Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Илларионов, Оценки количества относительных минимумов решеток, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 2, 249–259

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5381>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 02:48:47

Оценки количества относительных минимумов решеток

А. А. Илларионов

Доказывается правильная, с точностью до константы, зависящей от размера и ранга, оценка количества относительных минимумов произвольной решетки (которая может быть нецелочисленной и неполной), расположенных в заданном кубе.

Библиография: 16 названий.

Введение. Пусть $Q_k = Q_k(\alpha)$ – знаменатель k -й подходящей дроби к некоторому $\alpha \in \mathbb{R}$. Имеет место следующий классический результат [1]:

$$Q_k \geq 2^{(k-1)/2},$$

из которого вытекает, что для любого иррационального α

$$\#\{k : Q_k(\alpha) \leq P\} = O(\log_2 P) \quad \text{при} \quad P \in (2, +\infty).$$

Здесь и далее, если X – конечное множество, то $\#X$ – число элементов из X . Цель настоящей работы – получение аналогичной оценки для многомерных аналогов непрерывных дробей.

В конце XIX в. были предложены два обобщения непрерывных дробей на многомерный случай: одно – Клейном [2], а другое – Вороным [3] и независимо от него Минковским [4]. В каждом из них среди узлов некоторой s -мерной решетки Γ выделяются и изучаются $\mathfrak{N}(\Gamma)$ – множество вершин многогранников Клейна и, соответственно, $\mathfrak{M}(\Gamma)$ – множество всех относительных минимумов Γ .

Напомним определения. Решеткой Γ размера s и ранга t , $s, t \in \mathbb{N}$, $t \leq s$, называется множество вида

$$\Gamma = \Gamma(M) = \left\{ \sum_{i=1}^t k_i m^{(i)} : k_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

где $m^{(i)}$, $i = 1, \dots, t$, – линейно независимые векторы из $\mathbb{R}^s$ (базис Γ), M – матрица решетки, столбцами которой являются базисные вектора $m^{(i)}$ (см. [5]). Множество

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 09-01-12129-офи-м, 10-01-98001-р_сибирь_а, 10-01-98002-р_сибирь_а), ДВО РАН (гранты №№ 10-III-B-01M-001, 09-I-P4-03), а также программы президента РФ (грант № МД-2339.2010.1).

всех таких решеток будем обозначать $\mathcal{L}_t(\mathbb{R}^s)$. При $t = s$ решетка называется *полной*, а при $t < s$ – *неполной*.

Ненулевой узел $\gamma \in \Gamma$ называется *относительным минимумом* $\Gamma \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^s)$, если не существует другого ненулевого узла $\gamma' \in \Gamma$, для которого

$$|\gamma'_i| \leq |\gamma_i|, \quad i = 1, \dots, s, \quad \sum_{i=1}^s |\gamma'_i| < \sum_{i=1}^s |\gamma_i|.$$

Многогранниками Клейна решетки Γ называются множества вида $\mathcal{K}_\theta(\Gamma)$, где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$, $\theta_i = \pm 1$, которые определяются как выпуклая оболочка ненулевых узлов Γ , содержащихся в s -гранном угле

$$\{(\theta_1 t_1, \dots, \theta_s t_s) : t_i \in [0, \infty), \quad i = 1, \dots, s\}.$$

Хорошо известно, что для двумерных решеток $\Gamma \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2)$ множество $\mathfrak{N}(\Gamma) = \mathfrak{M}(\Gamma)$, за исключением решетки с базисом (u, v) , $(u, -v)$, где $u, v \in \mathbb{R}_+$. Здесь и далее $\mathbb{R}_+$ – множество положительных вещественных чисел. Кроме того (см. [6]),

$$\mathfrak{N}(\Gamma) \subset \mathfrak{M}(\Gamma) \quad \forall \Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R}^s). \quad (1)$$

Конструкция Вороного и Минковского мотивирована классической теоремой Лагранжа о наилучших приближениях с помощью непрерывных дробей. Так, например, если $\alpha \in (0, 1/2)$, то для решеток Γ_α с базисом $(1, \alpha)$, $(0, 1)$

$$\mathfrak{N}(\Gamma_\alpha) = \mathfrak{M}(\Gamma_\alpha) = \{\pm(Q_i, \alpha Q_i - P_i) : i = 0, 1, \dots\},$$

где $Q_0 = 0$, $P_0 = 1$ и P_i/Q_i – i -я подходящая дробь к α при $i \geq 1$.

В [7], [8] было также замечено, что множество относительных минимумов $\mathfrak{M}(\Gamma)$ определяет погрешность многомерных квадратурных формул Коровова (см. также [9]).

