Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Яроцкий, Центральная предельная теорема для одного класса неоднородных случайных блужданий, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 5, 751–757

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm538>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:07:40

УДК 519

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ

Д. А. Яроцкий

Рассматривается неоднородное по пространству случайное блуждание η_t на решетке $\mathbb{Z}^\nu = \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^n$. Пусть η_t^0 – некоторое однородное (по времени и пространству) случайное блуждание, и η_t получено из него посредством изменения переходных вероятностей на множестве $A = \bar{A} \times \mathbb{Z}^n$, $|\bar{A}| < \infty$, так что блуждание остается однородным только по отношению к подгруппе $\mathbb{Z}^n$ группы $\mathbb{Z}^\nu$. Показано, что если $m \geq 2$ или снос отличен от нуля, то для η_t выполняется центральная предельная теорема.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Рассмотрим марковское случайное блуждание на решетке $\mathbb{Z}^\nu$ с вероятностями перехода

$$\text{Pr}_0(x \rightarrow y) := p(y - x), \quad (1)$$

где $p(\cdot)$ – функция, определяющая распределение вероятностей на $\mathbb{Z}^\nu$:

$$p(x) \geq 0, \quad \sum_{x \in \mathbb{Z}^\nu} p(x) = 1.$$

Предположим, что функция $p(\cdot)$ финитна в том смысле, что $p(x) = 0$, если $\|x\|$ достаточно велика.

Пусть η_t^0 , $t = 0, 1, 2, \dots$, – случайное блуждание, начинающееся из 0 и обладающее переходными вероятностями (1):

$$\begin{aligned} \text{Pr}\{\eta_0^0 = 0\} &= 1, \\ \text{Pr}\{\eta_{t+1}^0 = y | \eta_t^0 = x\} &= \text{Pr}_0(x \rightarrow y). \end{aligned}$$

Определим ν -мерный вектор $b = (b_i)$ и самосопряженную неотрицательную $(\nu \times \nu)$ -матрицу (a_{ij}) равенствами

$$b_i = \sum_{x \in \mathbb{Z}^\nu} x_i p(x), \quad (2')$$

$$a_{ij} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^\nu} (x_i - b_i)(x_j - b_j) p(x), \quad (2'')$$

где x_i обозначает i -ю координату. Тогда, как следует из центральной предельной теоремы, распределение $(\eta_t^0 - tb)/\sqrt{t}$ слабо сходится к гауссовскому со средним 0 и матрицей ковариаций (a_{ij}) при $t \rightarrow \infty$.

Пусть $\nu = m + n$ где $m, n \in \mathbb{Z}, m \geq 0, n \geq 1$. В этом случае $\mathbb{Z}^\nu = \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^n$, и если $x \in \mathbb{Z}^\nu$, то обозначим $x = (\bar{x}, \bar{\bar{x}})$, где $\bar{x} \in \mathbb{Z}^m, \bar{\bar{x}} \in \mathbb{Z}^n$.

Теперь рассмотрим неоднородное случайное блуждание на $\mathbb{Z}^\nu$ с вероятностями перехода вида

$$\Pr(x \rightarrow y) := p(y - x) + v(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\bar{y}} - \bar{\bar{x}}), \quad (3)$$

где первое слагаемое в правой части то же самое, что и в (1), а второе рассматривается как возмущение. Конечно, мы предполагаем, что функция $v(\cdot, \cdot, \cdot)$ такова, что для любого x правая часть (3) определяет распределение вероятностей

$$\begin{aligned} p(y - x) + v(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\bar{y}} - \bar{\bar{x}}) &\geq 0, \\ \sum_{y \in \mathbb{Z}^\nu} (p(y - x) + v(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\bar{y}} - \bar{\bar{x}})) &= 1. \end{aligned}$$

Вид второго слагаемого в правой части (3) показывает, что возмущение сохраняет однородность по отношению к трансляциям, соответствующим подрешетке $\mathbb{Z}^n$.

Пусть функция v также финитна. В этом случае “область действия возмущения”

$$A := \{x \in \mathbb{Z}^\nu | \exists y v(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\bar{y}} - \bar{\bar{x}}) \neq 0\} \quad (4)$$

является цилиндрическим множеством:

$$A = \bar{A} \times \mathbb{Z}^n, \quad (5)$$

где $\bar{A}$ – некоторое конечное подмножество $\mathbb{Z}^m$.

