Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Чуркин, Точно решаемая задача для стохастического уравнения Шредингера в двумерном случае, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 5, 740–750

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm537>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 11:35:51

УДК 519

ТОЧНО РЕШАЕМАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

А. В. Чуркин

В статье построено точное решение стохастического уравнения Шрёдингера для модели квантового интерферометрического детектора гравитационных волн, вычислена оценка влияния воздействия измерительного прибора на получаемую информацию об эволюции квантовой системы и найдена автокорреляционная функция детектируемого сигнала. Обсуждается влияние характеристик процесса измерения на оптимальный выбор длительности измерения частоты гравитационной волны корреляционным методом.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. В конце 80-х годов для описания процесса измерения состояния квантовой системы в гильбертовом пространстве рядом авторов было предложено [1]–[7] стохастическое уравнение Шрёдингера, которое имеет вид

$$d\Psi(t) = \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} - \frac{\lambda}{4} (\hat{A} - a(t))^2 \right) \Psi(t) dt + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (\hat{A} - a(t)) \Psi(t) dQ(t), \quad (1)$$

где $\hat{H}$ – гамильтониан системы, $\hat{A}$ – оператор наблюдаемой, $a(t) = (\Psi, \hat{A}\Psi)$ – среднее значение наблюдаемой, λ – коэффициент связи квантовой системы с измерительным прибором, $dQ(t)$ – винеровский процесс. В настоящей статье мы воспользуемся уравнением (1) для оценки влияния процедуры измерения при детектировании гравитационных волн и обсудим некоторые качественные следствия.

Одним из возможных методов реализации детектора гравитационных волн является лазерный интерферометр, измеряющий с высокой точностью расстояние между двумя удаленными осцилляторами [7], [8]. В случае, если оба осциллятора лежат в плоскости фронта гравитационной волны, гамильтониан системы состоит из гамильтонианов двух невзаимодействующих квантовых осцилляторов, возмущенных периодическим потенциалом [9]:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\frac{\hbar^2}{2M} (\Delta_{x_1} + \Delta_{x_2}) + \frac{M\omega_0^2}{2} (|x_1 - \xi_1(t)|^2 + |x_2 - \xi_2(t)|^2) \\ & + GM \left(x_1 \cos(\omega_g t) + x_2 \cos\left(\omega_g t + \frac{\pi}{2}\right) \right), \end{aligned} \quad (2)$$

Работа частично поддержана грантами ИНТАС № 99-00545 и EPSRC № GR/M66196.

где x_1, x_2 – координаты осцилляторов, M – масса осциллятора, ω_0 – собственная частота осциллятора, G – коэффициент, зависящий от амплитуды приходящей гравитационной волны и расстояния между осцилляторами, ω_g – ожидаемая частота гравитационной волны, $\xi_k(t)$ – случайные изменения позиции осцилляторов, характеризующие воздействие сейсмических шумов. В статье рассматривается точное решение уравнения (1) для специального выбора наблюдаемой $\hat{A}$. Показано, что наличие стохастических членов в уравнении (1) ведет к ограничениям на длительность измерения частоты гравитационных волн.

2. Основной результат. Относительные смещения массивных элементов осцилляторов, вызванные приходящей гравитационной волной, регистрируются с помощью интерферометра, который формирует на входе фотодетектора наблюдаемую

$$\hat{I} = \hat{\lambda} |\exp\{i\omega_0 \hat{A}/c\} - I|^2,$$

где $\hat{A} = \hat{x}_1 - \hat{x}_2$, $\hat{\lambda}$ – оператор числа фотонов, а $\hat{x}_k$ – операторы координат осцилляторов. Выборочные значения оператора $\hat{I}(t) = U_t^* \hat{I} U_t$ наблюдаются на выходе фотодетектора, где $U_t = \exp\{it\hat{H}\}$. Однако, техника построения точного решения стохастического уравнения Шрёдингера (1) для наблюдаемой $\hat{I}$ в настоящее время не известна. В нашей статье построено точное решение задачи Коши для уравнения (1) с гауссовым начальным условием

$$\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{M\omega_0}{\hbar\pi}} \exp\left(-\frac{M\omega_0|x|^2}{2\hbar}\right), \quad (3)$$

а в качестве оператора наблюдаемой вместо $\hat{I}$ мы выбираем величину, пропорциональную разности фаз лучей лазера, приходящих на фотодетектор: $\hat{A} = \hat{x}_1 - \hat{x}_2$, предполагая, что возможно экспериментальное наблюдение разности фаз.