Множество относительных минимумов *целочисленных* решеток конечно, причем

$$\log_2^{t-1}(D+1) \ll_{s,t} \sup_{\Gamma \in \mathcal{L}_t(\mathbb{Z}^s) : D(\Gamma)=D} \#\mathfrak{M}(\Gamma) \ll_{s,t} \log_2^{t-1}(D+1), \quad (2)$$

где $\mathcal{L}_t(\mathbb{Z}^s)$ – множество s -мерных решеток ранга t с узлами из $\mathbb{Z}^s$, $D(\Gamma)$ – максимальный из модулей миноров порядка t матрицы M . Для полных решеток верхняя оценка была доказана в [7], [8] (см. также [9]–[11] по поводу оценки константы), а для неполных – в [12] для случая $t = s - 1$ и в [13] для произвольного ранга $t < s$. Нижняя оценка вытекает из результатов [14].

Для нецелочисленной решетки $\Gamma = \Gamma(M) \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^s)$ множество $\mathfrak{M}(\Gamma)$ конечно только в случае, когда каждая строка матрицы M пропорциональна некоторой целочисленной строке [15]. Для любого $P \in \mathbb{R}_+$ определим множество

$$\mathfrak{M}(\Gamma; P) = \{\gamma \in \mathfrak{M}(\Gamma) : |\gamma_i| \leq P, \quad i = 1, \dots, s\}$$

и положим

$$\lambda(\Gamma) = \min_{\gamma \in \Gamma, \gamma \neq 0} \|\gamma\|_\infty, \quad \|\gamma\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq s} |\gamma_i|.$$

Основным результатом настоящей работы является следующая верхняя оценка:

$$\#\mathfrak{M}(\Gamma; P) \ll_{s,t} \log_2^{t-1} \left(\frac{P}{\lambda(\Gamma)} + 1 \right) \quad \forall \Gamma \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^s), \quad P \in \mathbb{R}, \quad P \geq \lambda(\Gamma). \quad (3)$$

Также доказывается, что существуют решетки $\Gamma \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^s)$, для которых

$$\#\mathfrak{M}(\Gamma; P) \gg_{\Gamma} \log_2^{t-1}(P+1) \quad \forall P \in \mathbb{R}_+. \quad (4)$$

Ранее такие оценки были известны только в частном случае $t = s = 2$ (это вытекает из теории непрерывных дробей).

Отметим, что из (1) и неравенства (3) вытекает соответствующая оценка для множества вершин многогранников Клейна.

Основная проблема при получении неравенства (3) заключается в том, что координаты относительных минимумов нецелочисленных решеток могут принимать сколь угодно малые ненулевые значения. Доказательство основано на следующих соображениях:

- 1) количество минимумов с координатами, ограниченными по модулю снизу и сверху заданными числами, оценивается по такой же схеме, как и в [13];
- 2) множество минимумов, у которых некоторая координата достаточно мала, содержится в подрешетке $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ ранга меньшего, чем t .

Существование решеток, удовлетворяющих (4), вытекает из теоремы Дирихле о единицах.

1. Верхняя оценка количества минимумов, с координатами ограниченными снизу и сверху. Пусть $\Gamma = \Gamma(M) \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^s)$,

- $\Lambda_k(s)$ – множество всех k -элементных подмножеств $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, s\}$;
- $M(I)$, $I \in \Lambda_k(s)$, $k > 0$, – матрица, составленная из строк M с номерами из I ;
- $d(I) = d(I; \Gamma) = \det M(I)$ при $I \in \Lambda_t(s)$;
- $I_i = I \setminus \{i\}$ при $I \in \Lambda_k(s)$, $i \in I$.

Пусть $t < s$, $\gamma \in \Gamma = \Gamma(M)$. Через $\tilde{M}$ обозначим матрицу, полученную из M , к которой в качестве последнего столбца дописали γ . Тогда $\text{rank } \tilde{M} \leq t$, следовательно, $\det \tilde{M}(I) = 0$ для любого $I \in \Lambda_{t+1}(s)$. Занумеруем элементы из I по возрастанию: $i_1 < i_2 < \dots < i_{t+1}$. Раскладывая $\det \tilde{M}(I)$ по последнему столбцу, получаем формулу

$$\sum_{k=1}^{t+1} (-1)^k \gamma_{i_k} \cdot d(I_{i_k}) = 0 \quad \forall I \in \Lambda_{t+1}(s), \quad (5)$$

из которой вытекает оценка

$$|d(I_k)| \cdot |\gamma_k| \leq \sum_{i \in I_k} |\gamma_i| \cdot |d(I_i)| \quad \forall I \in \Lambda_{t+1}(s), \quad k \in I. \quad (6)$$

Пусть $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_s) \in \mathbb{R}^s$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_s) \in \mathbb{R}^s$, $P_i > p_i > 0$,

$$\mathfrak{M}(\Gamma; \mathbf{P}; \mathbf{p}) = \{\gamma \in \mathfrak{M}(\Gamma) : p_i \leq |\gamma_i| \leq P_i, i = 1, \dots, s\}.$$

Целью данного пункта является получение верхней оценки $\#\mathfrak{M}(\Gamma; \mathbf{P}; \mathbf{p})$.