Пусть $\eta_t, t = 0, 1, 2, \dots$, – выходящее из 0 неоднородное случайное блуждание с переходными вероятностями, определенными формулой (3).

В настоящей работе при некоторых дополнительных предположениях будет доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА. Пусть b_i и a_{ij} определены формулами (2'), (2''). Если $b \neq 0$ или $n \geq 2$, то распределение $(\eta_t - tb)/\sqrt{t}$ слабо сходится к гауссовскому со средним 0 и матрицей ковариаций (a_{ij}) при $t \rightarrow \infty$.

Заметим, что этот результат не имеет места, если $b = 0$ и $n = 1$. Оказывается, что в этом случае предельное распределение существует, но отлично от гауссовского (см. [1]).

Перед тем как сформулировать дополнительные предположения, введем некоторые обозначения.

Пусть $\eta_t = (\bar{\eta}_t, \bar{\bar{\eta}}_t)$, где случайные процессы $\bar{\eta}_t \in \mathbb{Z}^m, \bar{\bar{\eta}}_t \in \mathbb{Z}^n$ являются проекциями случайного процесса η_t . Легко видеть из (3), что $\bar{\eta}_t$ также будет марковским процессом. Обозначая его переходные вероятности через $\overline{\Pr}(\bar{x} \rightarrow \bar{y})$, имеем

$$\overline{\Pr}(\bar{x} \rightarrow \bar{y}) = \sum_{\bar{\bar{y}} \in \mathbb{Z}^n} \Pr((\bar{x}, \bar{\bar{x}}) \rightarrow (\bar{y}, \bar{\bar{y}})),$$

где $\bar{\bar{x}}$ произвольно.

Аналогично мы вводим переходные вероятности для $\bar{\eta}_t^0 \in \mathbb{Z}^m$:

$$\overline{\text{Pr}}_0(\bar{x} \rightarrow \bar{y}) = \sum_{\bar{\bar{y}} \in \mathbb{Z}^n} \text{Pr}_0((\bar{x}, \bar{\bar{x}}) \rightarrow (\bar{y}, \bar{\bar{y}})) = \bar{p}(\bar{y} - \bar{x}),$$

где

$$\bar{p}(\bar{x}) := \sum_{\bar{\bar{x}} \in \mathbb{Z}^n} p(\bar{x}, \bar{\bar{x}}).$$

Мы будем предполагать, что выполнены следующие два условия.

1. Назовем непустое конечное подмножество $\bar{B}$ решетки $\mathbb{Z}^m$ *ловушкой*, если для любых $\bar{x} \in \bar{B}$ и $\bar{y} \notin \bar{B}$ выполнено $\overline{\text{Pr}}(\bar{x} \rightarrow \bar{y}) = 0$. Мы будем считать, что у рассматриваемого блуждания нет ловушек.

2. Мы будем считать, что однородное блуждание $\bar{\eta}_t^0$ неприводимо в следующем смысле:

$$\left\{ \sum a_k \bar{x}_k \mid a_k \in \mathbb{Z}, \bar{x}_k \in \text{supp } \bar{p} \right\} = \mathbb{Z}^m. \quad (6)$$

Теорема обобщает некоторые результаты работ [1], [2].

2. Доказательство теоремы. Достаточно показать, что

$$\Delta_f(t) := \mathbb{E} \left(f \left(\frac{\eta_t^0 - tb}{\sqrt{t}} \right) \right) - \mathbb{E} \left(f \left(\frac{\eta_t - tb}{\sqrt{t}} \right) \right) \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$ для любой достаточно гладкой финитной $f: \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим функцию $q(t)$

$$q(t) := \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbb{P}\{\eta_t \in A\},$$

где A определено формулой (4).

ЛЕММА 1. *Существует константа $C > 0$ такая, что для всех t*

$$|\Delta_f(t)| < \frac{C}{\sqrt{t}} q(t) \|\nabla f\|,$$

где

$$\|\nabla f\| := \max_{\mathbb{R}^\nu} \left(\sum_{i=1}^{\nu} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$C = \max_{x \in A} \left(\sum_{y \in \mathbb{Z}^\nu} \|y - x\| \Pr_0(x \rightarrow y) + \sum_{y \in \mathbb{Z}^\nu} \|y - x\| \Pr(x \rightarrow y) \right),$$

где $\|y - x\| := (\sum_{i=1}^\nu (y_i - x_i)^2)^{1/2}$.

