(A(y, e)B^{m-1}(e)C(e))e$. Последнее равенство равносильно в кольце $F_1 \mathfrak{R}$ следующей системе равенств:

$$e(A(e, e)B^n(e)C(e)D^{k-1}(e))e = e, \quad e = A(y, e)B^{m-1}(e)C(e).$$

Очевидно, что оба эти равенства в кольце $F_1 \mathfrak{R}$ ложны. Предположим теперь, что $k = 0$. Тогда равенство (21) принимает вид $A(e, e)B^n(e)C(e) = A(y, e)B^{m-1}(e)C(e)$. Очевидно, что это равенство равносильно в кольце $F_1 \mathfrak{R}$ равенству

$$A(e, e)B^n(e) = A(y, e)B^{m-1}(e). \quad (22)$$

Предположим, что $n > m - 1$. Тогда из равенства (22) следует равенство

$$A(e, e)B^{n-m+1}(e) = A(y, e).$$

Из этого равенства получаем равенство $(e(A(e, e)B^{n-m}(e)e))e = e(A(y, e)e)$, равносильное в кольце $F_1\mathfrak{R}$ ложной системе равенств $e(A(e, e)B^{n-m}(e)e) = e$, $e = A(y, e)e$. Предположим теперь, что $n < m - 1$. Тогда из равенства (22) вытекает равенство $A(e, e) = A(y, e)B^{m-1-n}(e)$, равносильное равенству $ee = (e(A(y, e)B^{m-2-n}(e)e))e$, которое в свою очередь равносильно ложной системе равенств

$$ee = e, \quad e = e(A(y, e)B^{m-2-n}(e)e).$$

Пусть теперь $n = m - 1$. В этом случае, как нетрудно убедиться, из равенства (22) вытекает равенство $e = y$, которое противоречит нашему предположению о том, что $e \neq y$. Таким образом, мы убедились в том, что равенство (21) не выполняется. Следовательно, слово (16) является собственным подсловом слова (20). Несложная проверка позволяет убедиться в том, что это невозможно. Следовательно, имеет место соотношение (18). Совершенно аналогично можно рассмотреть случай слова (17) и убедиться в выполнимости соотношения (19). Следовательно, требуемым представлением будет либо представление

$$\begin{aligned} & (u_{11}(A(e, e)B^{m-1}(e)C(e))u_{12} + f_1) \\ & + (u_{11}(A(y, e)B^{m-1}(e)C(e))u_{12} + u_{11}(A(e, y)B^{m-1}(e)C(e))u_{12} + f_2), \end{aligned} \quad (23)$$

либо представление

$$\begin{aligned} & f_1 + (u_{11}(A(e, e)B^{m-1}(e)C(e))u_{12} \\ & + u_{11}(A(y, e)B^{m-1}(e)C(e))u_{12} + u_{11}(A(e, y)B^{m-1}(e)C(e))u_{12} + f_2). \end{aligned} \quad (24)$$

Аналогично можно рассмотреть случай, когда многочлен h_1 получен из тождества (1). Лемма 3 доказана.

Вообще говоря, если в кольце $F_1\mathfrak{R}$ выполняется равенство вида (10), то таких равенств для различных многочленов (11) выполняется бесконечно много. Заметим, что слово (8) принадлежит множеству W . Поэтому в силу свободы кольца $F_1\mathfrak{R}$ из равенства $A(e, e)B^n(e)C(e) = f_1 + f_2$ вытекает равенство $f_2 = 0$. В дальнейшем мы будем рассматривать такое равенство (10), что число одночленов в многочлене (11) минимально. Учитывая лемму 3, легко понять, что в этом случае будет иметь место равенство $\sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i2} = f_1$. Завершают доказательство леммы 2 индуктивные рассуждения, которые мы оформим в отдельную лемму.

ЛЕММА 4. *Для любого $k \geq 0$ и для любого $n > m + k - 1$ равенство*

$$A(e, e)B^n(e)C(e)D^k(e) = \sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i2} \quad (25)$$

ложно в кольце $F_1\mathfrak{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по числу p одночленов в сумме (11). Предположим, что $p = 0$. Тогда утверждение очевидно. Допустим, что утверждение леммы справедливо для некоторого числа p , и покажем, что оно выполняется и для $p + 1$.

Пусть в кольце $F_1\mathfrak{A}$ выполняется равенство (25) и число одночленов в сумме (11) превосходит $p + 1$. Так как (25) – равенство в свободном кольце, найдутся i и j такие, что одночлен (20) будет одночленом многочлена (9). Без ограничения общности можно считать, что $i = j = 1$. Следует рассмотреть два случая в зависимости от того, соответствует многочлен h_1 тождеству (1) или тождеству (7). Допустим, что многочлен h_1 соответствует тождеству (1). Тогда в кольце $F_1\mathfrak{A}$ для некоторого неассоциативного слова z выполняется одно из следующих двух равенств:

$$A(e, e)B^n(e)C(e)D^k(e) = u_{11}B(z, e)B(e)C(e)D(e)u_{12}, \quad (26)$$

$$A(e, e)B^n(e)C(e)D^k(e) = u_{11}B(z, e)C(e)u_{12}. \quad (27)$$

Допустим, что имеет место равенство (26). Несложно убедиться в том, что слово $u_{11}B(z, e)B(e)C(e)D(e)u_{12}$ может быть представлено в виде

$$u_{11}D(B(z, e)B(e)C(e), e)u_{12}.$$

В силу того, что (26) – равенство в свободном кольце, слово (20) должно содержать подслово

$$D(B(z, e)B(e)C(e), e). \quad (28)$$

Следует рассмотреть два случая в зависимости от того, будет ли равно нулю число k . Допустим, что $k = 0$. Тогда слово (20) примет вид (8), а равенство (26) примет вид

$$A(e, e)B^n(e)C(e) = u_{11}B(z, e)B(e)C(e)D(e)u_{12}. \quad (29)$$

Предположим, что в кольце $F_1\mathfrak{A}$ выполняется равенство

$$A(e, e)B^n(e)C(e) = D(B(z, e)B(e)C(e), e). \quad (30)$$

Тогда в силу свободы кольца $F_1\mathfrak{A}$ из этого равенства непосредственно вытекает равенство

$$e(A(e, e)B^n(e)e) = (e(B(z, e)B(e)C(e)e))e.$$

Последнее равенство равносильно в кольце $F_1\mathfrak{A}$ следующей системе равенств:

$$e = e(B(z, e)B(e)C(e)e), \quad A(e, e)B^n(e)e = e.$$

Очевидно, что оба эти равенства ложны. Следовательно, ложно и равенство (30). Отсюда непосредственно вытекает, что слово (28) является собственным подсловом слова (8). Заметим, что слово (28) либо является подсловом слова $A(e, e)$, либо равно одному из следующих девяти подслов:

$$e((((e(A(e, e)B^n(e)e))e)e)e)e, \quad (31)$$

$$(e(A(e, e)B^n(e)e))e^r, \quad r \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad (32)$$

$$e(A(e, e)B^p(e)e), \quad p \leq n, \quad (33)$$

$$A(e, e)B^p(e)e, \quad p \leq n, \quad (34)$$

$$A(e, e)B^p(e), \quad p \leq n, \quad (35)$$

$$e((((e(A(e, e)B^p(e)e))e)e)e), \quad p < n, \quad (36)$$

$$(e(A(e, e)B^p(e)e))e^r, \quad p < n, \quad r \in \{1, 2, 3\}, \quad (37)$$

$$e(A(e, e)B^p(e)e), \quad p < n, \quad (38)$$

$$A(e, e)B^p(e)e, \quad p < n. \quad (39)$$

Заметим, что длина слова $A(e, e)$ равна 7, а длина слова (28) больше 34. Следовательно, слово (28) не является подсловом слова $A(e, e)$. Допустим, что слово (28) равно слову (31). Тогда в кольце $F_1\mathfrak{R}$ должно выполняться равенство

$$((((e(A(e, e)B^n(e)e))e)e)e)e = e,$$

что невозможно. Если слово (28) равно слову (32), то при $r \geq 3$ в кольце $F_1\mathfrak{R}$ должно выполняться ложное равенство $(e(A(e, e)B^n(e)e))e^{r-2} = e$. Допустим, что $r < 3$ и слово (28) равно слову (32). Если $r = 2$, то из равенства

$$((e(A(e, e)B^n(e)e))e)e = D(B(z, e)B(e)C(e), e)$$

очевидным образом вытекает равенство

$$(e(A(e, e)B^n(e)e))e = e((((e(B(z, e)B(e)C(e)e))e)e)e)e).$$

Последнее равенство равносильно в кольце $F_1\mathfrak{R}$ следующей системе равенств:

$$e(A(e, e)B^n(e)e) = e, \quad e = (((((e(B(z, e)B(e)C(e)e))e)e)e)e)e).$$

Очевидно, что оба равенства этой системы ложны в кольце $F_1\mathfrak{R}$. Если $r = 1$, то из равенства

$$(e(A(e, e)B^n(e)e))e = D(B(z, e)B(e)C(e), e)$$

очевидным образом вытекает равенство

$$e((((e(A(e, e)B^{n-1}(e)e))e)e)e) = (((e(B(z, e)B(e)C(e)e))e)e)e,$$

которое равносильно в кольце $F_1\mathfrak{R}$ системе ложных равенств

$$e = ((e(B(z, e)B(e)C(e)e))e)e, \quad (((e(A(e, e)B^{n-1}(e)e))e)e)e = e.$$

Итак, мы убедились, что слово (28) не равно слову (32). Случаи (33)–(39) рассматриваются совершенно аналогично. Следовательно, слово (28) не является подсловом слова (8). Поэтому в кольце $F_1\mathfrak{R}$ не выполняется равенство (29). Рассмотрим теперь случаи $k > 0$. Так же, как и в случае $k = 0$, предположим сначала, что

$$A(e, e)B^n(e)C(e)D^k(e) = B(z, e)B(e)C(e)D(e). \quad (40)$$

Пусть $k = 1$. Несложной проверкой можно убедиться в том, что это равенство выполняется тогда и только тогда, когда $A(e, e)B^{n-2}(e) = z$. Отсюда в силу леммы 3 непосредственно вытекает, что имеет место равенство

$$A(e, e)B^{n-1}(e)C(e)D^{k-1}(e) = \sum_{i>1, j} u_{i1}h_ju_{i2}.$$

Заметим, что это равенство удовлетворяет условиям леммы и число одночленов в сумме (13) не превосходит p . Это противоречит предположению индукции. Пусть теперь $k > 1$. Тогда из равенства (40) вытекает равенство

$$A(e, e)B^n(e)C(e)D^{k-1}(e) = B(z, e)B(e)C(e),$$

которое в свою очередь равносильно равенству

$$(e(A(e, e)B^n(e)C(e)D^{k-2}(e)e))e = e(B(z, e)B(e)e).$$

Очевидно, что последнее равенство равносильно ложной системе равенств

$$e(A(e, e)B^n(e)C(e)D^{k-2}(e)e) = e, \quad e = B(z, e)B(e)e.$$

Следовательно, равенство (40) не имеет места. Таким образом, нам осталось рассмотреть случай, когда (28) – собственное подслово слова (20). Заметим, что в этом случае слово (28) либо является подсловом слова (8), либо равно одному из следующих четырех подслов:

$$e((((((e(A(e, e)B^n(e)C(e)D^q(e)e))e)e)e)e)e), \quad (41)$$

$$(e(A(e, e)B^n(e)C(e)D^q(e)e))e^r, \quad r \in \{1, \dots, 5\}, \quad (42)$$

$$e(A(e, e)B^n(e)C(e)D^q(e)e), \quad (43)$$

$$A(e, e)B^n(e)C(e)D^q(e)e. \quad (44)$$

Случай, когда слово (28) является подсловом слова (8), рассмотрен нами выше. Несложная проверка, позволяет убедиться в том, что слово (28) не равно ни одному из слов (41)–(44). Итак, мы завершили рассмотрение равенства (26). Допустим теперь, что в кольце $F_1\mathfrak{R}$ имеет место равенство (27). Рассмотрим сначала случай $k = 0$. В этом случае равенство (27) примет вид

$$A(e, e)B^n(e)C(e) = u_{11}B(z, e)C(e)u_{12}. \quad (45)$$

Предположим, что слово

$$B(z, e)C(e) \quad (46)$$

является собственным подсловом слова

$$u_{11}B(z, e)C(e)u_{12}. \quad (47)$$

Тогда в силу равенства (45) слово (46) является собственным подсловом слова (8). В этом случае, как замечено выше, слово (46) либо является подсловом слова $A(e, e)$,

