Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Т. Филиппов, Стандартные обертывающие коммутативных тройных систем, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 5, 733–739

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm536>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 02:36:25

УДК 512.554

СТАНДАРТНЫЕ ОБЕРТЫВАЮЩИЕ КОММУТАТИВНЫХ ТРОЙНЫХ СИСТЕМ

В. Т. Филиппов

При некоторых ограничениях на характеристику поля Φ определяется коммутативная стандартная обертывающая q -алгебра B коммутативной тройной системы A над Φ и доказывается, что

- 1) если алгебра B проста, то система A проста;
- 2) если система A проста, то B либо проста, либо разлагается в прямую сумму (как идеалов) двух изоморфных простых подалгебр.

Библиография: 3 названия.

Тройной системой над полем Φ называется линейное пространство над Φ с трилинейной операцией.

В [1] показано, что произвольные коммутативная и антикоммутативная тройные системы над полем Φ характеристики $p \neq 3$ могут быть вложены соответственно в некоторые коммутативную и антикоммутативную (линейные) алгебры так, чтобы заданная на тройной системе операция $[x, y, z]$ совпадала с якобианом

$$J(x, y, z) = (xy)z + (zx)y + (yz)x,$$

определенным в соответствующей алгебре (которая в [1] называлась *стандартной β -обертывающей алгеброй системы*). В коммутативном случае в эту алгебру вкладывается и йорданова алгебра правых умножений системы, т.е. алгебра, порожденная всеми правыми умножениями системы относительно операции $X \circ Y = XY + YX$.

Если $p \neq 2$, то в теории йордановых алгебр чаще используется операция

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$$

(см., например, [2]). Чтобы охватить и этот случай, в настоящей работе для произвольной коммутативной системы A вводится понятие стандартной обертывающей q -алгебры B , где пространство алгебры B является прямой суммой пространства системы A и пространства йордановой алгебры $R^{(+)}(A)$, порожденной всеми правыми умножениями системы A относительно операции

$$X \circ Y = q(XY + YX),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00499.

а q – произвольный ненулевой элемент Φ . При этом сохраняется связь между трилинейной операцией системы A и якобианом ее стандартной обертывающей.

В [1] доказано, что простота антикоммутативной тройной системы равносильна простоте ее стандартной β -обертывающей алгебры. В настоящей работе показывается, что если $p \neq 2, 3$, то с одной стороны, простота коммутативной тройной системы вытекает из простоты ее стандартной обертывающей q -алгебры B , а с другой, если система A проста, то B либо является простой, либо разлагается в прямую сумму двух изоморфных идеалов, которые являются простыми алгебрами.

Заметим, что результаты данной работы аналогичны результатам о стандартных обертывающих простых лиевых тройных системах (см., например, [3]).

Тройная система над полем Φ называется *коммутативной*, если в ней выполняются тождества

$$[x, y, z] = [y, x, z], \quad [x, y, z] = [x, z, y]. \quad (1)$$

Отсюда следует, что операция $[x, y, z]$ симметрична относительно всех перестановок x, y, z .

Пусть A – коммутативная тройная система над полем Φ с трилинейной операцией $[x, y, z]$, E – алгебра эндоморфизмов пространства A . Эндоморфизм $R(y, z): x \rightarrow [x, y, z]$ называется *правым умножением системы A* , определенным элементами $y, z \in A$.

В силу (1) для любых $y, z \in A$ выполняется равенство

$$R(y, z) = R(z, y). \quad (2)$$

В дальнейшем, коммутативность системы A и равенство (2) будем использовать без упоминания.

Пусть $q \in \Phi$, $q \neq 0$. Если введем на пространстве E новое умножение

$$X \circ Y = q(XY + YX)$$

для любых $X, Y \in E$, то легко видеть, что алгебра $E^{(+)}$ относительно этого умножения является йордановой алгеброй. Через $R^{(+)}(A)$ обозначим подалгебру алгебры $E^{(+)}$, порожденную (относительно операции $X \circ Y$) всеми правыми умножениями системы A .

Далее, если не оговорено противное, будем предполагать, что Φ – поле характеристики $p \neq 2, 3$, q – фиксированной ненулевой элемент поля Φ .