ЛЕММА 1.1. Пусть $\Gamma \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^s)$, $I \in \Lambda_t(s)$, $\bar{I} = \{1, \dots, s\} \setminus I$, $\chi \in \bar{I}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, \dots, s$, $i \neq \chi$. Количество относительных минимумов $\gamma \in \Gamma$, удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{aligned} \alpha_i &\leq |\gamma_i| \leq 2\alpha_i & \forall i \in I, \\ \alpha_i |\gamma_\chi| &\leq |\gamma_i| \leq 2\alpha_i |\gamma_\chi| & \forall i \in \bar{I}, \quad i \neq \chi, \\ \gamma_\chi &\neq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

не больше, чем 2^s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдутся два минимума γ , γ' , удовлетворяющие (7), координаты которых имеют одинаковые знаки. Рассмотрим узел $\gamma' - \gamma$. Пусть, для определенности, $|\gamma_\chi| \leq |\gamma'_\chi|$. Тогда $|\gamma'_\chi - \gamma_\chi| < |\gamma'_\chi|$. Кроме того,

$$\begin{aligned} |\gamma'_i - \gamma_i| &= ||\gamma'_i| - |\gamma_i|| \leq 2\alpha_i - \alpha_i = \alpha_i \leq |\gamma'_i| & \forall i \in I, \\ |\gamma_i| \leq 2\alpha_i |\gamma_\chi| \leq 2\alpha_i |\gamma'_\chi| \leq 2|\gamma'_i| & \implies |\gamma'_i - \gamma_i| \leq |\gamma'_i| & \forall i \in \bar{I}, \quad i \neq \chi. \end{aligned}$$

Узел $\gamma' - \gamma$ нарушает минимальность γ' . Лемма доказана.

Будем обозначать $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$.

ЛЕММА 1.2. Пусть $\Gamma \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^s)$, $I \in \Lambda_t(s)$, $\bar{I} = \{1, \dots, s\} \setminus I$, $\chi \in \bar{I}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}_+$, $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, s$, $i \neq \chi$. Количество относительных минимумов $\gamma \in \Gamma$, удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{aligned} a_i &\leq |\gamma_i| \leq b_i & \forall i \in I, \\ a_i |\gamma_\chi| &\leq |\gamma_i| \leq b_i |\gamma_\chi| & \forall i \in \bar{I}, \quad i \neq \chi, \\ \gamma_\chi &\neq 0, \end{aligned} \quad (8)$$

не больше, чем

$$2^s \prod_{i=1, \dots, s, i \neq \chi} \left\lceil \log_2 \left(\frac{b_i}{a_i} \right) \right\rceil.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что для любого $\gamma \in \Gamma$, удовлетворяющего (8), существуют целые $n_i \in [1, \lceil \log_2(b_i/a_i) \rceil]$, $i = 1, \dots, s$, $i \neq \chi$, такие, что

$$\begin{aligned} a_i 2^{n_i-1} &\leq |\gamma_i| \leq a_i 2^{n_i} & \forall i \in I, \\ a_i 2^{n_i-1} |\gamma_\chi| &\leq |\gamma_i| \leq a_i 2^{n_i} |\gamma_\chi| & \forall i \in \bar{I}, \quad i \neq \chi, \end{aligned}$$

и воспользоваться леммой 1.1. Лемма доказана.

Из леммы 1.2 сразу вытекает неравенство

$$\mathfrak{M}(\Gamma; \mathbf{P}; \mathbf{p}) \leq 2^s \prod_{i=1, \dots, s, i \neq \chi} (\log_2 P_i/p_i + 1) \quad \forall \chi \in \{1, \dots, s\}.$$

Однако для неполных решеток эта оценка является слишком грубой (при больших P_i/p_i).

Для каждой решетки $\Gamma \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^s)$ через Γ' обозначаем множество узлов из Γ со всеми ненулевыми координатами.