ТЕОРЕМА 1. *Решение задачи Коши для стохастического уравнения Шрёдингера (1) с начальным условием (3) имеет вид $\Psi(x, t) = N(t)e^{S(x, t)}$, где*

$$S(x, t) = \sum_{k=1,2} \left(\frac{R_k(t)}{2} (x_k - q_k(t))^2 + i \frac{p_1(t)x_1}{\hbar} \right) + r(t)(x_1 - q_1(t))(x_2 - q_2(t)), \quad (4)$$

$x \in \mathbb{R}^2$, а величины $R_k(t)$, $r(t)$, $p_k(t)$, $q_k(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dR_k}{dt} = \frac{i\hbar}{M} R_k^2 + \frac{i\hbar}{M} r^2 - \frac{iM\omega_0^2}{\hbar} - \lambda, \quad (5)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{i\hbar}{M} r(R_1 + R_2) + \lambda, \quad (6)$$

$$dq_k = \frac{p_k}{M} dt + \frac{(-1)^k}{\text{Re}(R_k(t) - r(t))} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} dQ, \quad (7)$$

$$dp_k = -M(\omega_0^2(q_k - \xi_k(t)) + G \cos(\omega_g t + \varphi_k)) dt + (-1)^k \hbar \frac{\text{Im}(R_k(t) - r(t))}{\text{Re}(R_k(t) - r(t))} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} dQ \quad (8)$$

с $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = -\pi/2$ и начальными условиями

$$R_k(0) = -\frac{M\omega_0}{\hbar} \quad r(0) = 0, \quad q(0) = 0, \quad p(0) = 0.$$

При этом зависимость от времени коэффициента $N(t)$ определяется по формуле

$$N(t) = \sqrt{\frac{M\omega_0}{\hbar\pi}} \exp \int_0^t d\tau \left(\frac{R(\tau)}{4} (\eta_1 - \eta_2)^2 + \frac{R(\tau) + r(\tau)}{2} \eta_1 \eta_2 - \frac{i\hbar R(\tau)}{M} - \frac{i}{\hbar} \left(\frac{|p(\tau)|^2}{2M} - \frac{M\omega_0^2}{2} (|q(\tau)|^2 + |\xi(\tau)|^2) \right) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы подставим функцию (4) в уравнение (1) с учетом правил дифференцирования Ито [10]. Так как уравнение (1) включает в себя стохастический член $\sqrt{\lambda/2} \hat{A} \Psi dQ$, то величины $N(t)$, $R_k(t)$, $r(t)$, $p_k(t)$, $q_k(t)$ также могут включать в себя стохастическую часть, что необходимо учитывать при их дифференцировании по времени. Пусть в общем случае

$$\begin{aligned} dN(t) &= \dot{N} dt + n dQ, & dR_k(t) &= \dot{R}_k dt + u_k dQ, & dr(t) &= \dot{r} dt + v dQ, \\ dq_k(t) &= \dot{q}_k dt + \eta_k dQ, & dp_k(t) &= \dot{p}_k dt + \rho_k dQ. \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} (dN(t))^2 &= n^2 dt, & (dR_k(t))^2 &= u_k^2 dt, & (dr(t))^2 &= v^2 dt, \\ (dq_k(t))^2 &= \eta_k^2 dt, & (dp_k(t))^2 &= \rho_k^2 dt, \end{aligned} \quad (10)$$

а для дифференциала волновой функции справедливо следующее выражение: если $\varphi(x, t) = \exp\{S(x, t)\}$ со стохастическим членом $S(x, t)$, то формула Ито для стохастического дифференциала имеет вид

$$d\Psi(x, t) = dN(t)\varphi(x, t) + N(t)d\varphi(x, t) + dN(t)d\varphi(x, t).$$

Подставим теперь функцию (4) в уравнение (1) с учетом соотношений (9) и (10) и приравняем слагаемые при одинаковых степенях x_k . Так как гамильтониан (2) представляет собой квадратичную форму по x_k , то слагаемые при x_k^3 и x_k^4 , получаемые после дифференцирования функции (4) по времени, тождественно равны нулю. Следовательно, $u_k = v = 0$, т.е. выражения для R_k и r и связанная с ними дисперсия волновой функции не содержат стохастической части. Таким образом, получаем следующую систему уравнений (для $k = 1, 2; j \neq k$), содержащую коэффициенты при соответствующих членах x_k^n , $x_k^n dt$ и $x_k^n dQ_t$ ($n = 0, 1, 2$) в правой части уравнения (1) (с подстановками (2) и (4)) и в правой части формулы Ито для стохастического дифференциала.