Достаточно показать, что для любой финитной гладкой $g: \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}$ и для любого $t = 1, 2, \dots$

$$|E(g(\eta_t^0)) - E(g(\eta_t))| < Cq(t)\|\nabla g\|.$$

Воспользуемся индукцией. Пусть это утверждение выполнено для $t = t_0$. Тогда для $t = t_0 + 1$ имеем

$$\begin{aligned} & |E(g(\eta_{t_0+1}^0)) - E(g(\eta_{t_0+1}))| \\ &= \left| \sum_{x, y \in \mathbb{Z}^\nu} P\{\eta_{t_0}^0 = x\} \Pr_0(x \rightarrow y) g(y) - \sum_{x, y \in \mathbb{Z}^\nu} P\{\eta_{t_0} = x\} \Pr(x \rightarrow y) g(y) \right| \\ &\leq \left| \sum_{x, y \in \mathbb{Z}^\nu} (P\{\eta_{t_0}^0 = x\} - P\{\eta_{t_0} = x\}) \Pr_0(x \rightarrow y) g(y) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{x, y \in \mathbb{Z}^\nu} P\{\eta_{t_0} = x\} (\Pr_0(x \rightarrow y) - \Pr(x \rightarrow y)) g(y) \right| \\ &\leq \left| \sum_{x, z \in \mathbb{Z}^\nu} (P\{\eta_{t_0}^0 = x\} - P\{\eta_{t_0} = x\}) p(z) g(x + z) \right| \\ &\quad + \sum_{x \in A} P\{\eta_{t_0} = x\} \left(\left| \sum_{y \in \mathbb{Z}^\nu} \Pr_0(x \rightarrow y) g(y) - g(x) \right| + \left| \sum_{y \in \mathbb{Z}^\nu} \Pr(x \rightarrow y) g(y) - g(x) \right| \right) \\ &\leq \sum_{z \in \mathbb{Z}^\nu} p(z) \left| \sum_{x \in \mathbb{Z}^\nu} (P\{\eta_{t_0}^0 = x\} - P\{\eta_{t_0} = x\}) g(x + z) \right| \\ &\quad + \sum_{x \in A} P\{\eta_{t_0} = x\} C \|\nabla g\| \\ &\leq \sum_{z \in \mathbb{Z}^\nu} p(z) C q(t_0) \|\nabla g\| + \sum_{x \in A} P\{\eta_{t_0} = x\} C \|\nabla g\| \\ &= C q(t_0 + 1) \|\nabla g\|. \end{aligned}$$

Мы использовали то, что

$$\left| \sum_{y \in \mathbb{Z}^\nu} \Pr_0(x \rightarrow y) g(y) - g(x) \right| + \left| \sum_{y \in \mathbb{Z}^\nu} \Pr(x \rightarrow y) g(y) - g(x) \right| \leq C \|\nabla g\|,$$

а также то, что $\|\nabla g(\cdot + z)\| = \|\nabla g(\cdot)\|$. Основание индукции $t = 1$ проверяется аналогично. Лемма доказана.

Теперь нашей целью будет рассмотреть функцию $q(t)$ и доказать, что

$$q(t) = o(\sqrt{t}), \quad (7)$$

так как благодаря лемме 1 из этой оценки следует утверждение теоремы.

Рассмотрим стохастический оператор $\mathcal{T}$, определенный на множестве функций $\{u : \mathbb{Z}^\nu \rightarrow \mathbb{R}\}$ следующим образом:

$$\mathcal{T}u(x) := \sum_{y \in \mathbb{Z}^\nu} u(y) \Pr(x \rightarrow y).$$

Пусть функция w обладает таким свойством:

$$(\mathcal{T} - \mathcal{I})w = \chi_A, \quad (8)$$

где χ_A обозначает индикатор множества A и $\mathcal{I}$ есть единичный оператор. Тогда

$$\mathcal{T}^t w(0) = \mathcal{T}^{t-1} w(0) + \mathcal{T}^{t-1} \chi_A(0) = \dots = \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathcal{T}^\tau \chi_A(0) = q(t) + w(0). \quad (9)$$

Мы будем строить функцию w , удовлетворяющую (8) и для которой

$$\mathcal{T}^t w(0) = o(\sqrt{t}), \quad (10)$$

так как благодаря (9) из существования такой функции следует оценка (7).

