Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Кочуров, Аппроксимация кусочно-постоянными функциями на квадрате, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 4, 592–602

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm54>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 02:19:13

УДК 517.518.86

АППРОКСИМАЦИЯ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА КВАДРАТЕ

А. С. Кочуров

В этой работе рассматриваются некоторые алгоритмы аппроксимации функций, определенных на единичном квадрате $\mathbf{I} = [0, 1]^2$ из $\mathbb{R}^2$. В качестве аппарата приближения используются функции типа сплайнов Лагранжа нулевого порядка. Их отличие от стандартных лагранжевых сплайнов на плоскости заключено в правиле выбора линий сетки, по которой предполагается строить сплайн: вместо семейства параллельных прямых, задающих узлы интерполяции, используется набор одномерных сплайнов.

Библиография: 1 название.

В [1] был предложен метод аппроксимации функций двух переменных кусочно-постоянными функциями. Для него были введены некоторые характеристики гладких функций, в терминах которых оказалось возможным получать точные по порядку оценки скорости такой аппроксимации. Попытки распространить метод и характеристики на более общие функциональные классы привели к появлению этой работы. Как представляется, главным в ней является метод приближения функций двух переменных, решающий обратную задачу: по заданной точности приближения построить аппроксимирующий агрегат. В то же время определенное внимание уделяется и прямой задаче – по заданным параметрам агрегата получить оценку точности, с которой можно осуществить приближение. Для этого сделано “обобщение” некоторых характеристик, введенных в [1], и в их терминах получены оценки сверху для скорости аппроксимации. Вопрос об их точности (т.е. оценки снизу), в отличие от [1], не затрагивается.

Всюду ниже будем обозначать через z с индексом и без него точку из $\mathbf{I} = [0, 1]^2$, через x и y – координаты z . Пусть функция $f(\cdot) \in C(\mathbf{I})$ при любом $x \in [0, 1]$ имеет ограниченную по y вариацию: $f(x, \cdot) \in \text{Var}_0^1$ (под Var_0^y , $y \in (0, 1]$, будем понимать класс функций g , для которых

$$\text{Var}_0^y(g) = \sup_{\substack{v(\cdot) \in C_0^1(0, y) \\ \|v\|_C \leq 1}} \int_0^y g(s) \frac{dv}{ds} ds < \infty,$$

здесь $C_0^1(0, y)$ – класс непрерывно дифференцируемых функций с носителем внутри $(0, y)$;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-01007.

пусть $\varepsilon_1 > 0$ – фиксированное число и функция

$$\Lambda(x, y) = \text{Var}_0^y f(x, \cdot) + \varepsilon_1 \cdot y, \quad (x, y) \in \mathbf{I}, \quad y > 0, \quad \Lambda(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1],$$

непрерывна на $\mathbf{I}$ (в этом определении ε_1 вводится для обеспечения строгой монотонности $\Lambda(x, y)$ по переменной y ; оно может быть выбрано сколь угодно малым). Дальнейшие построения в значительной, по мнению автора, степени продиктованы правилами приближения функций одного переменного сплайнами. Положим

$$f(x, y) =: \Lambda(x, y) - \mathcal{M}(x, y) + f(x, 0).$$

Хорошо известно, что функции $\Lambda(x, \cdot)$, $\mathcal{M}(x, \cdot)$ строго возрастают при любом фиксированном $x \in [0, 1]$. Приближим отдельно каждую из $\Lambda(\cdot)$, $\mathcal{M}(\cdot)$, $f(\cdot, 0)$. Начнем с функции $\Lambda(\cdot)$. Обозначим через $h(x, \cdot)$, $x \in [0, 1]$, функцию, обратную к $\Lambda(x, \cdot)$. Пусть $H \subset [0, 1] \times [0, \lambda]$ – область определения $h(\cdot)$, $G = \text{int } H$ – внутренность H (здесь $[0, \lambda]$ – образ $\mathbf{I}$ при отображении $\Lambda(\cdot)$); пусть $I(\Lambda) = \text{Var}_0^1(\Lambda(\cdot, 1))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{P}_r$, $r \in \mathbb{Z}_+$, – класс полиномов степени не выше r , $n \in \mathbb{N}$; $s(\cdot): \Delta \rightarrow [0, 1]$ – кусочно-полиномиальная функция, определенная на отрезке $\Delta \subseteq [0, 1]$, такая, что для некоторого разбиения $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ отрезка $[a_0, a_n] = \Delta$