Коэффициент при x_k^2 :

$$\begin{aligned} &\dot{R}_k + \left(R_k^2 \eta_k^2 - \frac{\rho_k^2}{\hbar^2} + r^2 \eta_j^2 - 2 \frac{k}{\hbar} R_k \eta_k \rho_k + 2 R_k r \eta_k \eta_j - 2 \frac{k}{\hbar} r \eta_j \rho_k \right) \\ &= \frac{i\hbar}{M} R_k^2 + \frac{i\hbar}{M} r^2 - \frac{iM\omega_0^2}{\hbar} - \frac{\lambda}{2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Коэффициент при $x_1 x_2$:

$$\begin{aligned} & \dot{r} + \left(R_1 R_2 \eta_1 \eta_2 + R_1 r \eta_1^2 + R_2 r \eta_2^2 + r^2 \eta_1 \eta_2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{i}{\hbar} R_1 \eta_1 \rho_2 - \frac{i}{\hbar} R_2 \eta_2 \rho_1 - \frac{i}{\hbar} r \eta_1 \rho_1 - \frac{i}{\hbar} r \eta_2 \rho_2 - \frac{\rho_1 \rho_2}{\hbar^2} \right) = \frac{i\hbar}{M} (R_1 + R_2) r + \frac{\lambda}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Коэффициент при $x_k dt$:

$$\begin{aligned} & -\dot{R}_k q_k(t) - R_k \dot{q}_k(t) + \frac{i}{\hbar} \dot{p}_k(t) - \dot{r} q_j(t) - r \dot{q}_j(t) \\ & + \left(\frac{i}{\hbar} R_k q_k(t) \eta_k \rho_k + \frac{i}{\hbar} r q_j(t) \eta_k \rho_k + \frac{i}{\hbar} r q_k(t) \eta_j \rho_k + \frac{i}{\hbar} R_j q_j(t) \eta_j \rho_k \right. \\ & \quad - r^2 \eta_j^2 q_k(t) - r^2 \eta_k \eta_j q_j(t) - R_k^2 q_k(t) \eta_k^2 - R_k R_j q_j(t) \eta_k \eta_j - r R_k q_j(t) \eta_k^2 \\ & \quad \left. - R_j r q_j(t) \eta_j^2 - 2 R_k r q_k(t) \eta_k \eta_j \right) + \frac{n}{N(t)} \left(-R_k \eta_k + \frac{i}{\hbar} \rho_k - r \eta_j \right) \\ & = -\frac{i\hbar}{M} \left(R_k^2 q_k(t) + r^2 q_j(t) + r q_j(t) (R_k + R_j) - \frac{i}{\hbar} R_k p_k(t) - \frac{i}{\hbar} r p_j(t) \right) \\ & \quad + \frac{i}{\hbar} M \xi_k(t) \omega_0^2 - \frac{i}{\hbar} \cos(\omega_g t + \varphi_k) + (-1)^{k-1} \frac{\lambda}{2} a(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Коэффициент при $x_k dQ$:

$$-R_k \eta_k + \frac{i}{\hbar} \rho_k - r \eta_j = (-1)^{k-1} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}. \quad (14)$$

Коэффициент при dt :

$$\begin{aligned} & \frac{\dot{N}(t)}{N(t)} + \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\dot{R}_k}{2} q_k(t)^2 + R_k q_k(t) \dot{q}_k(t) \right) + \dot{r} q_1(t) q_2(t) + r \dot{q}_1(t) q_2(t) + r \dot{q}_2(t) q_1(t) \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^2 (R_k \eta_k^2 - R_k^2 \eta_k^2 q_k^2(t)) + r^2 \eta_1^2 q_2^2(t) + r^2 \eta_2^2 q_1^2(t) + r^2 \eta_1 \eta_2 q_1(t) q_2(t) \right. \\ & \quad + 2r \eta_1 \eta_2 + 2r R_1 q_1(t) q_2(t) \eta_1^2 + 2r R_2 q_1(t) q_2(t) \eta_2^2 + 2r R_2 q_2^2(t) \eta_1 \eta_2 + 2r R_1 q_1^2(t) \eta_1 \eta_2 \\ & \quad \left. + 2R_1 R_2 q_1(t) q_2(t) \eta_1 \eta_2 + \frac{n}{N(t)} \sum_{k=1}^2 (R_k q_k(t) \eta_k + r \eta_k q_j(t)) \right\} \\ & = \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{i\hbar}{2M} \left(R_k^2 q_k^2(t) + r^2 q_k^2(t) - \frac{p_k^2(t)}{\hbar^2} + 2R_k r q_1(t) q_2(t) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{2i}{\hbar} R_k q_k(t) p_k(t) - \frac{2i}{\hbar} r q_j(t) p_k(t) + R_k \right) - \frac{i}{2\hbar} M \omega_0^2 \xi_k^2(t) \right\} - \frac{\lambda}{4} a^2(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Коэффициент при dQ :

$$nN(t)^{-1} + \sum_{k=1}^2 (R_k q_k(t) \eta_k + r \eta_k q_j(t)) = -\sqrt{\frac{\lambda}{2}} a(t). \quad (16)$$