Пусть $\overline{\mathcal{T}}_0$ и $\overline{\mathcal{T}}$ – стохастические операторы, определенные на множестве $\{\bar{u} : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{R}\}$ следующим образом:

$$\overline{\mathcal{T}}_0 \bar{u}(\bar{x}) := \sum_{\bar{y} \in \mathbb{Z}^m} \bar{u}(\bar{y}) \overline{\Pr}_0(\bar{x} \rightarrow \bar{y}), \quad \overline{\mathcal{T}} \bar{u}(\bar{x}) := \sum_{\bar{y} \in \mathbb{Z}^m} \bar{u}(\bar{y}) \overline{\Pr}(\bar{x} \rightarrow \bar{y}).$$

Пусть для функции $\bar{w}$ выполнено условие

$$(\overline{\mathcal{T}} - \mathcal{I})\bar{w} = \chi_{\overline{A}}, \quad (11)$$

где $\mathcal{I}$ – единичный оператор и $\chi_{\overline{A}}$ – индикатор множества $\overline{A}$, определенного в (5). Тогда функция $w : \mathbb{Z}^\nu \rightarrow \mathbb{R}$, заданная формулой

$$w((\bar{x}, \bar{x})) := \bar{w}(\bar{x}),$$

удовлетворяет условию (8). Более того, $\mathcal{T}^t w(0) = \overline{\mathcal{T}}^t \bar{w}(0)$ и (10) эквивалентно

$$\overline{\mathcal{T}}^t \bar{w}(0) = o(\sqrt{t}). \quad (12)$$

Таким образом, задача сведена к нахождению решения (11), удовлетворяющего (12).

Сначала рассмотрим следующую аналогичную задачу для стохастического оператора $\overline{\mathcal{T}}_0$:

$$(\overline{\mathcal{T}}_0 - \mathcal{I})\varphi = \delta, \quad (13)$$

где $\delta(\bar{x}) = \chi_{\{\bar{x}=0\}}$. Заметим, что согласно (6) подматрица $\overline{\mathcal{A}} := (a_{ij})_{i,j=1}^m$ матрицы $(a_{ij})_{i,j=1}^\nu$ невырождена, и введем новую норму $\|\cdot\|_1$ в $\mathbb{R}^m$

$$\|\bar{x}\|_1^2 := (\overline{\mathcal{A}}^{-1} \bar{x}, \bar{x}),$$

где $(\bar{x}, \bar{y}) := \sum_{i=1}^m \bar{x}_i \bar{y}_i$.

Обозначим через $\mathcal{F}\bar{p}$ преобразование Фурье от $\bar{p}$

$$\mathcal{F}\bar{p}(\theta) := \sum_{\bar{x} \in \mathbb{Z}^m} \bar{p}(\bar{x}) \exp\{i(\theta, \bar{x})\},$$

где $\theta \in T^m := [-\pi, \pi]^m$. Согласно (6) $\mathcal{F}\bar{p}(\theta) = 1$ тогда и только тогда, когда $\theta = 0$ (см. [3]).

ЛЕММА 2. Уравнение (13) обладает решением φ таким, что

- а) если $m \geq 3$, то $\varphi(\bar{x}) \rightarrow 0$ при $\bar{x} \rightarrow \infty$;
- б) если $m = 2$ и $\bar{b} := (b_i)_{i=1}^m \neq 0$, то также $\varphi(\bar{x}) \rightarrow 0$ при $\bar{x} \rightarrow \infty$;
- с) если $m = 2$ и $\bar{b} = 0$, то

$$\varphi(\bar{x}) = \frac{(\det \overline{\mathcal{A}})^{-1/2}}{\pi} \ln \|\bar{x}\|_1 + o(1);$$

- д) если $m = 1$ и $\bar{b} \neq 0$, то существуют пределы $\varphi(\bar{x}) \rightarrow \varphi_{\pm}$ при $\bar{x} \rightarrow \pm\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для φ имеются явные формулы (см. [4]): в случаях а) и б)

$$\varphi(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} \frac{\exp\{i(\bar{x}, \theta)\}}{\mathcal{F}\bar{p}(\theta) - 1} d\theta,$$

а в случаях с) и д)

$$\varphi(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} \frac{\exp\{i(\bar{x}, \theta)\} - 1}{\mathcal{F}\bar{p}(\theta) - 1} d\theta.$$

Тогда утверждения а) и б) являются следствиями леммы Римана–Лебега, так как, как легко проверить, функция $(\mathcal{F}\bar{p} - 1)^{-1}$ интегрируема в этих двух случаях.