Пусть $\mathfrak{N}$ – подалгебра $E^{(+)}$, содержащая $R^{(+)}(A)$, $B = A \dot{+} \mathfrak{N}$ – прямая сумма пространств A и $\mathfrak{N}$ над Φ . Определим на B умножение $(\cdot)$, положив для любых $x, y \in A$, $X, Y \in \mathfrak{N}$

$$(x + X) \cdot (y + Y) = xY + yX + \frac{1}{3}R(x, y) + X \circ Y. \quad (3)$$

Относительно операции $(\cdot)$ пространство B становится коммутативной алгеброй над Φ такой, что

$$A \cdot A \subseteq \mathfrak{N}, \quad A \cdot \mathfrak{N} \subseteq A, \quad \mathfrak{N} \cdot A \subseteq A, \quad \mathfrak{N} \cdot \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}.$$

Равенство (3) равносильно равенствам

$$x \cdot y = \frac{1}{3}R(x, y), \quad x \cdot Y = Y \cdot x = xY, \quad X \cdot Y = X \circ Y. \quad (4)$$

Алгебру $B = A \dot{+} \mathfrak{N}$ назовем *обертывающей q -алгеброй* системы A . Если $\mathfrak{N} = R^{(+)}(A)$, то обертывающую q -алгебру назовем *стандартной*.

В силу (4) для любых $x, y \in A$ имеем равенство $R(x, y) = 3x \cdot y$. Отсюда и из определения алгебры $R^{(+)}(A)$ следует, что стандартная обертывающая q -алгебра B системы A порождается всеми элементами системы A .

На линейном пространстве произвольной коммутативной алгебры C над Φ введем операцию $\{x, y, z\}$, положив $\{x, y, z\} = J(x, y, z)$, где $J(x, y, z) = (xy)z + (zx)y + (yz)x$ – якобиан элементов x, y, z . Эта операция трилинейна и задает на C коммутативную тройную систему, которую назовем *ассоциированной* и обозначим через $L(C)$.

Доказательства следующих предложения, лемм 1 и 2, аналогичные доказательствам соответствующих утверждений из [1], мы приведем в целях замкнутости изложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если Φ – поле характеристики $p \neq 3$ и $q \in \Phi$, то всякая коммутативная тройная система над Φ является подсистемой ассоциированной коммутативной тройной системы $L(B)$ любой своей обертывающей q -алгебры B .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (4) и коммутативности системы A для любых $x, y, z \in A$ в B имеем равенство

$$\begin{aligned} J(x, y, z) &= (x \cdot y) \cdot z + (z \cdot x) \cdot y + (y \cdot z) \cdot x \\ &= \frac{1}{3}(R(x, y) \cdot z + R(z, x) \cdot y + R(y, z) \cdot x) \\ &= \frac{1}{3}([z, x, y] + [y, z, x] + [x, y, z]) = [x, y, z]. \end{aligned}$$

Следовательно, на A операция $[x, y, z]$ совпадает с операцией $\{x, y, z\}$.

Предложение доказано.

Пусть $B = A \dot{+} R^{(+)}(A)$ – стандартная обертывающая q -алгебра системы A . Если I – идеал системы A , то через $R(I, A)$ обозначим идеал алгебры $R^{(+)}(A)$, порожденный всеми правыми умножениями вида $R(i, x)$, где $i \in I, x \in A$ (относительно операции $X \circ Y = q(XY + YX)$).

ЛЕММА 1. *Если I – идеал системы A , то $C = I \dot{+} R(I, A)$ – идеал ее стандартной обертывающей q -алгебры $B = A \dot{+} R^{(+)}(A)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (4) и того, что $I \triangleleft A$, для любых $i \in I, x \in A, W \in R(I, A), X \in R^{(+)}(A)$ имеем

$$\begin{aligned} i \cdot x &= \frac{1}{3}R(i, x) \in R(I, A), \quad i \cdot X = iX \in I, \\ W \cdot x &= xW \in I, \quad W \cdot X = W \circ X \in R(I, A). \end{aligned}$$