С учетом (14) левые части уравнений (11), (12) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{R}_k + \left(R_k^2 \eta_k^2 - \frac{\rho_k^2}{\hbar^2} + r^2 \eta_j^2 - 2 \frac{i}{\hbar} R_k \eta_k \rho_k + 2 R_k r \eta_k \eta_j - 2 \frac{i}{\hbar} r \eta_j \rho_k \right) \\ = \dot{R}_k + \left(-R_k \eta_k + \frac{i}{\hbar} \rho_k - r \eta_j \right)^2 = \dot{R}_k + \frac{\lambda}{2}, \\ \dot{r} + \left(R_1 R_2 \eta_1 \eta_2 + R_1 r \eta_1^2 + R_2 r \eta_2^2 + r^2 \eta_1 \eta_2 \right. \\ \left. - \frac{i}{\hbar} R_1 \eta_1 \rho_2 - \frac{i}{\hbar} R_2 \eta_2 \rho_1 - \frac{i}{\hbar} r \eta_1 \rho_1 - \frac{i}{\hbar} r \eta_2 \rho_2 - \frac{\rho_1 \rho_2}{\hbar^2} \right) \\ = \dot{r} + \left(-R_1 \eta_1 + \frac{i}{\hbar} \rho_1 - r \eta_2 \right) \left(-R_2 \eta_2 + \frac{i}{\hbar} \rho_2 - r \eta_1 \right) = \dot{r} - \frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, функции R_k и r удовлетворяют системе Рикатти (5), (6).

Уравнения (13), (14) с учетом (16) позволяют записать стохастическую гамильтонову систему для средних значений разности координат $\Delta q(t) = q_1(t) - q_2(t)$ и моментов $\Delta p(t) = p_1(t) - p_2(t)$ исследуемой системы:

$$d(\Delta q) = \frac{\Delta p}{M} dt - \frac{2}{\operatorname{Re}(R(t) - r(t))} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} dQ, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} d(\Delta p) = - \left(M \omega_0^2 (\Delta q + \xi_1(t) - \xi_2(t)) + G M (\cos(\omega_g t) + \sin(\omega_g t)) \right) dt \\ + 2 \hbar \frac{\operatorname{Im}(R(t) - r(t))}{\operatorname{Re}(R(t) - r(t))} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} dQ, \end{aligned} \quad (18)$$

где $R(t) = R_1 = R_2$, $r(t) = r$. Заметим, что при $\lambda = 0$ уравнения (17), (18) представляют собой классическую гамильтонову систему для величин Δq , Δp и гамильтониана (2).

Из уравнений (17), (18) следует, что введенные в (9) величины η_k и ρ_k имеют вид

$$\eta_k = \frac{(-1)^k}{\operatorname{Re}(R(t) - r(t))} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}, \quad \rho_k = (-1)^k \hbar \frac{\operatorname{Im}(R(t) - r(t))}{\operatorname{Re}(R(t) - r(t))} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}. \quad (19)$$

Нормировочный коэффициент $N(t)$ в волновой функции (4) удовлетворяет уравнению (15), решение которого с учетом соотношений (16), а также систем (5), (6) и (17), (18) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} N(t) = \sqrt{\frac{M \omega_0}{\hbar \pi}} \exp \int_0^t d\tau \left\{ \frac{R(\tau)}{4} (\eta_1 - \eta_2)^2 + \frac{R(\tau) + r(\tau)}{2} \eta_1 \eta_2 - \frac{i \hbar R(\tau)}{M} \right. \\ \left. - \frac{i}{\hbar} \left(\frac{p_1^2(\tau) + p_2^2(\tau)}{2M} - \frac{M \omega_0^2}{2} (|q(\tau)|^2 + |\xi(\tau)|^2) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Одним из важных свойств решений уравнения типа (1), продемонстрированных в [11], [12], является стабилизация дисперсии волновой функции (4).

ТЕОРЕМА 2. При $\lambda > 0$, $t \rightarrow \infty$ функции $R_k(t)$ и $r(t)$ стабилизируются:

$$R(t) \rightarrow -\frac{M}{2\hbar}(\omega_0 + \Omega), \quad (21)$$

$$r(t) \rightarrow -\frac{M}{2\hbar}(\omega_0 - \Omega), \quad (22)$$

где $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - 2i\hbar\lambda/(M\omega_0^2)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решения системы уравнений Рикатти (5), (6) хорошо известны:

$$R(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{(R(0) + r(0))\omega_0 - i\frac{M\omega_0^2}{\hbar} \operatorname{tg} \omega_0 t}{\omega_0 - i\frac{\hbar}{M}(R(0) + r(0)) \operatorname{tg} \omega_0 t} + \frac{(R(0) - r(0))\Omega - i\frac{M\Omega_0^2}{\hbar} \operatorname{tg} \Omega t}{\Omega - i\frac{\hbar}{M}(R(0) - r(0)) \operatorname{tg} \Omega t} \right), \quad (23)$$

$$r(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{(R(0) + r(0))\omega_0 - i\frac{M\omega_0^2}{\hbar} \operatorname{tg} \omega_0 t}{\omega_0 - i\frac{\hbar}{M}(R(0) + r(0)) \operatorname{tg} \omega_0 t} - \frac{(R(0) - r(0))\Omega - i\frac{M\Omega_0^2}{\hbar} \operatorname{tg} \Omega t}{\Omega - i\frac{\hbar}{M}(R(0) - r(0)) \operatorname{tg} \Omega t} \right), \quad (24)$$