$$s(\cdot) = p_i(\cdot) \in \mathcal{P}_r$$

на любом из интервалов (a_i, a_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots, n-1$; пусть $S_n^r[0, 1]$ – класс кусочно-полиномиальных функций типа $s(\cdot)$, которые начинаются и заканчиваются на границе квадрата $\mathbf{I}$, т.е. либо $a_0 = 0$, либо $s(a_0) = 0$ или $s(a_0) = 1$ и, аналогично, для a_n : либо $a_n = 1$, либо $s(a_n) = 0$ или $s(a_n) = 1$. Для функции $s(\cdot) \in S_n^r[0, 1]$ через $\bar{s}$ обозначим ее обобщенный график

$$\begin{aligned} \bar{s} = \{ (x, s(x)) \mid x \in \Delta \} \cup \{ (a_0, y) \mid y \in [s(a_0), p_0(a_0)] \} \cup \\ \cup \{ (a_n, y) \mid y \in [s(a_n), p_{n-1}(a_n)] \} \bigcup_{i=1}^{n-1} \{ (a_i, y) \mid y \in [p_{i-1}(a_i), p_i(a_i)] \}. \end{aligned} \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть S_n^r , $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, – класс кусочно-постоянных функций $S(z)$, определенных на $\mathbf{I}$, для которых при некотором наборе $n_j \in \mathbb{N}$, $j \in J$, $\sum_{j \in J} n_j \leq n$, выполняются следующие условия (положим $z = (x, y)$):

- 1) при каждом $x \in [0, 1]$ функция $S(x, \cdot)$ не убывает по переменной y ;
- 2) множество $\bar{S}$, состоящее из объединения всех границ областей постоянства $S(\cdot)$, может быть представлено в виде $\bigcup \{ \bar{s}_j \mid j \in J \}$ так, что каждое из $\bar{s}_j$ – обобщенный график функции $s_j(\cdot) \in S_{n_j}^r[0, 1]$, $j \in J$;
- 3) значение $S(z_0)$ для $z_0 \in \bar{S}$ равно одному из предельных значений, которые принимает $S(z)$, когда z приближается к z_0 и остается вне $\bar{S}$.

Через $\|\Lambda\|_B$ обозначим норму $\sup_{z \in I} |\Lambda(z)|$ в пространстве ограниченных функций, через $E_n^r(\Lambda)$ – величину $\inf_{S \in S_n^r} \|\Lambda - S\|_B$.

Пусть $w \in (0, \lambda)$, $G \cap \{(0, 1) \times w\} = \bigcup_j (x_{j,1}, x_{j,2}) \times w$ – разложение открытого в $(0, 1) \times w$ множества на не более чем счетное число максимальных связных компонент. Определим отображение $\Omega^*(w)$ одним из двух способов:

а) в первом случае обозначим через $p(\cdot, \tau_1, \tau_2, w)$, $e(\tau_1, \tau_2, w)$ соответственно полином и величину “наименьшего w -уклонения” на $[\tau_1, \tau_2]$:

$$p(\cdot, \tau_1, \tau_2, w) = \arg \left\{ e(\tau_1, \tau_2, w) = \inf \left\{ \max_{t \in [\tau_1, \tau_2]} |w - \Lambda(t, p(t))| \mid p \in \mathcal{P}_r, p(\cdot): [\tau_1, \tau_2] \rightarrow [0, 1] \right\} \right\};$$

б) во втором случае введем дополнительное ограничение гладкости: $h(\cdot) \in C^r(H)$ и

$$p(\cdot, \tau_1, \tau_2, w) = p(\cdot, \tau_1, w) = \sum_{i=0}^r \frac{h_x^{(i)}(\tau_1, w)(\cdot - \tau_1)^i}{i!},$$

$$e(\tau_1, \tau_2, w) = |w - \Lambda(\tau_2, p(\tau_2, \tau_1, w))|,$$

если $p(t, \tau_1, w) \in [0, 1]$ при всех $t \in [\tau_1, \tau_2]$, если нет – считаем $e(\tau_1, \tau_2, w) = 0$. В любом случае пусть

$$\Omega^*(w) = \sum_j \sup_{x_{j,1} \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m \leq x_{j,2}} \sum_{k=1}^{m-1} e(\tau_k, \tau_{k+1}, w)^{1/(r+1)}.$$

Чтобы не касаться вопросов, связанных с измеримостью функции $\Omega^*(\cdot)$, рассмотрим

$$\Omega(w_0) = \liminf_{w \rightarrow w_0} \Omega^*(w), \quad w_0 \in (0, \lambda), \quad I(\Lambda, r) = \int_{(0, \lambda)} \Omega(w) dw.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В качестве правила выбора полинома $p(\cdot, \tau_1, \tau_2, w)$ в этом определении можно выбирать аналог любой “естественной” процедуры интерполяции функции $h(\cdot, w)$, используемой при аппроксимации функций сплайнами на $[0, 1]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В этом замечании будем считать, что функции $\Lambda(\cdot)$ и $h(\cdot)$ достаточно гладкие. Для каждого j , участвующего в определении $\Omega^*(w)$, рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^m e(\tau_k, \tau_{k+1}, w)^{1/(r+1)}, \quad \tau_k = x_{j,1} + (x_{j,2} - x_{j,1}) \frac{k-1}{m}, \quad k = 1, \dots, m+1.$$