Отсюда и из коммутативности B следует включение $C \cdot B \subseteq C$, т.е. $C \triangleleft B$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Если I – идеал стандартной обертывающей q -алгебры B системы A , то его проекция I_A на пространство A является идеалом системы A .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что I_A – подпространство A . Поэтому достаточно доказать, что $[v, x, y] \in I_A$ для любых $v \in I_A, x, y \in A$. Так как $v \in I_A$, то существует $V \in R^{(+)}(A)$ такой, что $c = v + V \in I$. Положим $w = [v, x, y], W = V \cdot R(x, y)$. В силу (4)

$$\begin{aligned} w + W &= [v, x, y] + V \cdot R(x, y) = v \cdot R(x, y) + V \cdot R(x, y) \\ &= (v + V) \cdot R(x, y) = c \cdot R(x, y) = 3c \cdot (x \cdot y). \end{aligned}$$

Поскольку $c \in I$, то $c \cdot (x \cdot y) \in I$ и, следовательно, из последнего равенства следует включение $w + W \in I$, и так как $w \in A, W \in R^{(+)}(A)$, то $w = [v, x, y] \in I_A, [I_A, A, A] \subseteq I_A$, т.е. $I_A \triangleleft A$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Если B – стандартная обертывающая q -алгебра системы A , то отображение σ алгебры B в себя такое, что $\sigma(a) = -x + X$ для любого $a = x + X \in B$, где $x \in A, X \in R^{(+)}(A)$, является инволютивным автоморфизмом алгебры B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что отображение σ взаимно однозначно, линейно и удовлетворяет равенству $\sigma^2 = \varepsilon$, где ε – тождественное отображение. Поэтому для доказательства леммы достаточно проверить, что $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$ для любых $a, b \in B, a = x + X, b = y + Y$, где $x, y \in A, X, Y \in R^{(+)}(A)$. В силу (4) $x \cdot Y + X \cdot y \in A, x \cdot y + X \cdot Y \in R^{(+)}(A)$. Поэтому по определению σ и (4)

$$\begin{aligned} \sigma(a \cdot b) &= \sigma[(x + X) \cdot (y + Y)] = \sigma(x \cdot Y + X \cdot y) + \sigma(x \cdot y + X \cdot Y) \\ &= -(x \cdot Y + X \cdot y) + x \cdot y + X \cdot Y = -x \cdot (-y + Y) + X \cdot (-y + Y) \\ &= (-x + X) \cdot (-y + Y) = \sigma(a) \cdot \sigma(b). \end{aligned}$$

Следовательно, σ – инволютивный автоморфизм алгебры A .

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Если система A проста, I – ненулевой идеал ее стандартной обертывающей q -алгебры B , то

$$I_A = A, \quad (5)$$

$$I_{R^{(+)}(A)} = R^{(+)}(A). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 I_A – идеал системы A и, следовательно, в силу простоты A либо $I_A = 0$, либо $I_A = A$.

Если $I_A = 0$, то $I \subseteq R^{(+)}(A)$ и в силу (4) $A \cdot I \subseteq A \cdot R^{(+)}(A) \subseteq A$. Следовательно, $AI = A \cdot I \subseteq A \cap I \subseteq I_A = 0$. Поэтому элементы I действуют тривиально на A , т.е. являются нулевыми эндоморфизмами пространства A . Следовательно, $I = 0$, что противоречит условию леммы. Поэтому выполняется равенство (5).

Легко видеть, что $I_{R^{(+)}(A)}$ – подпространство $R^{(+)}(A)$. Докажем, что для любых $x, y \in A$

$$R(x, y) \in I_{R^{(+)}(A)}. \quad (7)$$

Действительно в силу (5) для любого $y \in A$ существует $Y \in R^{(+)}(A)$ такой, что $d = y + Y \in I$. Но тогда в силу (4) для любого $x \in A$ имеем

$$3xY + R(x, y) = 3x \cdot y + 3x \cdot Y = 3x \cdot (y + Y) \in I.$$

Отсюда следует включение (7).