где $R(t) = R_1(t) = R_2(t)$, $R(0) = -M\omega_0/\hbar$, $r(0) = 0$. После подстановки начальных условий выражения (23) и (24) упрощаются:

$$R(t) = \frac{1}{2} \left(-\frac{M\omega_0}{\hbar} - \frac{M\omega_0}{\hbar} \frac{(\Omega + (i\omega_0 + 2\lambda\hbar/(M\omega_0)) \operatorname{tg} \Omega t)}{(\Omega + i\omega_0 \operatorname{tg} \Omega t)} \right) = -\frac{M\omega_0}{\hbar} - \frac{\lambda \operatorname{tg} \Omega t}{\Omega + i\omega_0 \operatorname{tg} \Omega t}, \quad (25)$$

$$r(t) = \frac{1}{2} \left(-\frac{M\omega_0}{\hbar} + \frac{M\omega_0}{\hbar} \frac{(\Omega + (i\omega_0 + 2\lambda\hbar/(M\omega_0)) \operatorname{tg} \Omega t)}{(\Omega + i\omega_0 \operatorname{tg} \Omega t)} \right) = \frac{\lambda \operatorname{tg} \Omega t}{\Omega + i\omega_0 \operatorname{tg} \Omega t}. \quad (26)$$

При $t \rightarrow \infty$ и $\lambda \neq 0$ значения функций $R(t)$ и $r(t)$ и связанная с ними дисперсия волновой функции стабилизируются, причем должно выполняться условие $\operatorname{Re} R(t) < 0$. Переходя в (25), (26) к пределу при $t \rightarrow \infty$, получим стационарные значения (21), (22):

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) &= -\frac{M\omega_0}{\hbar} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda \operatorname{tg} \Omega t}{\Omega + i\omega_0 \operatorname{tg} \Omega t} = -\frac{M\omega_0}{\hbar} - \frac{-i\lambda}{\Omega + \omega_0} = -\frac{M\omega_0}{\hbar} + \frac{i\lambda(\Omega - \omega_0)}{\Omega^2 - \omega_0^2} \\ &= -\frac{M\omega_0}{\hbar} + i\lambda(\Omega - \omega_0) \frac{1}{\omega_0^2 - i2\hbar\lambda/M - \omega_0^2} = -\frac{M}{2\hbar}(\omega_0 + \Omega). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = -\frac{M}{2\hbar}(\omega_0 - \Omega).$$

В дальнейшем удобно использовать следующие обозначения:

$$\operatorname{Re}(R(t)) = A(t), \quad \operatorname{Im}(R(t)) = B(t), \quad \operatorname{Re}(r(t)) = a(t), \quad \operatorname{Im}(r(t)) = b(t).$$

Тогда при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} A(t) &\rightarrow A = -\frac{M}{2\hbar}(\omega_0 + \operatorname{Re}(\Omega)), & B(t) &\rightarrow B = -\frac{M}{2\hbar} \operatorname{Im}(\Omega), \\ a(t) &\rightarrow a = -\frac{M}{2\hbar}(\omega_0 - \operatorname{Re}(\Omega)), & b(t) &\rightarrow b = \frac{M}{2\hbar} \operatorname{Im}(\Omega). \end{aligned}$$

Если при $\lambda = 0$ в качестве начального условия выбрано стационарное состояние осциллятора, то дисперсия не зависит от времени. Заметим, что при $\lambda = 0$ на измерительный прибор не приходит никакой информации о состоянии системы.

ТЕОРЕМА 3. *Интенсивность сигнала $I(t) = \sqrt{\lambda/2}(\Psi(t), (\hat{x}_1 - \hat{x}_2)\Psi(t))$ на выходе фотодетектора равна*

$$I(t) = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int dx_1 dx_2 |\Psi(x_1, x_2, t)|^2 (x_1 - x_2) = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \Delta q(t), \quad (27)$$

где Ψ определена в (4), а $\Delta q(t)$ может быть найдено путем решения системы (17), (18) с учетом соотношений (21), (22).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства подставим функцию (4) в формулу для определения интенсивности сигнала (27).