либо равно одному из слов (31)–(39). Поскольку длина слова (46) больше длины слова $A(e, e)$, слово (46) не может быть подсловом слова $A(e, e)$. Следовательно, слово (46) должно быть равно одному из слов (31)–(39). Однако, как показывает несложная проверка, это невозможно. Отсюда непосредственно получаем, что слова (46) и (47) равны. Следовательно, равны слова (8) и (46). Легко проверить, что отсюда вытекает равенство

$$A(e, e)B^{n-1}(e) = z. \quad (48)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае многочлен h_1 соответствует тождеству (1). Следовательно, имеет место равенство

$$u_{11}h_1u_{12} = u_{11}(B(z, e)B(e)C(e)D(e) - B(z, e)C(e))u_{12}.$$

Поэтому из равенства (48) вытекает равенство

$$A(e, e)B^{n+1}(e)C(e)D(e) = \sum_{i>1, j} u_{i1}h_ju_{i2}.$$

Заметим, что это равенство удовлетворяет условиям леммы и число слагаемых в сумме (13) не превосходит p . Следовательно, по предположению индукции это равенство ложно. Рассмотрим теперь случай $k > 0$. Предположим, что слово (46) является собственным подсловом слова (47). Тогда в силу равенства (27) слово (46) является собственным подсловом слова (20). В этом случае слово (46) либо является собственным подсловом слова (8), либо равно одному из слов (41)–(44). Случай, когда слово (46) является подсловом слова (8), рассмотрен нами выше. Несложная проверка позволяет убедиться в том, что слово (46) не равно ни одному из слов (41)–(44). Предположим теперь, что имеет место равенство $A(e, e)B^n(e)C(e)D^k(e) = B(z, e)C(e)$. Из этого равенства очевидным образом вытекает равенство

$$(e(A(e, e)B^n(e)C(e)D^{k-1}(e)e))e = e(B(z, e)C(e)e),$$

которое, в свою очередь, равносильно ложной системе равенств

$$e(A(e, e)B^n(e)C(e)D^{k-1}(e)e) = e, \quad B(z, e)C(e)e = e.$$

Аналогично тому, как мы рассмотрели тождество (1), можно рассмотреть и случай тождества (7). Лемма 4 доказана.

Из леммы 4 вытекает, что для любого $n > m - 1$ в кольце $F_1\mathfrak{X}$ имеет место соотношение

$$A(e, e)B^n(e)C(e) \neq \sum_{i, j} u_{i1}h_ju_{i2}.$$

Это, как замечено выше, равносильно тому, что для любого натурального числа $n > m - 1$ тождество (2) не выполняется в многообразии $\mathfrak{X}_m$, что и требовалось доказать. Лемма 2 доказана.

Из лемм 1 и 2 очевидным образом следует, что система тождеств, задающая многообразие $\mathfrak{X}$, не является независимой. Допустим тем не менее, что многообразие $\mathfrak{X}$ обладает независимым базисом. Нетрудно убедиться в том, что если многообразие $\mathfrak{X}$ обладает

независимым базисом тождеств, то многообразие $\mathfrak{X}$ обладает независимым базисом и как подмногообразие многообразия $\mathfrak{R}$. Зафиксируем некоторую независимую систему тождеств

$$l_1(\vec{x}) = 0, \dots, l_k(\vec{x}) = 0, \dots, \quad (49)$$

порождающую многообразие $\mathfrak{X}$ как подмногообразие многообразия $\mathfrak{R}$. Поскольку система тождеств (49) порождает многообразие $\mathfrak{X}$, в многообразии

$$\mathfrak{U} = \text{var}\{l_1(\vec{x}) = 0, \dots, l_k(\vec{x}) = 0, \dots\} \cap \mathfrak{R}$$

должны выполняться все тождества многообразия $\mathfrak{Y}$; в частности, должны выполняться тождество (1) и система тождеств вида (2), где $n \in \mathbb{N}$. Выполнимость тождества (1) и системы тождеств вида (2), где $n \in \mathbb{N}$, в многообразии $\mathfrak{U}$ равносильна выполнимости этих тождеств в кольце счетного ранга, свободном в многообразии $\mathfrak{U}$. Последнее равносильно тому, что в кольце счетного ранга, свободном в многообразии $\mathfrak{U}$, выполняются равенства

$$B(e_1, e)B(e)C(e)D(e) = B(e_1, e)C(e) \quad (50)$$

и (6), где $n \in \mathbb{N}$, а e и e_1 – свободные образующие кольца счетного ранга, свободного в многообразии $\mathfrak{U}$. Обозначим через L множество многочленов $f(e)$ таких, что $f(e) = 0$ – соотношение в кольце счетного ранга, свободном в многообразии $\mathfrak{U}$, полученное подстановкой конкретных элементов этого кольца вместо переменных в тождества системы (49). Пусть J – идеал кольца $F\mathfrak{R}$, порожденный множеством L . Легко понять, что в кольце счетного ранга, свободном в многообразии $\mathfrak{U}$, равенства (6) и (50), где $n \in \mathbb{N}$, выполняются тогда и только тогда, когда многочлены (8) и

$$B(e_1, e)B(e)C(e)D(e) - B(e_1, e)C(e) \quad (51)$$

принадлежат идеалу J . Принадлежность этих многочленов идеалу J равносильна тому, что в кольце $F\mathfrak{R}$ выполняются равенства вида (10) и

$$B(e_1, e)B(e)C(e)D(e) - B(e_1, e)C(e) = \sum_{i,j} u_{i1} h_j u_{i2}, \quad (52)$$

где $h_j \in L$. Следует отметить, что равенств вида (10) и (52) может выполняться в кольце $F\mathfrak{R}$, вообще говоря, несколько в зависимости от внешнего вида сумм (11). Однако мы зафиксируем вид этих равенств и в дальнейшем будем считать его неизменным. Заметим, что (52) – равенство многочленов (11) и (51). При этом в многочлене (11) может быть лишь конечное число одночленов. Поэтому сумма (11) содержит лишь конечное число элементов множества L . Следовательно, в выводе тождества (1) задействовано лишь конечное число тождеств из системы (49). Пусть r – число тождеств из системы (49), участвующих в выводе тождества (1). В дальнейшем мы будем обозначать эти тождества $g_1(\vec{x}) = 0, \dots, g_r(\vec{x}) = 0$. Оставшиеся тождества системы (49) мы будем в дальнейшем обозначать $s_1(\vec{x}) = 0, \dots, s_k(\vec{x}) = 0, \dots$. Пусть, кроме того, $\mathbb{G} = \{g_1(\vec{x}) = 0, \dots, g_r(\vec{x}) = 0\}$, $\mathbb{S} = \{s_1(\vec{x}) = 0, \dots, s_k(\vec{x}) = 0, \dots\}$. Заметим, что $\mathfrak{X} = \bigcap \mathfrak{X}_m$. Поэтому для любого тождества $s_k(\vec{x}) = 0$ из множества $\mathbb{S}$ существует натуральное число m такое, что тождество $s_k(\vec{x}) = 0$ выполняется в многообразии $\mathfrak{X}_m$. Из