Вычислим предел, к которому она стремится с ростом m :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m e(\tau_k, \tau_{k+1}, w)^{1/(r+1)} &= \left(\sum_{k=1}^m \right)' \left| \Lambda(\tau'_k, h(\tau'_k, w)) - \Lambda(\tau'_k, p(\tau'_k, \tau_k, \tau_{k+1}, w)) \right|^{1/(r+1)} \\ &= \left(\sum_{k=1}^m \right)' \left| \Lambda_y(\tau'_k, \xi_k)(h(\tau'_k, w) - p(\tau'_k, \tau_k, \tau_{k+1}, w)) \right|^{1/(r+1)} \\ &\rightarrow \int_{x_{j,1}}^{x_{j,2}} \left| \Lambda_y(\tau, h(\tau, w)) \cdot h_x^{(r+1)}(\tau, w) / (r+1)! \right|^{1/(r+1)} d\tau \end{aligned}$$

(здесь $\tau'_k \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$ – промежуточная точка в случае (а), $\tau'_k = \tau_{k+1}$ – в случае (б), $\xi_k \in [h(\tau'_k, w), p(\tau'_k, \tau_k, \tau_{k+1}, w)]$ – промежуточная точка, $(\sum_{k=1}^m)'$ означает неполное суммирование: некоторые слагаемые, согласно определению $e(\tau_1, \tau_2, w)$, могут быть нулевыми, однако вклад их с ростом m стремится к нулю).

Поэтому в определенном смысле величину $I(\Lambda, r)$ можно считать “обобщенным” аналогом для

$$\bar{I}(\Lambda, r) = \int_{(0, \Lambda)} \sum_j \int_{x_{j,1}}^{x_{j,2}} \left| \frac{\Lambda_y(\tau, h(\tau, w)) \cdot h_x^{(r+1)}(\tau, w)}{(r+1)!} \right|^{1/(r+1)} d\tau dw.$$

Сделав замену переменной $w \rightarrow y, y = h(\tau, w)$, для каждого фиксированного τ получим (см. [1]):

при $r = 0$

$$\bar{I}(\Lambda, 0) = \int_{\mathbf{I}} |\Lambda_x \Lambda_y| dx dy;$$

при $r = 1$

$$\bar{I}(\Lambda, 1) = \int_{\mathbf{I}} \left| \frac{1}{2} (\Lambda_{xx} (\Lambda_y)^2 - 2\Lambda_{xy} \Lambda_x \Lambda_y + \Lambda_{yy} (\Lambda_x)^2) \right|^{1/2} dx dy.$$

Введем

$$d = \{z = (x, 1) \mid x \in [0, 1]\}, \quad d_i = \{z = (i, y) \mid y \in [0, 1]\}, \quad i = 0, 1, \quad d_2 = d \cup d_0 \cup d_1.$$

Упорядочим точки $z \in d_2$ по часовой стрелке: считаем, что $z_1 \leq z_2$, $z_1, z_2 \in d_2$, если

либо $z_1 = (x_1, y_1) \in d_0$ и $z_2 \in d \cup d_1$ или $z_2 = (x_2, y_2) \in d_0$ и $y_1 \leq y_2$;

либо $z_1 \in d$ и $z_2 \in d_1$ или $z_2 \in d$ и $x_1 \leq x_2$;

либо $z_1, z_2 \in d_1, y_1 \geq y_2$.

ТЕОРЕМА. В сделанных предположениях относительно n, r и $\Lambda(\cdot)$

$$E_n^r(\Lambda) \leq 4 \max \left\{ \left(\frac{I(\Lambda, r)}{n} \right)^{(r+1)/(r+2)}, \frac{2(I(\Lambda) + \Lambda(0, 1) + \Lambda(1, 1))}{n} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $E = E_n^r(\Lambda)$. Для значений $E_i = i \cdot E, i = 1, 2, \dots$, рассмотрим замкнутые множества

$$W_i = (\Lambda)^{-1}(E_i) \cup \left\{ z \in d: E_i - \frac{E}{4} \leq \Lambda(z) \leq E_i \right\}.$$

Пусть $\{L_j\}_{j \in J}$ – те связные компоненты, составляющие всевозможные W_i , которые не лежат целиком на d . Для каждого $j \in J$ обозначим через $i = i(j)$ индекс, при котором пересечение $L_j \cap (\Lambda)^{-1}(E_i) \neq \emptyset$.