Используя выражение (20) с учетом соотношений (19), получим следующее замечательное выражение для квадрата модуля нормировочного коэффициента:

$$\begin{aligned} |N(t)|^2 &= \frac{M\omega_0}{\hbar\pi} \exp \left\{ - \int_0^t d\tau \left(\frac{\lambda}{A(\tau) - a(\tau)} + \frac{2\hbar B(\tau)}{M} \right) \right\} \\ &= \frac{M\omega_0}{\hbar\pi} \exp \left\{ - \int_0^t d\tau \left(\frac{(A(\tau) + a(\tau))\lambda + 2\hbar B(\tau)(A^2(\tau) - a^2(\tau))/M}{A^2(\tau) - a^2(\tau)} \right) \right\} \\ &= \frac{M\omega_0}{\hbar\pi} \exp \left\{ - \frac{1}{M} \int_0^t \frac{d\tau}{A^2(\tau) - a^2(\tau)} (A(\tau)(2\hbar B(\tau)A(\tau) + 2\hbar b(\tau)a(\tau) + \lambda M) \right. \\ &\quad \left. - a(\tau)(2\hbar b(\tau)A(\tau) + 2\hbar B(\tau)a(\tau) - \lambda M)) \right\} \\ &= \frac{M\omega_0}{\hbar\pi} \exp \left\{ - \int_0^t d\tau \left(\frac{A(\tau)\dot{A}(\tau) - a(\tau)\dot{a}(\tau)}{A^2(\tau) - a^2(\tau)} \right) \right\} \\ &= \frac{M\omega_0}{\hbar\pi} \exp \left\{ - \int_0^t \frac{d(A^2(\tau) - a^2(\tau))}{2(A^2(\tau) - a^2(\tau))} \right\} \\ &= \frac{M\omega_0}{\hbar\pi} \exp \left\{ \frac{1}{2} \log(|A^2(t) - a^2(t)|) - \frac{1}{2} \log(|A^2(0) - a^2(0)|) \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \sqrt{|A^2(t) - a^2(t)|}, \end{aligned}$$

где явный вид выражений для $\dot{A}(\tau)$ и $\dot{a}(\tau)$ получен путем выделения вещественной части в системе (5), (6) с начальными условиями $A(0) = -M\omega_0/\hbar$ и $a(0) = 0$. Тогда выражение (25) примет вид

$$\begin{aligned} I(t) &= \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi^2}} |A^2(t) - a^2(t)| \int_{\mathbb{R}^2} dx (x_1 - x_2) \exp \{ A(t)(|x - q(t)|^2 \\ &\quad + 2a(t)(x_1 - q_1(t))(x_2 - q_2(t))) \} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \Delta q(t). \end{aligned}$$

Для нахождения $\Delta q(t)$ воспользуемся системой уравнений (17), (18). Решение системы (17), (18) с учетом соотношений (21), (22) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta q(t) &= \int_0^t u(\tau) \frac{\sin \omega_0(t - \tau)}{M\omega_0} d\tau + \int_0^t \left(f \frac{\sin \omega_0(t - \tau)}{M\omega_0} + g \cos \omega_0(t - \tau) \right) dQ(\tau), \\ \Delta p(t) &= - \int_0^t u(\tau) \cos \omega_0(t - \tau) d\tau + \int_0^t (gM\omega_0 \sin \omega_0(t - \tau) - f \cos \omega_0(t - \tau)) dQ(\tau), \end{aligned}$$

где

$$u(\tau) = -GM(\cos(\omega_g \tau) + \sin(\omega_g \tau)) - M\omega_0^2(\xi_1(\tau) - \xi_2(\tau)),$$

$$g = -\frac{2}{A-a}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}, \quad f = -2\hbar\frac{B-b}{A-a}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}.$$

Таким образом, выражение для $\Delta q(t)$ состоит из трех частей:

$$\Delta q(t) = \Delta q_g(t) + \Delta q_\xi(t) + \Delta q_Q(t).$$

Первое слагаемое представляет собой сдвиг координат, возникающий за счет взаимодействия детектора с гравитационной волной. В простейшем случае плоской периодической гравитационной волны оно имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta q_g(t) &= -\frac{G}{\omega_0} \int_0^t (\cos(\omega_g \tau) + \sin(\omega_g \tau)) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{G}{\omega_g^2 - \omega_0^2} \left(\sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \sqrt{1 + \frac{\omega_g^2}{\omega_0^2}} \sin(\omega_g t + \varphi_g) \right), \end{aligned} \quad (28)$$

где $\varphi_0 = -\pi/4$, $\varphi_g = \pi - \arcsin\{1/\sqrt{1 + \omega_g^2/\omega_0^2}\}$. Второе слагаемое представляет собой влияние сейсмических шумов ξ_i :

$$\Delta q_\xi(t) = -\omega_0 \int_0^t (\xi_1(\tau) - \xi_2(\tau)) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau. \quad (29)$$

Третье слагаемое описывает влияние процедуры измерения:

$$\Delta q_Q(t) = -\frac{\hbar\sqrt{2\lambda}}{M\omega_0} \int_0^t \sin(\omega_0(t - \tau) + \varphi_\lambda) dQ(\tau), \quad (30)$$