выполнимости тождества $s_k(\vec{x}) = 0$ в многообразии $\mathfrak{X}_m$ вытекает выполнимость этого тождества в кольце $F\mathfrak{X}_m$. Тождество $s_k(\vec{x}) = 0$ выполняется в кольце $F\mathfrak{X}_m$ тогда и только тогда, когда в кольце $F\mathfrak{X}_m$ выполняется равенство $s_k(\vec{e}) = 0$. Обозначим через S множество многочленов $f(\vec{e})$ таких, что $f(\vec{e}) = 0$ – соотношение в кольце $F\mathfrak{X}_m$, полученное подстановкой конкретных элементов кольца $F\mathfrak{X}_m$ вместо переменных в тождество (1) или в тождество (7). Пусть I – идеал кольца $F\mathfrak{R}$, порожденный множеством S . Согласно лемме 1 имеет место равенство

$$\mathfrak{X}_m = \text{var}\{B(z, x)B(x)C(x)D(x) = B(z, x)C(x), A(x, x)B^{m-1}(x)C(x) = 0\}.$$

Следовательно, равенство $s_k(\vec{e}) = 0$ выполняется в кольце $F\mathfrak{X}_m$ тогда и только тогда, когда многочлен $s_k(\vec{e})$ принадлежит идеалу I . Принадлежность многочлена $s_k(\vec{e})$ идеалу I равносильна тому, что в кольце $F\mathfrak{R}$ выполняется равенство вида

$$s_k(\vec{e}) = \sum_{i,j} u_{i1} h_j u_{i2},$$

где $h_j \in S$. Отсюда непосредственно вытекает, что каждый одночлен многочлена $s_k(\vec{e})$ содержит одно из следующих трех подслов:

$$B(z, \vec{x})B(\vec{x})C(\vec{x})D(\vec{x}), \quad B(z, \vec{x})C(\vec{x}), \quad A(x, \vec{x})B^{m-1}(\vec{x})C(\vec{x}).$$

Аналогично тому, как мы из системы тождеств (49) выделили конечную подсистему $\mathbb{G}$, состоящую из тождеств, участвующих в выводе тождества (1), множество тождеств $\mathbb{S}$ можно представить в виде объединения бесконечного числа конечных подмножеств $\mathbb{S}_i$, $i \in \mathbb{N}$, таких, что для любого i множество тождеств $\mathbb{S}_i$ – это пересечение множества тождеств $\mathbb{S}$ с множеством тождеств, используемых при выводе тождества $A(x, x)B^i(x)C(x) = 0$.

В силу леммы 2 для любого тождества $s(\vec{x}) = 0$ из множества $\mathbb{S}$ существует натуральное число $n_{s(\vec{x})=0}$ такое, что это тождество выводимо из системы тождеств (1) и

$$A(x, x)B^{n_{s(\vec{x})=0}}(x)C(x) = 0, \quad (53)$$

и невыводимо из тождества (1) и системы тождеств вида (3) для любого $m < n_{s(\vec{x})=0}$. Перенумеруем тождества из множества $\mathbb{S}$ таким образом, чтобы для любых $s(\vec{x}) = 0$, $t(\vec{x}) = 0 \in \mathbb{S}$ таких, что номер тождества $s(\vec{x}) = 0$ меньше номера тождества $t(\vec{x}) = 0$, имело место неравенство $n_{s(\vec{x})=0} \leq n_{t(\vec{x})=0}$. Предположим, что существуют тождество $s(\vec{x}) = 0$ из множества $\mathbb{S}$ и натуральное число $j \geq n_{s(\vec{x})=0}$ такие, что тождество $s(\vec{x}) = 0$ не принадлежит множеству $\mathbb{S}_j$. Поскольку $j \geq n_{s(\vec{x})=0}$, то в силу леммы 2 по определению числа $n_{s(\vec{x})=0}$ тождество $s(\vec{x}) = 0$ выводимо из системы тождеств (1) и $A(x, x)B^j(x)C(x) = 0$. Следовательно, тождество $s(\vec{x}) = 0$ выводимо из системы тождеств $\mathbb{S}_j \cup \mathbb{G}$. В силу того, что $s(\vec{x}) = 0 \notin \mathbb{S}_j$ и $s(\vec{x}) = 0 \notin \mathbb{G}$, имеет место соотношение $s(\vec{x}) = 0 \notin \mathbb{S}_j \cup \mathbb{G}$. Последнее, очевидно, противоречит независимости системы $\mathbb{S}$. Следовательно, мы убедились в том, что для любого тождества $s(\vec{x}) = 0$ из множества $\mathbb{S}$ это тождество принадлежит множеству $\mathbb{S}_j$ для любого натурального $j \geq n_{s(\vec{x})=0}$.

Пусть в кольце $F\mathfrak{R}$ выполняется равенство

$$A(e, e)B^{n_{s(\vec{x})=0}}(e)C(e) = \sum_{i,j} u_{i1} h_j u_{i2}. \quad (54)$$

Представим сумму (11) в виде $T_1 + T$, где T_1 и T – многочлены вида (11), причем в T_1 для любого j многочлен h_j соответствует тождеству $s_1(\vec{x}) = 0$, а в T ни один многочлен h_j не соответствует тождеству $s_1(\vec{x}) = 0$. Заменяв вхождения свободных образующих в многочлене T_1 на переменные, получим некоторое тождество $T_1(\vec{x}) = 0$. Из равенства (54) и соотношения

$$\sum_{i,j} u_{i1} h_j u_{i2} = T_1 + T$$

очевидным образом вытекает, что тождество $T_1(\vec{x}) = 0$ выполняется в многообразии $\mathfrak{X}$. Заменяем в множестве $\mathbb{S}$ тождество $s_1(\vec{x}) = 0$ на тождество $T_1(\vec{x}) = 0$. Убедимся в том, что система тождеств

$$((\mathbb{S} \cup \mathbb{G}) \setminus \{s_1(\vec{x}) = 0\}) \cup \{T_1(\vec{x}) = 0\} \quad (55)$$

будет являться базисом многообразия $\mathfrak{X}$ и будет независима. Покажем сначала, что система тождеств (55) является базисом многообразия $\mathfrak{X}$. Для этого нужно убедиться в том, что все тождества многообразия $\mathfrak{X}$ выводимы из множества тождеств (55). Пусть $t(\vec{x}) = 0$ – произвольное тождество, выполняющееся в многообразии $\mathfrak{X}$. Пусть $\mathbb{U}$ – множество тождеств, из которого выводимо тождество $t(\vec{x}) = 0$. Очевидно, что $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{S} \cup \mathbb{G}$. Предположим, что $\mathbb{U}$ – подмножество множества

$$(\mathbb{S} \cup \mathbb{G}) \setminus \{s_1(\vec{x}) = 0\}. \quad (56)$$

Тогда очевидно, что $\mathbb{U}$ – подмножество системы тождеств (55) и тождество $t(\vec{x}) = 0$ выводимо из (55). Допустим теперь, что $\mathbb{U}$ не является подмножеством множества (56). Тогда тождество $s_1(\vec{x}) = 0$ существенно участвует при выводе тождества $t(\vec{x}) = 0$ и принадлежит множеству $\mathbb{U}$. Однако, как замечено выше, тождество $s_1(\vec{x}) = 0$ выводимо из множества тождеств (1), (53). Следовательно, множество $\mathbb{U}$ можно заменить на множество

$$(\mathbb{U} \setminus \{s_1(\vec{x}) = 0\}) \cup \{B(z, x)B(x)C(x)D(x) = B(z, x)C(x), A(x, x)B^{n_{s_1(\vec{x})=0}}(x)C(x) = 0\}. \quad (57)$$