Если X, Y – произвольные элементы из $I_{R^{(+)}(A)}$, то существуют $x, y \in A$ такие, что $x + X, y + Y \in I$. Отсюда в силу (3)

$$(xY + yX) + \left(\frac{1}{3}R(x, y) + X \cdot Y\right) = (x + X) \cdot (y + Y) \in I. \quad (8)$$

Поскольку $xY + yX \in A$, $\frac{1}{3}R(x, y) + X \cdot Y \in R^{(+)}(A)$, то из (8) следует включение

$$\frac{1}{3}R(x, y) + X \cdot Y \in I_{R^{(+)}(A)}. \quad (9)$$

Так как $I_{R^{(+)}(A)}$ – подпространство пространства $R^{(+)}(A)$, то из (7) и (9) следует включение $X \cdot Y \in I_{R^{(+)}(A)}$. Следовательно, $I_{R^{(+)}(A)}$ – подалгебра алгебры $R^{(+)}(A)$. Но поскольку в силу (7) $I_{R^{(+)}(A)}$ содержит все правые умножения $R(x, y)$, которые являются порождающими алгебры $R^{(+)}(A)$, то выполняется равенство (6).

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Пусть A – коммутативная тройная система над полем Φ характеристики $p \neq 2, 3$, B – ее стандартная обертывающая q -алгебра, где q – ненулевой элемент поля Φ . Система A проста, если проста алгебра B . Если система A проста, то

- 1) либо алгебра B проста;
- 2) либо $B = I_1 \oplus I_2$ – прямая сумма (как идеалов) простых изоморфных алгебр I_1 и I_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть стандартная обертывающая q -алгебра B системы A проста. Если I – произвольный ненулевой идеал системы A , то по лемме 1 $C = I + R(I, A)$ – идеал алгебры B и в силу простоты B имеем равенство $C = B$. Но тогда $I = A$ и, следовательно, система A также проста.

Пусть система A проста. Если алгебра B проста, то доказывать нечего. Если B не является простой, то найдется ненулевой идеал I алгебры B такой, что $B \neq I$. Рассмотрим инволютивный автоморфизм σ алгебры B , определенный в формулировке леммы 3. Образ $\sigma(I)$ идеала I также является идеалом алгебры B . Следовательно, пересечение $C = I \cap \sigma(I)$ – идеал B .

Докажем, что $C = 0$. Очевидно, что $\sigma(C) \subseteq C$. Поэтому по определению отображения σ для любого $c = x + X \in C$ имеем $\sigma(c) = -x + X \in C$. Отсюда $x = \frac{1}{2}(c - \sigma(c)) \in C$, т.е. $C_A \subseteq C$. Предположим, что $C \neq 0$. Тогда по лемме 4 $C_A = A$. Следовательно, $A \subseteq C$. Так как алгебра B порождается элементами A , из последнего включения имеем включение $B \subseteq C$. Отсюда и из включения $C \subseteq I$ следует равенство $B = I$, что противоречит выбору идеала I . Следовательно, $C = 0$.

Докажем, что $B = I \oplus \sigma(I)$. В силу (5) для любого $x \in A$ существует $X \in R^{(+)}(A)$ такой, что $a = x + X \in I$. Но тогда $\sigma(a) = -x + X \in \sigma(I)$. Следовательно,

$$x = \frac{1}{2}(a - \sigma(a)) \in I + \sigma(I), \quad A \subseteq I + \sigma(I).$$

Аналогично, в силу (6) для любого $Y \in R^{(+)}(A)$ существует $y \in A$ такой, что $b = y + Y \in I$. Тогда

$$Y = \frac{1}{2}(b + \sigma(b)) \in I + \sigma(I), \quad R^{(+)}(A) \subseteq I + \sigma(I).$$

Следовательно, $B = A \dot{+} R^{(+)}(A) = I + \sigma(I)$ и поскольку $I \cap \sigma(I) = 0$, то $B = I \oplus \sigma(I)$.

Пусть теперь K – произвольный ненулевой идеал I . Так как $B = I \oplus \sigma(I)$, то K – идеал алгебры B . Следовательно, $B = K \oplus \sigma(K)$ и поскольку $K \subseteq I$, то $\sigma(K) \subseteq \sigma(I)$. Но тогда любой элемент $i \in I$ представляется в виде $i = k_1 + \sigma(k_2)$, где $k_1, k_2 \in K$. Отсюда и из включений $K \subseteq I$, $\sigma(K) \subseteq \sigma(I)$ имеем $i - k_1 = \sigma(k_2) \in I \cap \sigma(I) = 0$. Следовательно, $i = k_1 \in K$, $I \subseteq K$. Поэтому $I = K$, I – простая алгебра. Положив $I = I_1$, $\sigma(I) = I_2$, получим разложение $B = I_1 \oplus I_2$.