где

$$\varphi_\lambda = \arccos \sqrt{\frac{\sqrt{1+y^2}-1}{\sqrt{1+y^2}+1}}, \quad y = \frac{2\hbar\lambda}{M\omega_0^2}.$$

3. Качественные выводы и заключение. Картина, получаемая при измерении разности координат на наблюдательном приборе, после стабилизации волновой функции соответствует классической траектории $\Delta q_g(t)$, возмущенной сейсмическими шумами $\Delta q_\xi(t)$ и шумами квантовой природы $\Delta q_Q(t)$, возникающими как результат влияния процедуры измерения. В случае, когда наблюдательным прибором является лазерный интерферометр, это смещение объясняется соударениями фотонов лазерного луча и поверхности зеркала, расположенного на осцилляторе. Тогда параметр λ пропорционален числу фотонов, отражающихся от зеркала за единицу времени. Из теоремы 3 следует, что зависимость от времени измеряемой величины $I(t)$, пропорциональной средней разности координат $\Delta q(t)$, имеет вид

$$I(t) = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(I_0(t) + \sqrt{2\lambda}I_s(t)),$$

где $I_0(t)$ – полезный сигнал, $I_s(t)$ – стохастическая часть, возникновение которой связано с влиянием процедуры измерения. Таким образом, минимальная относительная погрешность измерения достигается при минимальном λ , т.е. при минимальном числе фотонов, которое детектор способен зафиксировать. Если фотонов много, то происходит быстрая стабилизация дисперсии волновой функции, амплитуда сигнала на выходе фотодетектора велика, но сигнал теряет полезную информацию о поведении системы, так как $\Delta q_Q(t) \gg \Delta q_g(t)$. При малых λ амплитуда сигнала $\sqrt{\lambda/2}\Delta q(t)$ на выходе фотодетектора уменьшается и может превзойти его предельную чувствительность. Следовательно, получение апостериорной информации об эволюции квантовой системы возможно при наличии детектора, способного зафиксировать столь малое число фотонов, чтобы $\Delta q_Q(t) < \Delta q_g(t)$. Для анализа соотношения сигнал–шум удобно использовать автокорреляционную функцию соответствующих компонентов выходного сигнала.

Автокорреляционная функция стационарного процесса $\Delta q(t)$ вводится стандартным образом [13]:

$$C_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \Delta q(t) \Delta q(t - \tau) dt, \quad (31)$$

где T – длительность измерения или скользящее окно корреляционной функции при непрерывных измерениях. Автокорреляционная функция выходного сигнала при отсутствии сейсмических шумов имеет вид суммы автокорреляционных функций процессов (28) и (30). Для процесса (28) автокорреляционная функция является гармонической:

$$\begin{aligned} C_T^g(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T (\alpha \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \beta \sin(\omega_g t + \varphi_g)) \\ &\quad \times (\alpha \sin(\omega_0(t - \tau) + \varphi_0) + \beta \sin(\omega_g(t - \tau) + \varphi_g)) dt \\ &= \frac{1}{2} (\alpha^2 \cos(\omega_0 \tau) + \beta^2 \cos(\omega_g \tau)) - \frac{\alpha^2}{2T\omega_0} \cos(\omega_0 T + 2\varphi_0) \sin(\omega_0(T - \tau)) \\ &\quad - \frac{\beta^2}{2T\omega_g} \cos(\omega_g T + 2\varphi_g) \sin(\omega_g(T - \tau)) \\ &\quad - \frac{2\alpha\beta}{T(\omega_0 + \omega_g)} \cos((\omega_g - \omega_0)\tau) \cos\left((\omega_0 + \omega_g)\frac{T}{2} - (\omega_g + \omega_0)\tau + \varphi_0 + \varphi_g\right) \\ &\quad \times \sin\left((\omega_0 + \omega_g)\frac{T}{2}\right) \\ &\quad + \frac{2\alpha\beta}{T(\omega_0 - \omega_g)} \cos((\omega_g + \omega_0)\tau) \cos\left((\omega_g - \omega_0)\frac{T}{2} - (\omega_g - \omega_0)\tau + \varphi_g - \varphi_0\right) \\ &\quad \times \sin\left((\omega_0 - \omega_g)\frac{T}{2}\right), \end{aligned}$$

где $\alpha = -G/(\omega_g^2 - \omega_0^2)$, $\beta = -\alpha\sqrt{1 + \omega_g^2/\omega_0^2}$. Аналогично для процесса (30), соответствующего влиянию процедуры измерения, получаем

$$C_T^\lambda(\tau) = \frac{\gamma^2}{T} \int_0^T \left(\int_0^t \sin(\omega_0(t - s) + \varphi_\lambda) dQ(s) \int_0^{t-\tau} \sin(\omega_0(t - \tau - r) + \varphi_\lambda) dQ(r) \right) dt,$$