ЛЕММА 1.3. Пусть $\Gamma = \Gamma(M) \in \mathcal{L}_t(\mathbb{Z}^s)$, $t < s$, $\Gamma' \neq \emptyset$, $I \in \Lambda_{t+1}(s)$, причем выполнено $\text{rank } M(I) = t$. Тогда для любого узла $\gamma \in \Gamma'$ существуют номера $k, l \in I$, и $\alpha \in \mathbb{R}_+$ такие, что

$$\alpha|\gamma_l| \leq |\gamma_k| \leq t\alpha|\gamma_l|, \quad d(I_k) \neq 0, \quad d(I_l) \neq 0, \quad k \neq l, \quad (9)$$

причем α зависит только от k, l и I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем номера $k, l \in I$, удовлетворяющие условиям

$$k \neq l, \quad |d(I_i)\gamma_i| \leq |d(I_l)\gamma_l| \leq |d(I_k)\gamma_k| \quad \forall i \in I \setminus \{k\}. \quad (10)$$

Так как все координаты γ не равны нулю, то из (5), (10) вытекает, что

$$d(I_l) \neq 0, \quad d(I_k) \neq 0.$$

Тогда, используя неравенство (6), несложно заметить, что

$$\left| \frac{d(I_l)}{d(I_k)} \right| \cdot |\gamma_l| \leq |\gamma_k| \leq t \left| \frac{d(I_l)}{d(I_k)} \right| \cdot |\gamma_l|.$$

Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\Gamma \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^s)$, $r = s - t$. Будем говорить, что множество $Q \subset \Gamma$ удовлетворяет условию (R), если существуют номера $k_j, m_j \in \{1, \dots, s\}$ и числа $\beta_j \in \mathbb{R}_+$, $j = 1, \dots, r$, удовлетворяющие условиям

$$\beta_j|\gamma_{m_j}| \leq |\gamma_{k_j}| \leq t^j\beta_j|\gamma_{m_j}|, \quad m_j \neq k_i, \quad k_i \neq k_j, \quad (11)$$

для всех $\gamma \in Q$, $i, j = 1, \dots, r$.

Отметим, что если $s = t$, то любое подмножество $Q \subset \Gamma$ удовлетворяет условию (R).

ЛЕММА 1.4. Пусть $\Gamma \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^s)$. Тогда множество Γ' можно представить в виде объединения не более, чем $(t(t+1))^{s-t}$ множеств, удовлетворяющих условию (R).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $r = s - t$, $T = t(t+1)$ и проведем индукцию по r .

При $r = 0$ утверждение леммы тривиально.

Индуктивный переход от $r - 1$ к r . Пусть $\Gamma = \Gamma(M) \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^s)$. Возьмем любой набор $I \in \Lambda_t(s)$ такой, что $\text{rank } M(I) = t$. По лемме 1.3 множество Γ' можно представить в виде

$$\Gamma' = \bigcup_{i=1}^T U_i$$

так, что для каждого U_i существуют номера $k = k(i)$, $l = l(i)$ и число $\alpha = \alpha(i) \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющие (9) для всех $\gamma \in U_i$. Положим Γ_i – решетка, составленная из узлов Γ , у которых вычеркнули $(k(i))$ -ю координату. Так как $d(I_{k(i)}) \neq 0$, то $\Gamma_i \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^{s-1})$. Значит, по предположению индукции множество Γ'_i можно представить в виде

$$\Gamma'_i = \bigcup_{j=1}^{T^{r-1}} \tilde{Q}_{ij},$$

множества $\tilde{Q}_{ij}$ удовлетворяют условию (R). Следовательно,

$$\Gamma' = \bigcup_{i=1}^T \bigcup_{j=1}^{T^{r-1}} Q_{ij}, \quad Q_{ij} = \{\gamma \in U_i : \tilde{\gamma}^{(i)} \in \tilde{Q}_j\},$$

узел $\tilde{\gamma}^{(i)}$ получается из γ вычеркиванием $(k(i))$ -й координаты. Осталось доказать, что каждое множество Q_{ij} удовлетворяет условию (R). Возьмем любое $Q = Q_{ij}$. Тогда существуют номера k, l, k_j, m_j и числа $\alpha, \beta_j \in \mathbb{R}^+$, $j = 1, \dots, r-1$, такие, что для любого $\gamma \in Q$ выполняются неравенства (9) и (11) (при $i, j = 1, \dots, r-1$), причем $k \neq k_j$, $k \neq m_j$ для всех j . Положим $k_r = k$. Осталось подобрать m_r и β_r . Возможны два случая:

- 1) если $l \neq k_j$ ($j = 1, \dots, r-1$), то $m_r = l$, $\beta_r = \alpha$;
- 2) если $l = k_\chi$, $\chi \in \{1, \dots, r-1\}$, то

$$\begin{aligned} |\gamma_{k_r}| &= |\gamma_k| \leq t\alpha|\gamma_l| = t\alpha|\gamma_{k_\chi}| \leq t\alpha \cdot t^\chi \beta_\chi |\gamma_{m_\chi}| \leq (\alpha\beta_\chi)t^r |\gamma_{m_\chi}|, \\ |\gamma_{k_r}| &= |\gamma_k| \geq \alpha|\gamma_l| = \alpha|\gamma_{k_\chi}| \geq \alpha\beta_\chi |\gamma_{m_\chi}|. \end{aligned}$$

Следовательно, можно положить $m_r = m_\chi$, $\beta_r = \alpha\beta_{k_\chi}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.5. Пусть $\Gamma \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^s)$. Тогда для любых $\mathbf{P}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^s$, $P_i > p_i > 0$, $i = 1, \dots, s$, справедлива оценка

$$\#\mathfrak{M}(\Gamma; \mathbf{P}; \mathbf{p}) \leq 2^s (t(t+1))^r \prod_{i=1}^r (i \log_2 t + 2) \cdot \log_2^{t-1}(2H) \leq C(t, s) \log_2^{t-1}(2H)$$

$$C(t, s) = 2^s (t(t+1)(r \log_2 t + 2))^r, \quad r = s - t, \quad H = \max_{1 \leq i \leq s} \frac{P_i}{p_i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q – любое множество из $\mathfrak{M}(\Gamma; \mathbf{P}; \mathbf{p})$, удовлетворяющее условию (R). Так как $\mathfrak{M}(\Gamma; \mathbf{P}; \mathbf{p}) \subset \Gamma'$, то в силу леммы 1.4 достаточно доказать, что

$$\#(Q \cap \mathfrak{M}(\Gamma; \mathbf{P}; \mathbf{p})) \leq 2^s \prod_{i=1}^r (i \log_2 t + 2) \cdot (\log_2 H + 1)^{t-1}. \quad (12)$$

По определению условия (R) существуют номера $k_j, m_j \in \{1, \dots, s\}$ и $\beta_j \in \mathbb{R}_+$, $j = 1, \dots, r$, удовлетворяющие (11). Положим $\chi = m_1$ и определим следующие множества индексов:

$$\begin{aligned} I &= \{1, \dots, s\} \setminus \{k_1, \dots, k_r, \chi\}, \\ J &= \{k_i : m_i = \chi \ i = 1, \dots, r\}, \quad K = \{k_i : m_i \neq \chi \ i = 1, \dots, r\} \end{aligned}$$

(тогда $\{1, \dots, s\} = I \cup J \cup K \cup \{\chi\}$). Пусть $\gamma \in Q \cap \mathfrak{M}(\Gamma; \mathbf{P}; \mathbf{p})$. Тогда существуют числа

$$n_i \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq n_i \leq \log_2 \frac{P_i}{p_i} + 1, \quad i \in I,$$

такие, что

$$2^{n_i-1} p_i \leq |\gamma_i| \leq 2^{n_i} p_i \quad \forall i \in I. \quad (13)$$

Так как $\{m_2, \dots, m_r\} \subset I$, то из (11), (13) вытекает

$$\begin{aligned} \beta_i 2^{n_{m_i}-1} p_{m_i} &\leq |\gamma_{k_i}| \leq \beta_i t^i 2^{n_{m_i}} p_{m_i}, & k_i \in K, \\ \beta_i |\gamma_\chi| &\leq |\gamma_{k_i}| \leq \beta_i t^i |\gamma_\chi|, & k_i \in J. \end{aligned} \quad (14)$$

По лемме 1.2 количество относительных минимумов γ , удовлетворяющих (13), (14) при заданном наборе n_i , не больше, чем

$$2^s \prod_{i=1}^r (\log_2(t^i 2) + 1) = 2^s \prod_{i=1}^r (i \log_2 t + 2).$$

Все возможных наборов n_i не больше, чем

$$(\log_2 H + 1)^{t-1}.$$

Оценка (12) доказана. Лемма доказана.