ЛЕММА 1. Каждое из множеств L_j , $j \in J$, может быть задано как график непрерывного отображения $g_j(\cdot)$ некоторого отрезка

$$[x_1, x_2] = [x_1(j), x_2(j)] \subseteq [0, 1],$$

а именно

$$L_j = \{z = (x, g_j(x)) \mid x \in [x_1, x_2]\};$$

при этом

если $j_1, j_2 \in J$, $j_1 \neq j_2$, $i(j_1) = i(j_2)$, то $[x_1(j_1), x_2(j_1)] \cap [x_1(j_2), x_2(j_2)] = \emptyset$; точки $(x_s, g_j(x_s))$, $s = 1, 2$, принадлежат d_2 ;

если $x_1 > 0$, то $\Lambda(x_1, 1) = E_{i(j)} - E/4$;

если $x_2 < 1$, то $\Lambda(x_2, 1) = E_{i(j)} - E/4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $W = W_{i(j)}$, $P = \text{Pr}_x|_W$ – оператор проектирования на ось X , ограниченный на множество W , $\Delta = P(W)$. Так как отображение Λ строго монотонно по y , то из определения W следует, что любой отрезок вида $\{(x, y) : y \in [0, 1]\}$ пересекается с W не более чем по одной точке, т.е. непрерывное отображение P является биекцией между компактом W и Δ , а значит, и их гомеоморфизмом. Отсюда и из того, что при гомеоморфизмах связные компоненты переходят в связные компоненты, следуют первые два утверждения леммы. Проверим третье. Пусть нам задана какая-нибудь связная компонента $[x_1, x_2]$ множества Δ . Предположим, точка $(x_1, P^{-1}(x_1)) \notin d_0 \cup d$. Тогда

$$x_1 > 0, \quad 0 < P^{-1}(x_1) < 1.$$

Из свойств Λ вытекает, что для некоторого малого $\delta > 0$

$$0 = \Lambda(x, 0) < E_{i(j)} = \Lambda(x_1, P^{-1}(x_1)) < \Lambda(x, 1), \quad x \in [x_1 - \delta, x_1],$$

– противоречие со свойством максимальности компоненты. Аналогично показывается, что $(x_2, P^{-1}(x_2)) \in d_1 \cup d$.

Пусть теперь $x_1 > 0$. Могут представиться два случая:

$$\Lambda(x_1, 1) = E_{i(j)} - \frac{E}{4} \quad \text{или} \quad \Lambda(x_1, 1) = E_{i(j)}.$$

Предположим, что $\Lambda(x_1, 1) = E_{i(j)}$. Выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы $\Lambda(x, 1) > E_{i(j)} - E/4$ при $x \in (x_1 - \delta, x_1)$. Тогда отрезок $[x_1 - \delta, x_2]$ обязан принадлежать Δ , а это противоречит условию, что $[x_1, x_2]$ – связная компонента Δ . Утверждение, связанное с x_2 , рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Фиксируем $0 < \varepsilon < E/4$ (в дальнейшем мы устремим ε к $E/4$). Пользуясь леммой 1, для $j \in J$ по индукции определим последовательность $\{\tau_k\} \subset [x_1(j), x_2(j)]$ и функцию $s_j(\cdot)$ из $S_{k(j)}^T[0, 1]$ следующим образом:

1) пусть $\tau_0 = x_1(j)$, $s_j(\tau_0) = g_j(\tau_0)$;

2) пусть τ_k определено и не совпадает с $x_2(j)$; тогда, если для некоторого w такого, что $|E_{i(j)} - E/2 - w| \leq \varepsilon$, выполняется

в случае а) $e(\tau_k, x_2(j), w) \leq \varepsilon$,

в случае б) $|w - \Lambda(x, p(x, \tau_k, x_2(j), w))| \leq \varepsilon$, $p(x, \tau_k, x_2(j), w) \in [0, 1]$, $x \in [\tau_k, x_2(j)]$,

то $s_j(\cdot) = p(\cdot, \tau_k, x_2(j), w)$ на интервале $(\tau_k, x_2(j))$, $\tau_{k+1} = x_2(j)$, $s_j(\tau_{k+1}) = g_j(\tau_{k+1})$; если же это условие не выполняется, то

$$\tau_{k+1} = \sup_{w: |E_{i(j)} - E/2 - w| \leq \varepsilon} \inf \{x \in (\tau_k, x_2(j)) \mid e(\tau_k, x, w) \geq \varepsilon\},$$

и $s_j = p(\cdot, \tau_k, \tau_{k+1}, w)$ на интервале $(\tau_k, \tau_{k+1}]$ с параметром w , для которого $\sup$ в определении τ_{k+1} достигается.