По определению множества $\mathbb{G}$ тождество (1) выводимо из множества $\mathbb{G}$, а по определению T_1 и T в силу равенства

$$A(e, e)B^{n_{s_1(\vec{x})=0}}(e)C(e) = \sum_{i,j} u_{i1} h_j u_{i2} = T_1 + T$$

тождество (53) выводимо из множества тождеств (55). Поэтому множество (57), а значит, и множество $\mathbb{U}$ можно заменить множеством (55). Отсюда в силу произвольности тождества $t(\vec{x}) = 0$ вытекает, что (55) – базис многообразия $\mathfrak{X}$. Покажем теперь, что система тождеств (55) независима. Пусть $t(\vec{x}) = 0$ – произвольное тождество, принадлежащее множеству (55) и выводимое из остальных тождеств множества (55). Предположим, что $t(\vec{x}) = 0$ – это $T_1(\vec{x}) = 0$. Тогда с учетом того, что тождество $s_1(\vec{x}) = 0$ выводимо из множества тождеств (55), получаем, что тождество $s_1(\vec{x}) = 0$ выводимо из множества тождеств (56). Это противоречит независимости системы тождеств $\mathbb{S} \cup \mathbb{G}$. Следовательно, тождество $t(\vec{x}) = 0$ отлично от $T_1(\vec{x}) = 0$. В этом случае с учетом того,

что $T_1(\vec{x}) = 0$ выводимо из тождества $s_1(\vec{x}) = 0$, получаем, что тождество $t(\vec{x}) = 0$ выводимо из множества тождеств $(\mathbb{S} \cup \mathbb{G}) \setminus \{t(\vec{x}) = 0\}$. Это противоречит независимости системы тождеств $\mathbb{S} \cup \mathbb{G}$. Следовательно, система тождеств (55) действительно независима. Заметим, что, действуя совершенно аналогично случаю тождества $s_1(\vec{x}) = 0$, мы можем заменить тождества $s_k(\vec{x}) = 0$ на тождества $T_k(\vec{x}) = 0$ для любого натурального числа k . В силу того, что в левой части равенства

$$A(e, e)B^{n_{s_k(\vec{x})=0}}(e)C(e) = \sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i2} \quad (58)$$

стоит многочлен, зависящий только от образующего e , без ограничения общности можно считать, что все одночлены суммы (11) тоже зависят только от образующего e . Отсюда непосредственно вытекает, что в многочленах T_k и T , где T_k и T – многочлены вида (11), причем в T_k для любого j многочлен h_j соответствует тождеству $s_k(\vec{x}) = 0$, а в T ни один многочлен h_j не соответствует тождеству $s_k(\vec{x}) = 0$, все одночлены зависят тоже только от образующего e . Поэтому тождество $T_k(\vec{x}) = 0$ будет тождеством одной переменной, и мы можем писать просто $T_k(x) = 0$. Таким образом, в многообразии $\mathfrak{X}$ имеется независимый базис вида $\mathbb{T} \cup \mathbb{G}$, где $\mathbb{T}$ – множество тождеств, полученное из множества тождеств $\mathbb{S}$ заменой каждого тождества $s_k(\vec{x}) = 0$ на $T_k(x) = 0$. Если мы вместо равенства (58) рассмотрим равенство

$$A(e, e)B^r(e)C(e) = \sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i2}, \quad (59)$$

где $r > n_{s_k(\vec{x})=0}$, то вместо $T_k(x) = 0$ получим некоторое тождество $T_{k,r}(x) = 0$. Действуя так же, как и в случае тождества $T_k(x) = 0$, можно показать, что система тождеств $((\mathbb{T} \cup \mathbb{G}) \setminus \{T_k(x) = 0\}) \cup \{T_{k,r}(x) = 0\}$ независима и является базисом многообразия $\mathfrak{X}$.

Рассмотрим равенства (58) и (59), где $r > n_{s_k(\vec{x})=0}$. В силу сказанного выше эти равенства можно представить в виде

$$A(e, e)B^r(e)C(e) = T_{k,r}(e) + T(e), \quad (60)$$

$$A(e, e)B^{n_{s_k(\vec{x})=0}}(e)C(e) = T_k(e) + T'(e), \quad (61)$$

где $T(e)$ и $T'(e)$ – многочлены вида (11) такие, что для любого j многочлен h_j не соответствует тождеству $T_k(x) = 0$. Заметим, что в силу леммы 2 имеет место равенство

$$A(e, e)B^{n_{s_k(\vec{x})=0}}(e)C(e) = A(e, e)B^r(e)C(e)D^{r-n_{s_k(\vec{x})=0}} + \sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i2},$$

где (11) – многочлен такой, что для любого j многочлен h_j получен из тождества (1). По определению множества $\mathbb{G}$ одночлены многочлена (11) можно перегруппировать таким образом, чтобы он попрежнему имел вид (11) и, кроме того, для любого j многочлен h_j был получен из одного из тождеств, принадлежащих множеству $\mathbb{G}$. Отсюда в силу равенства (60) получаем равенство

$$\begin{aligned} A(e, e)B^{n_{s_k(\vec{x})=0}}(e)C(e) &= A(e, e)B^r(e)C(e)D^{r-n_{s_k(\vec{x})=0}} + \sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i2} \\ &= (T_{k,r}(e) + T(e))D^{r-n_{s_k(\vec{x})=0}} + \sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i2}. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу равенства (61) имеет место соотношение

$$T_k(e) = T_{k,r}(e)D^{r-n_{s_k}(\bar{x})=0} + T''(e), \quad (62)$$

где $T''(e)$ – многочлен вида (11) такой, что для любого j многочлен h_j получен из тождества (1). Поскольку равенство вида (62) имеет место для любого $r > n_{s_k}(\bar{x})=0$, тождество $T_k(x) = 0$ можно заменить в базисе $\mathbb{T} \cup \mathbb{G}$ тождеством вида