2. Верхняя оценка. Пусть $\Gamma = \Gamma(M) \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^s)$. Напомним, что

$$D(\Gamma) = \max_{I \in \Lambda_t(s)} |d(I)|, \quad \lambda(\Gamma) = \min_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \|\gamma\|_\infty.$$

ЛЕММА 2.1. Пусть $\Gamma \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^s)$, $D(\Gamma) = D$, $\lambda(\Gamma) = \lambda$, $P \in \mathbb{R}^+$, $P > \lambda$. Тогда

$$\#\mathfrak{M}(\Gamma; P) \leq C(t, s) \cdot \log_2^{t-1} \left(\frac{2t! t P^t}{D} \right) + \sum_{i=1}^s \#\mathfrak{M}(\tilde{\Gamma}_i; P), \quad (15)$$

где $\tilde{\Gamma}_i$ – некоторые подрешетки Γ ранга, меньшего чем t , постоянная $C(t, s)$ определена в лемме 1.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого номера $i \in \{1, \dots, s\}$ обозначим

$$D_i = \max\{|d(I)| : I \in \Lambda_t(s), i \in I\}, \quad P_i = \frac{t P D_i}{D}, \quad p_i = \frac{D_i}{t! P^{t-1}}$$

и представим множество $\mathfrak{M}(\Gamma; P)$ в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(\Gamma; P) &= \underline{\mathfrak{M}} \cup \overline{\mathfrak{M}}_1 \cup \dots \cup \overline{\mathfrak{M}}_s, \\ \underline{\mathfrak{M}} &= \{\gamma \in \mathfrak{M}(\Gamma; P) : p_i \leq |\gamma_i|, i = 1, \dots, s\}, \\ \overline{\mathfrak{M}}_i &= \{\gamma \in \mathfrak{M}(\Gamma; P) : |\gamma_i| < p_i\}, \quad i = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Если $k \in \{1, \dots, s\}$, $D_k = 0$, то из (6) вытекает, что $\gamma_k = 0$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Поэтому, не умаляя общности, считаем, что $D_i \neq 0$, $i = 1, \dots, s$.

Пусть $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(t)}$ – линейно независимые узлы Γ ; A – матрица, столбцами которой являются $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(t)}$; $I \in \Lambda_t(s)$; $A(I)$ – матрица, составленная из строк A с номерами из I . Тогда нетрудно заметить, что

$$|\det A(I)| \geq |d(I)| \quad \forall I \in \Lambda_t(s). \quad (16)$$

Отсюда сразу вытекает, что любые t узлов из $\overline{\mathfrak{M}}_i$, $i \in \{1, \dots, s\}$, линейно зависимы. Действительно, если $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(t)} \in \overline{\mathfrak{M}}_i$, $I \in \Lambda_t(s)$, $|d(I)| = D_i$, $A(I)$ – матрица, определенная выше, то

$$|\det A(I)| < t! p_i P^{t-1} = D_i.$$

В силу (16) это возможно только для линейно зависимых $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(t)}$. Значит, $\overline{\mathfrak{M}}_i \subset \mathfrak{M}(\tilde{\Gamma}_i; P)$, где $\tilde{\Gamma}_i$ – некоторая решетка ранга меньшего, чем t . Осталось доказать, что

$$\underline{\mathfrak{M}} \leq C(t, s) \cdot \log_2^{t-1} \left(\frac{2t! t P^t}{D} \right). \quad (17)$$

Пусть $I^* \in \Lambda_t(s)$, $|d(I^*)| = D$. Из (6) вытекает неравенство

$$|\gamma_i| \leq \frac{D_i}{D} \sum_{j \in I^*} |\gamma_j|, \quad i = 1, \dots, s, \quad \forall \gamma \in \Gamma. \quad (18)$$

При $i \in I^*$ оно тривиально (так как тогда $D_i = D$). При $i \notin I^*$ достаточно в (6) выбрать $I = I^* \cup \{i\}$. Используя (18), получаем для любого $\gamma \in \mathfrak{M}(\Gamma; P)$

$$|\gamma_i| \leq \frac{D_i}{D} tP = P_i, \quad i = 1, \dots, s.$$

Следовательно,

$$\underline{\mathfrak{M}} \subset \mathfrak{M}(\Gamma; \mathbf{P}; \mathbf{p}), \quad \mathbf{P} = (P_1, \dots, P_s), \quad \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_s).$$

Применяя лемму 1.5 для оценки $\#\mathfrak{M}(\Gamma; \mathbf{P}; \mathbf{p})$ и учитывая, что $P_i/p_i = t!tP^t/D$, получаем (17). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для полной решетки ($t = s$) неравенство (15) можно уточнить:

$$\#\mathfrak{M}(\Gamma; P) \leq 2^s \cdot \log_2^{t-1} \left(\frac{2t!P^t}{D} \right) + \sum_{i=1}^s \#\mathfrak{M}(\tilde{\Gamma}_i; P).$$

Для этого достаточно положить $P_i = P$ и учесть, что $D_i = D$ для всех i .