Выберем $\sigma > 0$ так, чтобы $|\Lambda(z_1) - \Lambda(z_2)| < \varepsilon$, если $|z_1 - z_2| < \sigma$, и обозначим $w_0 = E_{i(j)} - E/2$. Тогда в случае а) определения последовательности τ_k величины τ_k и $\tau_{k+1} \neq x_2(j)$ не могут быть слишком близки:

$$\begin{aligned} \tau_{k+1} &\geq \inf \{x \in (\tau_k, x_2(j)) \mid \max_{t \in [\tau_k, x]} |w_0 - \Lambda(t, h(\tau_k, w_0))| \geq \varepsilon\} \\ &= \inf \{x \in (\tau_k, x_2(j)) \mid \max_{t \in [\tau_k, x]} |\Lambda(\tau_k, h(\tau_k, w_0)) - \Lambda(t, h(\tau_k, w_0))| \geq \varepsilon\} \geq \tau_k + \sigma. \end{aligned}$$

Это означает, что процесс построения τ_k должен остановиться: $\tau_{k(j)} = x_2(j)$ для некоторого $k(j) \in \mathbb{N}$.

Предположим, что в случае б) определения последовательности τ_k процесс построения продолжается неограниченно. Тогда, поскольку $\Lambda(x, 0) = 0$, $\Lambda(x, 1) \geq E_{i(j)} - E/4$, $\Lambda(x, h(x, w_0)) = w_0 = E_{i(j)} - E/2$ при всех $x \in [x_1(j), x_2(j)]$ и

$$\begin{aligned} \tau_{k+1} &\geq \inf \{x \in (\tau_k, x_2(j)) \mid |w_0 - \Lambda(x, p(x, \tau_k, w_0))| \geq \varepsilon\} \\ &= \inf \{x \in (\tau_k, x_2(j)) \mid |\Lambda(\tau_k, p(\tau_k, \tau_k, w_0)) - \Lambda(x, p(x, \tau_k, w_0))| \geq \varepsilon\}, \end{aligned}$$

получим, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется точка $x^* \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$ со свойством: расстояние между точками $(\tau_k, p(\tau_k, \tau_k, w_0))$ и $(x^*, p(x^*, \tau_k, w_0))$ на плоскости больше фиксированного $\sigma > 0$. Это означает, что система коэффициентов $\{h_x^{(i)}(\tau_k, w_0)\}_{i=1}^r$ полинома $p(\cdot, \tau_k, w_0)$ не может оставаться ограниченной с ростом k , что противоречит условию $h(\cdot) \in C^r(H)$. Поэтому в случае б) процесс построения последовательности τ_k также обрывается: $\tau_{k(j)} = x_2(j)$ для некоторого $k(j) \in \mathbb{N}$.

Перечислим простые следствия сделанных построений:

- 1) функция $s_j(\cdot) \in S_{k(j)}^r[0, 1]$ определена на $[x_1(j), x_2(j)]$;
- 2) $L^j = \bar{s}_j$ — связная линия без самопересечений, ее граничные точки $(\tau_0, g_j(\tau_0))$ и $(\tau_{k(j)}, g_j(\tau_{k(j)}))$ расположены на d_2 ;
- 3) для любого $x_0 \in [x_1(j), x_2(j)]$ множество $\{z \in L^j \mid z = (x_0, y)\}$ является точкой или отрезком;
- 4) для любого $z \in \bar{s}_j$

$$\left| E_{i(j)} - \frac{E}{2} - \Lambda(z) \right| \leq 2\varepsilon.$$

Построим пары g_j, L^j для всех $j \in J$. Из определения следует, что для любого i и любого w такого, что $|E_i - E/2 - w| < \varepsilon$, выполнена оценка

$$\begin{aligned} \Omega(w) &\geq \sum_{j: i=i(j)} (k(j) - 1) \cdot \varepsilon^{1/(r+1)}, \\ \int_{[E_{i-1}, E_i]} \Omega(w) dw &\geq 2 \sum_{j: i=i(j)} (k(j) - 1) \cdot \varepsilon^{(r+2)/(r+1)}. \end{aligned} \quad (2)$$

ЛЕММА 2. Если $j, k \in J$, $j \neq k$, то $L^j \cap L^k = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $i(j) = i(k)$, то по лемме 1

$$[x_1(j), x_2(j)] \cap [x_1(k), x_2(k)] = \emptyset.$$

По свойству 1)

$$\Pr_x\{L^j\} = [x_1(j), x_2(j)]$$

и аналогично для k , что доказывает лемму в этом случае. Пусть $i(j) < i(k)$, и предположим, что $z \in L^j \cap L^k$. По свойству 4)

$$\left| E_{i(j)} - \frac{E}{2} - \Lambda(z) \right| \leq 2\varepsilon, \quad \left| E_{i(k)} - \frac{E}{2} - \Lambda(z) \right| \leq 2\varepsilon.$$

Поэтому

$$E_{i(k)} - E_{i(j)} = \left(E_{i(k)} - \frac{E}{2} - \Lambda(z) \right) - \left(E_{i(j)} - \frac{E}{2} - \Lambda(z) \right) < E$$

— противоречие. Лемма доказана.