$$\sum_j B(z_j(x), x)B^{q_j}(x)C(x) = 0$$

для подходящих слов $z_j(x)$ и сколь угодно больших натуральных чисел q_j . Используя рассуждения, аналогичные рассуждениям, использованным при доказательстве леммы 4, можно показать, что для любого k тождество $T_k(x) = 0$ можно заменить в базисе $\mathbb{T} \cup \mathbb{G}$ тождеством вида

$$\sum_j A(x, x)B^{q_j}(x)C(x) = 0,$$

которое мы будем в дальнейшем обозначать

$$P_{k,q_1,\dots,q_{j_k}}(x) = 0. \quad (63)$$

При этом (63) будет удовлетворять тем же условиям, что и тождество $T_k(x) = 0$. Следовательно, система тождеств $\mathbb{P} \cup \mathbb{G}$, где $\mathbb{P} = \{P_{k,q_1,\dots,q_{j_k}}(x) = 0 \mid k \in \mathbb{N}\}$, будет независимым базисом многообразия $\mathfrak{X}$. Заметим, что замену тождеств вида $T_k(x) = 0$ в базисе многообразия $\mathfrak{X}$ на тождества вида (63) мы можем осуществлять последовательно, т.е. при замене тождества $T_k(x) = 0$ на (63) тождества

$$P_{l,q_1,\dots,q_{j_l}}(x) = 0, \quad (64)$$

где $l < k$, можно считать уже известными. Поскольку, как замечено выше, числа $q_1, \dots, q_{j_l}$ можно брать сколь угодно большими, мы можем полагать, что для любых двух тождеств (63) и (64) из множества $\mathbb{P}$ если $l < k$, то выполняется соотношение

$$\max\{q_{l1}, \dots, q_{lj_l}\} < \min\{q_{k1}, \dots, q_{kj_k}\}.$$

Обозначим через $\mathbb{P}_1$ конечное подмножество множества $\mathbb{P}$, состоящее из всех тех тождеств множества $\mathbb{P}$, которые используются при выводе тождества

$$A(x, x)B(x)C(x) = 0. \quad (65)$$

Пусть

$$P_{1,q_1,\dots,q_{j_1}}(x) = 0 \quad (66)$$

– тождество с наименьшим номером, принадлежащее множеству $\mathbb{P}$, но не принадлежащее множеству $\mathbb{P}_1$. Покажем, что оно выводимо из множества тождеств

$$(\mathbb{P} \cup \mathbb{G}) \setminus \{P_{1,q_1,\dots,q_{j_1}}(x) = 0\}. \quad (67)$$

Для этого нам потребуется предварительная

ЛЕММА 5. Пусть (63) и (64) – два тождества такие, что для некоторого натурального числа r выполняются следующие условия:

$$j_l = j_k, \quad q_{l1} + r = q_{k1}, \quad \dots, \quad q_{lj_l} + r = q_{kj_k}. \quad (68)$$

Тогда тождество (64) выводимо из тождеств (1) и (63).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по числу $d = q_{k1} + \dots + q_{kj_k}$. Допустим, что $d = 1$. Тогда утверждение очевидно. Предположим, что лемма выполняется для некоторого числа d и покажем, что она справедлива и для числа $d+1$. Пусть (63) и (64) – тождества, удовлетворяющие соотношениям (68) для некоторого натурального числа r , и $d+1 = q_{k1} + \dots + q_{kj_k}$. Покажем, что из тождеств (1) и (63) следует тождество

$$P_{k, q_{k1}-1, q_{k2}-1, \dots, q_{kj_k}-1}(x) = 0. \quad (69)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} P_{k, q_{k1}, q_{k2}, \dots, q_{kj_k}}(x) &= A(x, x)B^{q_{k1}}(x)C(x) + A(x, x)B^{q_{k2}}(x)C(x) + \dots \\ &\quad + A(x, x)B^{q_{kj_k}-1}(x)C(x) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, из тождества (63) вытекает тождество

$$\begin{aligned} A(x, x)B^{q_{k1}}(x)C(x)D(x) + A(x, x)B^{q_{k2}}(x)C(x)D(x) + \dots \\ + A(x, x)B^{q_{kj_k}-1}(x)C(x)D(x) = 0. \end{aligned}$$

Применив к каждому слагаемому этого тождества тождество (1), получим тождество

$$\begin{aligned} A(x, x)B^{q_{k1}-1}(x)C(x) + A(x, x)B^{q_{k2}-1}(x)C(x) + \dots + A(x, x)B^{q_{kj_k}-1}(x)C(x) \\ = P_{k, q_{k1}-1, q_{k2}-1, \dots, q_{kj_k}-1}(x) = 0. \end{aligned}$$

Тождество (64) выводимо из тождеств (1) и (69) по предположению индукции, поэтому в силу того, что тождество (69) выводимо из тождеств (1) и (63), получаем выводимость тождества (64) из тождеств (1) и (63). Лемма 5 доказана.

Доказательства выводимости тождества (66) из множества тождеств (67) проведем индукцией по степени старшего члена многочлена $P_{1, q_1, \dots, q_{j_1}}(x)$. Поскольку база индукции очевидна, для доказательства требуемого факта нам достаточно показать, что в многообразии, заданном системой тождеств (67), имеет место тождество

$$P_{1, q_1, \dots, q_{j_1}}(x) = \sum_l A(x, x)B^{a_l}(x)C(x),$$

где $\max_l \{a_l\} < \max\{q_1, \dots, q_{j_1}\}$. Пусть

$$P_{2, q_{21}, \dots, q_{2j_2}}(x) = 0 \quad (70)$$

– тождество, отличное от тождества (66), принадлежащее множеству $\mathbb{P}$, но не принадлежащее множеству $\mathbb{P}_1$. Без ограничения общности в силу тождества $2x = 0$ можно