Положим

$$N_s^{(t)}(P) = \sup_{\Gamma \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^s), \lambda(\Gamma)=1} \#\mathfrak{M}(\Gamma; P).$$

Нетрудно заметить, что

$$\sup_{\Gamma \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^s), \lambda(\Gamma)=\lambda} \#\mathfrak{M}(\Gamma; P) = N_s^{(t)}\left(\frac{P}{\lambda}\right) \quad \forall \lambda, \quad P \in \mathbb{R}_+.$$

ЛЕММА 2.2. Пусть $s, t \in \mathbb{N}$, $s > t$, $P \in \mathbb{R}_+$. Тогда

$$N_s^{(t)}(P) \leq N_s^{(t+1)}(P). \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что для любой $\Gamma \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^s)$ существует решетка $\tilde{\Gamma} \in \mathcal{L}_{t+1}(\mathbb{R}^s)$ такая, что

$$\Gamma \subset \tilde{\Gamma}, \quad \{\gamma \in \Gamma : |\gamma_i| \leq P, i = 1, \dots, s\} = \{\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma} : |\tilde{\gamma}_i| \leq P, i = 1, \dots, s\} \quad (20)$$

Пусть $\Gamma \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^s)$, $d(I) = d(I; \Gamma)$. Не умаляя общности, считаем, что

$$|d(1, \dots, t)| = \max_{I \in \Lambda_t(s)} |d(I)|.$$

Положим

$$\eta = (0, \dots, 0, (t+1)P) \in \mathbb{R}^s, \quad \tilde{\Gamma} = \{\gamma + n\eta : \gamma \in \Gamma, n \in \mathbb{Z}\} \in \mathcal{L}_{t+1}(\mathbb{R}^s).$$

Возьмем любой узел $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$ такой, что

$$|\tilde{\gamma}_i| \leq P, \quad i = 1, \dots, s.$$

Тогда существует целое n и узел $\gamma \in \Gamma$ такие, что

$$\tilde{\gamma}_i = \gamma_i, \quad i = 1, \dots, s-1, \quad \tilde{\gamma}_s = \gamma_s + n(t+1)P.$$

В силу неравенства (6)

$$|\gamma_s| \leq \sum_{i=1}^t |\gamma_i| \leq tP.$$

Значит, из условия $|\tilde{\gamma}_s| \leq P$ вытекает $n = 0$, $\tilde{\gamma} \in \Gamma$. Равенство (20) доказано. Лемма доказана.

Пусть

$$\Gamma \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^s), \quad D(\Gamma) = D, \quad \lambda(\Gamma) = \lambda, \quad I^* \in \Lambda_t(s), \quad |d(I^*)| = D.$$

Тогда из (6) вытекает оценка

$$|\gamma_i| \leq \sum_{j \in I^*} |\gamma_j|, \quad i = 1, \dots, s, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Согласно теореме Минковского о линейных формах существует ненулевой узел $\gamma \in \Gamma$ такой, что $|\gamma_j| \leq D^{1/t}$ для всех $j \in I^*$. Тогда $|\gamma_i| \leq tD^{1/t}$ при $i \notin I^*$ и поэтому

$$\left(\frac{\lambda}{t}\right)^t \leq D. \quad (21)$$

Отметим, что для полной решетки выполняется лучшая оценка: $\lambda^t \leq D$.

ТЕОРЕМА. Пусть $s, t \in \mathbb{N}$, $s \geq t$, $P \in \mathbb{R}$, $P > 1$. Тогда

$$N_s^{(t)}(P) \leq \sum_{k=2}^t C(k, s) s^{t-k} \log_2^{k-1}(2k! k^{k+1} P^k) + 2s^{t-1},$$

$$C(k, s) = 2^s (k(k+1)((s-k) \log_2 k + 2))^{s-k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.1, оценок (19), (21) и очевидного неравенства $\lambda(\tilde{\Gamma}) \geq \lambda(\Gamma)$, выполненного при $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$, вытекает

$$N_s^{(t)}(P) \leq C(t, s) \log_2^{t-1}(2t! t^{t+1} P^t) + s N_s^{(t-1)}(P).$$

Осталось заметить, что $N_s^{(1)} = 2$ и применить индукцию. Теорема доказана.

Из теоремы вытекает верхняя оценка (3). Кроме того, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $s, t \in \mathbb{N}$, $s \geq t$. Тогда

$$N_s^{(t)}(P) \leq t^{t-1} C(t, s) \log_2^{t-1} P + O(\log_2^{t-2} P) \quad \text{при } P > 2,$$

постоянная $C(t, s)$ определена в лемме 1.5 и теореме.