Обозначим через $|J|$ количество элементов в J .

ЛЕММА 3. Имеет место оценка

$$\text{Var}_0^1 \Lambda(\cdot, 1) + \Lambda(0, 1) + \Lambda(1, 1) \geq |J| \cdot \frac{E}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $J_0 \subset J$ — множество всех тех $j \in J$, для которых $x_1(j) = 0$. Если для всех $j \in J_0$ выполнено равенство $g_j(0) = E_{i(j)}$, то $\Lambda(0, 1) \geq E_{|J_0|} = |J_0| \cdot E$; положим $x^1 = 0$, $\Delta = [0, x^1]$, $\text{Var}_\Delta \Lambda(\cdot, 1) = 0$. Тогда

$$\Lambda(0, 1) + \text{Var}_\Delta \Lambda(\cdot, 1) \geq \Lambda(x^1, 1) \geq |J_0| \cdot E. \quad (3)$$

Если для некоторого $j \in J_0$ выполнено $g_j(0) < E_{i(j)}$, то из определения L_j следует, что $g_j(0) = 1$, $i(j) = |J_0|$; положим $x^1 = \min\{x \in [0, 1] \mid \Lambda(x, 1) = E_{i(j)}\}$, $\Delta = \Delta_1(j) = [0, x^1]$. Тогда

$$\{\Delta, 1\} \subset L_j \quad (4)$$

и (3) также выполнено. Допустим теперь, что $j \notin J_0$. По лемме 1

$$g_j(x_1(j)) = 1, \quad \Lambda(x_1(j), 1) = E_{i(j)} - \frac{E}{4},$$

для $x^1(j) = \min\{x \in [x_1(j), 1] \mid \Lambda(x, 1) = E_{i(j)}\}$, $\Delta_1(j) = [x_1(j), x^1(j)]$ выполняется (4) и

$$\text{Var}_{\Delta_1(j)} \Lambda(\cdot, 1) \geq \frac{E}{4}. \quad (5)$$

По аналогии определяются $J_1 \subset J$ – множество всех тех $j \in J$, для которых $x_2(j) = 1, x^2$,

$$x^2(j) = \max\{x \in [0, x_2(j)] \mid \Lambda(x, 1) = E_{i(j)}\}, \quad \Delta_2(j) = [x^2(j), x_2(j)],$$

удовлетворяющие (4), и разбираются неравенства

$$\Lambda(1, 1) + \text{Var}_\Delta \Lambda(\cdot, 1) \geq |J_1| \cdot E, \quad (6)$$

$$\text{Var}_{\Delta_2(j)} \Lambda(\cdot, 1) \geq \frac{E}{4}. \quad (7)$$

Согласно определению и условию (4) никакие два разных отрезка из набора $\{\Delta_1(j), \Delta_2(j)\}$, $j \in J$, не пересекаются. Поэтому

$$\text{Var}_0^1 \Lambda(\cdot, 1) \geq \sum_j (\text{Var}_{\Delta_1(j)} \Lambda(\cdot, 1) + \text{Var}_{\Delta_2(j)} \Lambda(\cdot, 1))$$

(в сумме справа любое из неопределенных слагаемых считается равным нулю). Совмещая последнее неравенство с (3), (6), (5), (7), получим утверждение леммы.

Ниже мы покажем, что

$$n \leq \sum_{j \in J} (k(j) + 1), \quad (8)$$

а сейчас, пользуясь этим фактом, установим оценку теоремы: в силу (8) выполнено хотя бы одно из двух условий:

- 1) $\sum_{j \in J} (k(j) - 1) \geq n/2$ или
- 2) $|J| \geq n/4$.

Поэтому либо по лемме 3

$$E_n = E \leq \frac{8(I(\Lambda) + \Lambda(0, 1) + \Lambda(1, 1))}{n},$$

либо по (2)

$$(\varepsilon)^{(r+2)/(r+1)} \leq \frac{I(\Lambda, r)}{n}.$$

Поскольку $\varepsilon < E/4$ может быть выбрано сколь угодно близким к $E/4$, из этих неравенств следует утверждение теоремы. Таким образом остается проверить (8). Для этого с помощью введенных функций g_j построим аппроксимацию Λ .

Множество L^j разбивает квадрат $\mathbf{I}$ на некоторое количество связанных открытых в $\mathbf{I}$ компонент. Согласно свойству 4) L^j не пересекается с отрезком

$$d_3 = \{z = (x, 0) \mid x \in [0, 1]\}.$$

Поэтому одна из компонент – обозначим ее U_j – содержит этот отрезок.