Теорема доказана.

В заключение рассмотрим примеры стандартных обертывающих q -алгебр простых коммутативных тройных систем для наиболее интересного случая $q = 1/2$.

ПРИМЕР 1. Пусть A_1 – 1-мерная коммутативная тройная система над полем Φ характеристики $p \neq 2, 3$ с базисным элементом e и умножением $[e, e, e] = 3e$, B_1 – ее стандартная обертывающая $\frac{1}{2}$ -алгебра. Нетрудно проверить, что алгебра $R^{(+)}(A_1)$ также 1-мерна, и если $f_{11} = R(e, e)$ – базисный элемент $R^{(+)}(A_1)$, то $f_{11} \circ f_{11} = 3f_{11}$. Алгебра $B_1 = A_1 \dot{+} R^{(+)}(A_1)$ является 2-мерной коммутативной алгеброй с базисом e, f_{11} и таблицей умножения

$$e \cdot e = \frac{1}{3}f_{11}, \quad e \cdot f_{11} = f_{11} \cdot e = 3e, \quad f_{11} \cdot f_{11} = 3f_{11}.$$

Легко видеть, что 1-мерные подпространства $I_1 = \langle -3e + f_{11} \rangle$ и $I_2 = \langle 3e + f_{11} \rangle$ являются идеалами алгебры B_1 , $I_1 \cap I_2 = 0$ и $B_1 = I_1 \oplus I_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно показать, что если $q \neq 1/2$, то стандартная обертывающая q -алгебра системы A_1 проста.

ПРИМЕР 2. Пусть A_2 – 2-мерная коммутативная тройная система над полем Φ характеристики $p \neq 2, 3$ с базисом e_1, e_2 и таблицей умножения базисных элементов (с учетом коммутативности)

$$[e_1, e_1, e_1] = 0, \quad [e_1, e_1, e_2] = e_2, \quad [e_1, e_2, e_2] = e_1, \quad [e_2, e_2, e_2] = 0.$$

Легко показать, что система A_2 проста. Положим

$$f_{11} = R(e_1, e_1), \quad f_{12} = R(e_1, e_2), \quad f_{22} = R(e_2, e_2).$$

Непосредственно проверяется, что f_{11}, f_{12}, f_{22} линейно независимы и

$$f_{11} \circ f_{11} = f_{11}, \quad f_{11} \circ f_{12} = \frac{1}{2}f_{12}, \quad f_{22} \circ f_{22} = f_{22}.$$

Отсюда следует, что $\dim R^{(+)}(A_2) = 3$, т.е. стандартная обертывающая $\frac{1}{2}$ -алгебра B_2 является 5-мерной коммутативной алгеброй. Алгебра B_2 имеет базис $e_1, e_2, f_{11}, f_{12}, f_{22}$ и таблицу умножения (с учетом коммутативности)

$$\begin{aligned} e_1 \cdot f_{11} &= 0, & e_1 \cdot f_{12} &= e_2, & e_1 \cdot f_{22} &= e_1, \\ e_2 \cdot f_{11} &= e_2, & e_2 \cdot f_{12} &= e_1, & e_2 \cdot f_{22} &= 0, \\ e_1 \cdot e_1 &= \frac{1}{3}f_{11}, & e_1 \cdot e_2 &= \frac{1}{3}f_{12}, & e_2 \cdot e_2 &= \frac{1}{3}f_{22}, \\ f_{11} \cdot f_{11} &= f_{11}, & f_{11} \cdot f_{12} &= \frac{1}{2}f_{12}, & f_{12} \cdot f_{22} &= \frac{1}{2}f_{12}, & f_{22} \cdot f_{22} &= f_{22}. \end{aligned}$$

Поскольку размерность алгебры B_2 нечетна, то B_2 не может разлагаться в прямую сумму двух изоморфных подалгебр и, следовательно, проста.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Филиппов В. Т. Обертывающие тройных систем и алгебр // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 1. С. 67–81.
- [2] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
- [3] Lister W. G. A structure theory of Lie triple systems // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. V. 72. № 2. P. 217–242.

Институт математики СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: filipp@math.nsc.ru

Поступило
14.03.2000