3. Нижняя оценка. Пусть K – чисто вещественное расширение степени t поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Обозначим через $\omega_1^{(1)}, \dots, \omega_t^{(1)}$ – базис, состоящий из целых поля K , $\omega_1^{(i)}, \dots, \omega_t^{(i)}$ – сопряженные базисы, $i = 2, \dots, t$. Для каждого

$$\alpha = \sum_{j=1}^t \alpha_j \omega_j^{(1)} \in K$$

полагаем

$$x_i(\alpha) = \sum_{j=1}^t \alpha_j \omega_j^{(i)}, \quad i = 1, \dots, t,$$

т.е. $x(\alpha) = (x_1(\alpha), \dots, x_t(\alpha))$ – геометрическое изображение числа α .

Обозначим через M – матрицу со строками $\omega_1^{(i)}, \dots, \omega_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, t$, и положим $\Gamma = \Gamma(M) \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^t)$, т.е. решетка Γ имеет вид

$$\Gamma = \{x(\alpha) : \alpha \in \Omega\},$$

где Ω – порядок поля K с базисом $\omega_1^{(1)}, \dots, \omega_t^{(1)}$. Докажем, что для такой решетки выполняется нижняя оценка (4).

Любой узел $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$ имеет ненулевые координаты, причем $\gamma_1 \cdots \gamma_t$ – целое число. Следовательно,

$$|\gamma_1 \cdots \gamma_t| \geq 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma,$$

и поэтому

$$E = \{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\} : |\gamma_1 \cdots \gamma_t| = 1\} \subset \mathfrak{M}(\Gamma).$$

Согласно теореме Дирихле о единицах (см. [16]) существуют числа $e_1, \dots, e_{t-1} \in \Omega$ (единицы кольца Ω) такие, что все элементы α вида

$$\alpha = e_1^{n_1} \cdots e_{t-1}^{n_{t-1}}, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, t-1,$$

попарно различны и

$$x_1(\alpha) \cdots x_t(\alpha) = \pm 1,$$

т.е. $x(\alpha) \in E$. Тогда очевидно, что

$$\#(E \cap \mathfrak{M}(\Gamma; P)) \geq C \log_2^{t-1} P,$$

постоянная C не зависит от P . Следовательно, выполняется (4). Для построения неполной решетки из $\mathcal{L}_t(\mathbb{R}^s)$, $s > t$, удовлетворяющей (4), достаточно ко всем узлам $\gamma \in \Gamma$ дописать координаты $\gamma_{t+1}, \dots, \gamma_s$, равные нулю.

Автор благодарен В. А. Быковскому за внимание и полезные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, Физматгиз, М., 1961.
- [2] F. Klein, “Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung”, *Gött. Nachr.*, 1895, № 3, 357–359.
- [3] Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений*, В 3-х т. т. 1, Изд-во АН УССР, Киев, 1952.

- [4] H. Minkowski, “Généralisation de la théorie des fractions continues”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **13**:2 (1896), 41–60.
- [5] Дж. В. С. Касселс, *Введение в геометрию чисел*, Мир, М., 1995.
- [6] В. А. Быковский, “Относительные минимумы решеток и вершины многогранников Клейна”, *Функц. анализ и его прил.*, **40**:1 (2006), 69–71.
- [7] В. А. Быковский, “О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул”, *Докл. РАН*, **389**:2 (2003), 154–155.
- [8] В. А. Быковский, “О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул”, *Чебышевский сб.*, **3**:2 (2002), 27–33.
- [9] Н. М. Коробов, *Теоретико-числовые методы в приближенном анализе*, МЦНМО, М., 2004.
- [10] М. О. Авдеева, “Оценка количества локальных минимумов целочисленных решеток”, *Чебышевский сб.*, **5**:4 (2004), 35–38.
- [11] О. А. Горкуша, Н. М. Добровольский, “Об оценках гиперболической дзета-функции решеток”, *Чебышевский сб.*, **6**:2 (2005), 129–137.
- [12] А. А. Илларионов, “Оценка количества относительных минимумов неполных целочисленных решеток”, *Чебышевский сб.*, **7**:4 (2006), 92–98.
- [13] А. А. Илларионов, “Оценка количества относительных минимумов неполных целочисленных решеток произвольного ранга”, *Докл. РАН*, **418**:2 (2007), 155–158.
- [14] М. О. Авдеева, “О нижних оценках количества локальных минимумов целочисленных решёток”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:6 (2005), 9–14.
- [15] О. А. Горкуша, “Критерий конечности множества локальных минимумов решетки”, *Чебышевский сб.*, **5**:3 (2004), 15–17.
- [16] З. И. Боревиц, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, Наука, М., 1972.

А. А. Илларионов

Хабаровское отделение

Института прикладной математики ДВО РАН

E-mail: illar_a@list.ru

Поступило

19.02.2008

Исправленный вариант

22.06.2010