считать, что числа $q_{11}, \dots, q_{1j_1}, q_{21}, \dots, q_{2j_2}$ попарно различны и удовлетворяют следующим неравенствам: $q_{11} < \dots < q_{1j_1}$, $q_{21} < \dots < q_{2j_2}$. Кроме того, поскольку (66) – тождество с наименьшим номером, принадлежащее множеству $\mathbb{P}$, но не принадлежащее множеству $\mathbb{P}_1$, имеет место неравенство $q_{1j_1} < q_{21}$. Пусть $r = q_{2j_2} - q_{1j_1}$ и $r < q_{21}$. Тогда из тождества (70) в силу леммы 5 следует тождество

$$P_{2, q_{21}-r, \dots, q_{2j_2}-r}(x) = 0, \quad (71)$$

и в качестве $\sum_l A(x, x)B^{al}(x)C(x)$ мы можем взять многочлен

$$P_{1, q_{11}, \dots, q_{1j_1}}(x) + P_{1, q_{21}-r, \dots, q_{2j_2}-r}(x).$$

Предположим, что неравенство $r < q_{21}$ не выполняется, и покажем, что в этом случае тождество (70) можно заменить другим тождеством, которое выводимо из системы тождеств (67) и для которого неравенство $r < q_{21}$ справедливо. Если имеет место неравенство $r \geq q_{21}$, то вместо тождества (71) можно рассмотреть тождество

$$P_{2, 1, q_{21}-q_{11}+1, \dots, q_{2j_2}-q_{11}+1}(x) = 0. \quad (72)$$

По определению множества $\mathbb{P}_1$ мы можем из множества тождеств $\mathbb{P}_1 \cup \mathbb{G}$ вывести тождество (65). Складывая тождества (65) и (72), получим тождество

$$P_{2, q_{21}-q_{11}+1, \dots, q_{2j_2}-q_{11}+1}(x) = 0.$$

Теперь в качестве числа r мы можем взять число $q_{2j_2} - q_{11} + 1 - q_{1j_1}$ и снова проверить, выполняется ли необходимое неравенство. Поскольку на каждом шаге число r становится меньше, этот процесс оборвется на конечном шаге и мы либо получим требуемое неравенство, либо сведем многочлен $P_{2, q_{21}, \dots, q_{2j_2}}(x)$ к одночлену и сможем воспользоваться леммой 1. Итак, мы убедились, что тождество (66) выводимо из множества тождеств (67). Это противоречит независимости системы тождеств $\mathbb{P} \cup \mathbb{G}$, а значит, и системы тождеств $\mathbb{S} \cup \mathbb{G}$. Полученное противоречие доказывает, что многообразие $\mathfrak{X}$ не обладает независимым базисом тождеств. Теорема доказана.

В работе [10] замечено, что многообразие, не имеющее независимого базиса тождеств, построенное в [4], является пересечением независимо базизируемого и конечно базизируемого многообразий. Там же отмечен вопрос М. В. Сапира: каждое ли многообразие полугрупп является пересечением конечного числа независимо базизируемых многообразий? В свете этого вопроса представляет интерес следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Многообразие колец $\mathfrak{X}$ является пересечением независимо базизируемого и конечно базизируемого многообразий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства нам нужно показать, что существует конечно базизируемое многообразие $\mathfrak{Y}_1$ и независимо базизируемое многообразие $\mathfrak{Y}_2$ такие, что их пересечение является многообразием $\mathfrak{X}$. Обозначим через $\mathfrak{Y}_1$ многообразие колец, заданное тождеством (1), а через $\mathfrak{Y}_2$ – многообразие колец, заданное системой тождеств вида (2), где $n \in \mathbb{N}$, и тождествами $2x = 0$, $(x_1x_2)(x_3x_4) = 0$. Очевидно, что многообразие $\mathfrak{Y}_1$ конечно базизируемо и что пересечение многообразий $\mathfrak{Y}_1$ и $\mathfrak{Y}_2$ равно многообразию $\mathfrak{X}$. Следовательно, для доказательства предложения нам достаточно показать,

что многообразие $\mathfrak{Y}_2$ обладает независимым базисом тождеств. Допустим противное. Тогда либо существует натуральное число k такое, что тождество

$$A(x, x)B^k(x)C(x) = 0 \quad (73)$$

выводимо из множества тождеств

$$\{A(x, x)B^n(x)C(x) = 0, 2x = 0, (x_1x_2)(x_3x_4) = 0 \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{k\}\}, \quad (74)$$

либо тождество $2x = 0$ выводимо из множества тождеств

$$\{A(x, x)B^n(x)C(x) = 0, (x_1x_2)(x_3x_4) = 0 \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad (75)$$

либо тождество $(x_1x_2)(x_3x_4) = 0$ выводимо из множества тождеств

$$\{A(x, x)B^n(x)C(x) = 0, 2x = 0 \mid n \in \mathbb{N}\}. \quad (76)$$

Предположим сначала, что тождество $2x = 0$ выводимо из множества тождеств (75). Пусть $\mathfrak{Y}'_2$ – многообразие колец, заданное системой тождеств (75), $F\mathfrak{Y}'_2$ – кольцо счетного ранга, свободное в многообразии $\mathfrak{Y}'_2$, F – кольцо счетного ранга, свободное в многообразии всех колец. Как и раньше, образующие свободных колец будем обозначать элементами множества

$$\{e, e_1, \dots, e_n, \dots\}. \quad (77)$$

Заметим, что тождество $2x = 0$ выводимо из множества тождеств (75) тогда и только тогда, когда оно выполняется в многообразии $\mathfrak{Y}'_2$. Выполнимость тождества $2x = 0$ в многообразии $\mathfrak{Y}'_2$ равносильна выполнимости этого тождества в кольце $F\mathfrak{Y}'_2$. Тождество $2x = 0$ истинно в кольце $F\mathfrak{Y}'_2$ тогда и только тогда, когда в этом кольце выполняется равенство $2e = 0$. Истинность равенства $2e = 0$ в кольце $F\mathfrak{Y}'_2$ равносильна тому, что в кольце F выполняется равенство вида

$$2e = \sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i2},$$

где для любого натурального числа j многочлен h_j получен из одного из многочленов $A(x, x)B^n(x)C(x)$, $(x_1x_2)(x_3x_4)$, где $n \in \mathbb{N}$, подстановкой конкретных элементов кольца F вместо переменных. По определению многочленов h_j для любого j степени одночленов, входящих в h_j , не меньше 4. Следовательно, ни один одночлен многочлена (11) не имеет степени меньше 4. Отсюда в силу свободы кольца F непосредственно вытекает, что равенство

$$2e = \sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i2}$$

ложно в кольце F . Поэтому в силу сказанного выше тождество $2x = 0$ не выводимо из множества тождеств (75).

Допустим теперь, что тождество $(x_1x_2)(x_3x_4) = 0$ выводимо из множества тождеств (76). Пусть $\mathfrak{Y}''_2$ – многообразие колец, заданное системой тождеств (76), $F\mathfrak{Y}''_2$ – кольцо счетного ранга, свободное в многообразии $\mathfrak{Y}''_2$, F' – кольцо счетного ранга, свободное в многообразии всех колец характеристики 2. Как и раньше, образующие свободных колец будем обозначать элементами множества (77).