Мы не будем приводить вывод с) и д); заметим лишь, что примеры доказательств подобных оценок можно найти в [4], [5].

Теперь вернемся к решению уравнения (11) (для неоднородного блуждания). Мы построим решение этого уравнения в виде линейной комбинации найденных выше функций φ , решающих уравнение (13) (для однородного блуждания). А именно, пусть

$$\overline{w}(\bar{x}) := \alpha_1 \varphi(\bar{x} - \bar{x}^{(1)}) + \dots + \alpha_k \varphi(\bar{x} - \bar{x}^{(k)}), \quad (14)$$

где $\bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(k)}$ – это все точки множества $\overline{A}$. Тогда, как легко увидеть из определения $\overline{A}$, $(\overline{\mathcal{T}} - \mathcal{J})\overline{w}(\bar{x}) = \beta_1 \delta(\bar{x} - \bar{x}^{(1)}) + \dots + \beta_k \delta(\bar{x} - \bar{x}^{(k)})$, что равно $\chi_{\overline{A}}$, если все $\beta_s = 1$. Постоянные β_s линейно зависят от постоянных α_s , и если мы докажем, что ядро отображения $\{\alpha_s\} \mapsto \{\beta_s\}$ тривиально, то, пользуясь хорошо известной теоремой линейной алгебры, мы можем сказать, что существует набор α_s , для которого $\beta_s \equiv 1$.

Предположим, что набор α_s принадлежит ядру, т.е. $(\overline{\mathcal{T}} - \mathcal{J})\overline{w} \equiv 0$.

Пусть $\bar{x}$ – точка, в которой функция $\overline{w}$, полученная по формуле (14), достигает экстремума (существование такой точки нетрудно вывести из оценок леммы 2).

Легко видеть, что в этом случае если $\overline{\text{Pr}}(\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \neq 0$ для некоторого $\bar{y}$, то $\overline{w}(\bar{y}) = \overline{w}(\bar{x})$, так как функция $\overline{\text{Pr}}(\bar{x} \rightarrow \cdot)$ определяет распределение вероятностей.

Отсюда следует, что для лишенного ловушек случайного блуждания $\overline{w} \equiv \text{const}$. В частности, $\alpha_s = (\overline{\mathcal{T}}_0 - \mathcal{J})\overline{w}(\bar{x}^{(s)}) = 0$ для всех s .

Итак, найдется набор α_s , для которого $\beta_s \equiv 1$ и соответствующее $\overline{w}$ удовлетворяет (11). Остается показать, что условие (12) также выполнено. Действительно, если $m \geq 3$ или $\bar{b} \neq 0$, то согласно лемме 2 последовательность $\overline{\mathcal{T}}^t \overline{w}(0)$ ограничена. Если же $m = 2$ и $\bar{b} = 0$, то, как легко следует из финитности функций p, v и леммы 2, $|\overline{\mathcal{T}}^t \overline{w}(0)| \leq c_1 + c_2 \ln t$, где c_1, c_2 – некоторые константы.

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность Е. А. Жижинной и Р. А. Минлосу за помощь в работе и полезное обсуждение результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Жижина Е. А., Минлос Р. А. Локальная предельная теорема для неоднородного случайного блуждания на решетке. // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39. № 3. С. 513–529.
- [2] Minlos P. A., Zhizhina E. A. The limiting theorems for a random walk of two particles on the lattice $\mathbb{Z}^\nu$ // Potential Analysis. 1996. V. 5. P. 139–172.
- [3] Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. 1. М.: Наука, 1971.
- [4] Спипер Ф. Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969.
- [5] Duffin R. J. Discrete potential theory // Duke Math. J. 1953. V. 20. P. 233–251.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: yarotsky@mail.ru

Поступило
27.07.1999
Исправленный вариант
05.04.2000