ЛЕММА 4. Пусть $j \in J$, $x \in [0, 1]$. Тогда для $\Delta(x) = \{z = (x, y) \mid y \in [0, 1]\}$ выполнены утверждения:

- 1) $\Delta(x) \subset U_j$ при $x \notin [x_1(j), x_2(j)]$;
- 2) $\Delta(x) \cap U_j =: \{z = (x, y) \mid y \in [0, y(x))\}$, $(x, y(x)) \in L^j$, при $x \in [x_1(j), x_2(j)]$ (здесь $y(x) = y_j(x)$).

Доказательство этой леммы прямо следует из определений.

Зададим функцию F на $\mathbf{I}$ следующим образом: пусть $z \in \mathbf{I}$, тогда

$$F(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z \in U_j \text{ при всех } j \in J, \\ \max\{E_{i(j)} \mid z \notin U_j, j \in J\} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

ЛЕММА 5. *Функция F принадлежит классу S_N^r при некотором $N \in \mathbb{N}$. При этом точки разрыва F лежат на L^k , $k \in J$, а линии разрыва состоят из звеньев, образующих L^k , $k \in J$.*

Доказательство. Как следует из построения, F определена на $\mathbf{I}$ и принимает конечное число значений. Пусть $x \in [0, 1]$, $0 < y_1 < y_2 \leq 1$. По лемме 4, если $y_1 \notin U_j$ при каком-нибудь $j \in J$, то и $y_2 \notin U_j$. Поэтому F удовлетворяет условию монотонности из определения 1. Обозначим

$$I' = \mathbf{I} \setminus \left\{ \bigcup_{j \in J} L^j \right\}$$

открытое в $\mathbf{I}$ множество. Из свойства монотонности и того, что $F(z) \in F(I')$ для $z \in L^j$, следует условие 3) определения 2. Пусть M – какая-нибудь связная компонента I' . Так как M не пересекается ни с одним L^j , $j \in J$, то для каждого $j \in J$ либо $M \subseteq U_j$, либо $M \cap U_j = \emptyset$. Поэтому F постоянна на M и, значит, кусочно-постоянна на $\mathbf{I}$. В силу открытости I' в $\mathbf{I}$ отсюда следует также, что F непрерывна во всех точках I' . Это доказывает второе утверждение леммы.

Проверим последнее. По определению граница M в $\mathbf{I}$ лежит в $\bigcup_{j \in J} L^j$; пусть ∂ – ее связная компонента. По лемме 2 для некоторого $j \in J$ выполнено включение $\partial \subseteq L^j$. По свойству 3) L^j гомеоморфно отрезку, поэтому ∂ также гомеоморфно отрезку и определены z_1, z_2 – концы ∂ . Далее, предположим z_1 (или z_2) лежит внутри некоторого Δ , являющегося звеном L^j из (1):

$$z_1 \in \Delta = \{(a_i, y) \mid y \in (p_{i-1}(a_i), p_i(a_i))\} \quad \text{или} \quad \Delta = \{(x, s(x)) \mid x \in (a_i, a_{i+1})\}$$

при некотором i . Выберем малую окрестность $U \subset \mathbf{I}$ точки z_1 (круг, если $z_1 \notin d_2$, или половину круга, если $z_1 \in d_2$, – по предположениям z_1 не является угловой точкой $\mathbf{I}$), которая из всех звеньев, составляющих L^k при всех $k \in J$, пересекается только с Δ . При необходимости уменьшая U , можно считать, что Δ разбивает U на не более чем две части, одна из которых лежит в M . Однако это противоречит определению z_1 как граничной точки ∂ . Таким образом, линии разрыва F состоят из частей, которые являются звеньями L^k , $k \in J$. Аналогично показывается, что z_1 (как и z_2) принадлежат d_2 .

Отметим, таким образом, что граница $M \setminus d_2$ состоит либо из линий разрыва F , либо отрезков на d_2 . Поэтому, так как замыкание каждой области постоянства F совпадает с замыканием некоторого множества $\bigcup M_j$, где M_j – множества типа M , а индекс j пробегает некоторый специфичный для данной области набор индексов из J , то условие 2) определения 1, а вместе с ним и лемма доказаны.

ЛЕММА 6. *Имеет место оценка*

$$\|\Lambda - F\|_{C(I)} \leq E. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5, определению класса S_N^r и непрерывности Λ на $\mathbf{I}$ требуемое для доказательства (9) неравенство

$$|\Lambda(z) - F(z)| \leq E \quad (10)$$

достаточно проверить для $z = (x, y) \in \mathbf{I}$, $z \notin d_2$, $z \notin L^j$ при всех $j \in J$.