Заметим, что тождество $(x_1x_2)(x_3x_4) = 0$ выводимо из множества тождеств (76) тогда и только тогда, когда оно выполняется в многообразии $\mathfrak{Y}_2''$. Выполнимость тождества $(x_1x_2)(x_3x_4) = 0$ в многообразии $\mathfrak{Y}_2''$ равносильна выполнимости этого тождества в кольце $F\mathfrak{Y}_2''$. Тождество $(x_1x_2)(x_3x_4) = 0$ истинно в кольце $F\mathfrak{Y}_2''$ тогда и только тогда, когда в этом кольце выполняется равенство $(e_1e_2)(e_3e_4) = 0$. Истинность равенства $(e_1e_2)(e_3e_4) = 0$ в кольце $F\mathfrak{Y}_2''$ равносильна тому, что в кольце F' выполняется равенство вида

$$(e_1e_2)(e_3e_4) = \sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i2},$$

где для любого натурального числа j многочлен h_j получен из одного из многочленов $A(x, x)B^n(x)C(x)$, где $n \in \mathbb{N}$, подстановкой конкретных элементов кольца F' вместо переменных. По определению многочленов h_j для любого j степени одночленов, входящих в h_j , не меньше 24. Следовательно, ни один одночлен многочлена (11) не имеет степени меньше 24. Отсюда в силу свободы кольца F' непосредственно вытекает, что равенство

$$(e_1e_2)(e_3e_4) = \sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i2}$$

ложно в кольце F' . Поэтому в силу сказанного выше тождество $(x_1x_2)(x_3x_4) = 0$ не выводимо из множества тождеств (76).

Итак, для завершения доказательства предложения нам осталось рассмотреть случай, когда тождество (73) выводимо из множества тождеств (74).

Допустим, что тождество (73) выводимо из множества тождеств (74). Пусть $\mathfrak{Y}_2'''$ – многообразие колец, заданное системой тождеств (74). Обозначим через $F\mathfrak{Y}_2'''$ кольцо счетного ранга, свободное в многообразии $\mathfrak{Y}_2'''$, F'' – кольцо счетного ранга, свободное в многообразии всех метабелевых колец характеристики 2. Как и раньше, образующие свободных колец будем обозначать элементами множества (77).

Тождество (73) выводимо из множества тождеств (74) тогда и только тогда, когда оно выполняется в многообразии $\mathfrak{Y}_2'''$. Выполнимость тождества (73) в многообразии $\mathfrak{Y}_2'''$ равносильна выполнимости этого тождества в кольце $F\mathfrak{Y}_2'''$. Тождество (73) истинно в кольце $F\mathfrak{Y}_2'''$ тогда и только тогда, когда в этом кольце выполняется равенство $A(e, e)B^k(e)C(e) = 0$. Истинность равенства $A(e, e)B^k(e)C(e) = 0$ в кольце $F\mathfrak{Y}_2'''$ равносильна тому, что в кольце F'' выполняется равенство вида

$$A(e, e)B^k(e)C(e) = \sum_{i,j} u_{i1}h_ju_{i2},$$

где для любого натурального числа j многочлен h_j получен из одного из многочленов $A(x, x)B^n(x)C(x)$, где $n \in \mathbb{N} \setminus \{k\}$, подстановкой конкретных элементов кольца F'' вместо переменных. Поскольку в одночлен $A(e, e)B^k(e)C(e)$ входит только образующий e , без ограничения общности в силу свободы кольца F'' можно считать, что многочлен (11) тоже зависит только от e . В силу дистрибутивности можно считать, что все многочлены, входящие в произведение (9), кроме разве лишь h_j , являются одночленами. Пусть $W = \{A(e, e)B^n(e)C(e) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

ЛЕММА 6. *Сумма (11) представима в виде $f_1 + f_2$, где f_1 – многочлен, который сам может быть представлен в виде (11), каждый одночлен многочлена f_1 принадлежит множеству W , а f_2 – многочлен, ни один одночлен которого не принадлежит множеству W .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем индукцией по числу одночленов в сумме (11). Допустим, что число d одночленов в сумме (11) равно нулю. Тогда утверждение очевидно. Допустим, что утверждение справедливо для некоторого числа одночленов d . Покажем, что оно верно и для $d+1$. Пусть число одночленов в сумме (11) не больше $d+1$. Тогда выполняется равенство (12). Так как число одночленов в сумме (13) не превосходит d , то по предположению индукции имеет место равенство (14). Рассмотрим многочлен (15). В силу метабелевости кольца F'' получаем, что либо $h_1 = 0$, либо $h_1 = A(e, e)B^m(e)C(e)$, либо

$$h_1 = A(e, e)B^m(e)C(e) + A(y, e)B^m(e)C(e) + A(e, y)B^m(e)C(e),$$

где y — многочлен, отличный от нуля и не содержащий одночлена e . Поскольку многочлен y входит в многочлены (16) и (17) линейно, в силу дистрибутивности y можно считать одночленом. При доказательстве леммы 3 мы показали, что имеют место соотношения (18) и (19). Поэтому требуемым представлением будет представление (23) или (24). Лемма 6 доказана.

Завершить доказательство предложения теперь можно несложными рассуждениями по схеме доказательства леммы 4.

Существование многообразий ассоциативных и лиевых колец, не имеющих конечного базиса тождеств, а также результаты, полученные в статье, делают естественными следующие два вопроса.

Вопрос 1. Существует ли многообразие ассоциативных (лиеых) колец, не обладающее независимым базисом?

Вопрос 2. Каждое ли многообразие колец является пересечением конечного числа независимо базисуемых многообразий?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.
- [2] Айзенштат А. Я. О покрытиях в решетке многообразий полугрупп // Современный анализ и геометрия. Ленинград, 1972. С. 3–11.
- [3] Мартынова Т. А. Группоид 0-приведенных многообразий полугрупп // Исследования по современной алгебре. Свердловск, 1979. С. 96–115.
- [4] Трахтман А. Н. Многообразие полугрупп без неприводимого базиса тождеств // Матем. заметки. 1977. Т. 21. № 6. С. 865–872.
- [5] Pollak G. Some lattices of varieties containing elements without cover // Noncommutative Structures in Algebra and Geometric Combinatorics. Rome, 1981. P. 91–96.
- [6] Сапир М. В. Малые, кроссовы и предельные многообразия полугрупп // 16 Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы докладов. Ч. 2. Ленинград, 1981. С. 142–143.
- [7] Трахтман А. Н. Шестиэлементная полугруппа, порождающая многообразие с континуумом подмногообразий // Алгебраические системы и их многообразия. Свердловск, 1988. С. 138–143.
- [8] Клейман Е. И. Об условии покрытия в решетке многообразий инверсных полугрупп // Исследования алгебраических систем по свойствам их подсистем. Свердловск, 1980. С. 76–91.
- [9] Клейман Ю. Г. О некоторых вопросах теории многообразий групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 1. С. 37–74.
- [10] Шеврин Л. Н., Волков М. В. Тождества полугрупп // Изв. вузов. Матем. 1985. № 11. С. 3–47.