где $\gamma = -\hbar\sqrt{2\lambda/(M\omega_0)}$. Учитывая правила умножения Ито

$$M_Q(dQ(s) dQ(r)) = \delta(s - r) ds,$$

получаем для автокорреляционной функции влияния процедуры измерения следующее выражение:

$$\begin{aligned} C_T^\lambda(\tau) &= \frac{\gamma^2}{T} \int_0^T \int_0^{t-\tau} \sin(\omega_0(t-s) + \varphi_\lambda) \sin(\omega_0(t-\tau-s) + \varphi_\lambda) ds dt \\ &= \frac{\gamma^2}{2} \left(\frac{T}{2} \cos(\omega_0\tau) - \tau \cos(\omega_0\tau) + \frac{1}{2\omega_0} \sin(\omega_0\tau + 2\varphi_\lambda) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4\omega_0^2 T} \sin(\omega_0(T-\tau) + 2\varphi_\lambda) \sin(\omega_0 T) \right). \end{aligned}$$

Для величины “окна” T , используемого для оценки корреляционной функции, соответствующего нескольким периодам собственных колебаний осциллятора, должно быть выполнено условие $T \gg 1/\omega_0$, и поэтому автокорреляционная функция влияния процедуры измерения оценивается следующим выражением:

$$C_T^\lambda(\tau) = \frac{\gamma^2}{2} \left(\frac{T}{2} \cos(\omega_0\tau) - \tau \cos(\omega_0\tau) + \frac{1}{2\omega_0} \sin(\omega_0\tau + 2\varphi_\lambda) + O(T^{-1}) \right).$$

Значение автокорреляционной функции $C_T^\lambda(\tau)$ обращается в 0, если

$$T + O(T^{-1}) = \frac{2\tau\omega_0 \cos(\omega_0\tau) - \sin(\omega_0\tau + 2\varphi_\lambda)}{\omega_0 \cos(\omega_0\tau)}.$$

Если в качестве сдвига τ выбрать величину $\tau = 2\pi n/\omega_0$, отвечающую n -му максимуму автокорреляционной функции полезного сигнала $C_T^g(\tau)$, то оценка длительности измерения примет вид

$$T \approx \frac{4\pi n - \sin(2\varphi_\lambda)}{\omega_0}, \quad \varphi_\lambda = \arccos \sqrt{\frac{\sqrt{1+y^2}-1}{\sqrt{1+y^2}+1}}, \quad y = \frac{2\hbar\lambda}{M\omega_0^2}.$$

Таким образом, получена оценка для оптимальной длительности измерения, при котором модуль автокорреляционной функции влияния процедуры измерения будет минимальным при максимальном значении автокорреляционной функции полезного сигнала. Эта оценка явным образом зависит от параметра λ , характеризующего связь квантовой системы с измерительным прибором.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Belavkin V. P. A posteriori Schrödinger equation for continuous observation, // Phys. Lett. A. 1990. V. 140. № 78. P. 2930–2934.
- [2] Belavkin V. P. Nondemolition measurements, nonlinear filtering and dynamic programming of quantum stochastic processes // Lecture Notes in Control and Information. V. 121. Berlin: Springer, 1988. P. 245–265.
- [3] Belavkin V. P., Barchielli A. Measurements continuous in time and a posteriori states in quantum mechanics // J. Phys. A. Math. Gen. 1991. V. 24. P. 1495–1514.
- [4] Diosi L. Continuous quantum measurement and Ito formalism // Phys. Lett. A. 1988. V. 129. P. 419–423.
- [5] Mensky M. B. Decoherence and the theory of continuous measurements. E-print [quant-ph/9812017](#), 1998.
- [6] Gisin N. Quantum measurement and stochastic processes // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 52. P. 1657–1660.
- [7] Nicholson D., Robertson D. I., Danzmann K. Results of the first coincident observations by two laser-interferometric gravitational wave detectors. E-print [gr-qc/9605048](#), 1996.
- [8] Braginsky V. B., Gorodetsky M. L., Khalili F. Ya. Quantum limits and symphotonic states in free-mass gravitational-wave antennae. E-print [gr-qc/9806081](#), 1998.
- [9] Chebotarev A. M., Tchourkin A. V. Mathematical model of a quantum gravitational wave detector // Math. Modeling. 1999. V. 11. № 8. P. 32–44.
- [10] Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1968.
- [11] Belavkin V. P. A dynamical theory of quantum measurement and spontaneous localization // Russ. J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 1. P. 3–24.
- [12] Belavkin V. P. A quantum nonadapted Ito formula and nonstationary evolution in Fock space // Quantum Probability and Related Topics. V. 1. Singapore: World Sci., 1991. P. 137–180.
- [13] Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1971.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
09.02.2000