Если $z \in U_j$ при всех $j \in J$, то

$$0 \leq \Lambda(z) \leq E.$$

Действительно, пусть $\Lambda(z) > E$. Тогда для некоторого $j \in J$, $i(j) = 1$, множество L_j отделяет z от d_3 на $\mathbf{I}$. В силу леммы 1 $x \in [x_1(j), x_2(j)]$. Пользуясь леммой 4 и свойством 4), получим

$$y < y_j(x), \quad \Lambda(x, y) < \Lambda(x, y_j(x)) \leq E_{i(j)} = E$$

– противоречие. Следовательно, для таких z

$$|\Lambda(z) - F(z)| = |\Lambda(z)| \leq E.$$

Пусть $z \notin U_j$, $j \in J$; тогда $F(z) \geq E_{i(j)}$; предположим, что $\Lambda(z) \leq (i(j) - 1)E$. По лемме 4 $x \in [x_1(j), x_2(j)]$, по свойству 4)

$$\Lambda(z) \leq (i(j) - 1)E < \Lambda(x, y_j(x)),$$

т.е. $0 \leq y < y_j(x)$, L^j не отделяет z от d_3 , $z \in U_j$ – противоречие. Поэтому

$$\Lambda(z) > (i(j) - 1)E, \quad \Lambda(z) - E_{i(j)} > -E.$$

Выберем $j \in J$ так, чтобы $z \notin U_j$ и чтобы $F(z) = E_{i(j)}$. Тогда

$$\Lambda(z) - F(z) \geq -E. \quad (11)$$

Предположим $\Lambda(z) > (i(j) + 1)E$ и, значит, найдется $j_0 \in J$, $i(j_0) = (i(j) + 1)$, такое, что множество L_{j_0} отделяет z от d_3 на $\mathbf{I}$; по лемме 1 $x \in [x_1(j_0), x_2(j_0)]$. В силу определения индекса $i(j)$ точка $z \in U_{j_0}$. По лемме 4 и свойству 4)

$$\Lambda(x, y) < \Lambda(x, y_{j_0}(x)) \leq E_{i(j_0)}$$

– противоречие. Таким образом, $\Lambda(z) - F(z) \leq E$. Комбинируя это неравенство с (11), получаем (10). Лемма доказана.

Согласно леммам 5 и 6 $F \in S_N^r$, $E_N \leq E = E_n$, а значит, $n \leq N \leq \sum_{j \in J} (k(j) + 1)$. Неравенство (8), а вместе с ним и теорема доказаны.

Пусть s_n – класс кусочно-постоянных на $[0, 1]$ функций с числом интервалов постоянства не выше $n \in \mathbb{N}$ со значениями в $\mathbb{R}$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся функции $F_1, F_2 \in S_n^r$, $F_3(x, y) \equiv s(x)$, $s(\cdot) \in s_n$, такие, что

$$\|f - F_1 + F_2 - F_3\|_B \leq 4 \max \left\{ \left(\frac{I(\Lambda, r)}{n} \right)^{(r+1)/(r+2)}, \frac{2(I(\Lambda) + \Lambda(0, 1) + \Lambda(1, 1))}{n} \right\} \\ + 4 \max \left\{ \left(\frac{I(\mathcal{M}, r)}{n} \right)^{(r+1)/(r+2)}, \frac{2(I(\mathcal{M}) + \mathcal{M}(0, 1) + \mathcal{M}(1, 1))}{n} \right\} + \frac{\text{Var}_0^1(f(\cdot, 0))}{n} + \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения следует из теоремы, разложения $f(x, y) = \Lambda(x, y) - \mathcal{M}(x, y) + f(x, 0)$, $(x, y) \in \mathbf{I}$, и хорошо известного неравенства $e_n(f(\cdot, 0)) \leq \text{Var}_0^1(f(\cdot, 0))/n$ (здесь $e_n(f(\cdot, 0))$ – величина наилучшего приближения функциями из s_n в метрике пространства B на отрезке $[0, 1]$).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае $r = 0$ вместо $I(\Lambda, 0)$ можно использовать величину

$$I^*(\Lambda, 0) = \sup_{\substack{u(\cdot) \in C_0^1((0, 1)^2) \\ \|u\|_C \leq 1}} \int_0^\lambda \omega \cdot \left\{ \int_{z \in L_\omega} \frac{\partial u}{\partial x}(z) dx \right\} d\omega$$

(здесь $L_\omega = \{z \in \mathbf{I} \mid \Lambda(z) = \omega\}$, $C_0^1((0, 1)^2) \subset C^1(\mathbf{I})$ – класс гладких функций с носителем внутри $(0, 1)^2$) и незначительным изменением деталей доказательства установить справедливость теоремы и следствия, когда вместо $I(\Lambda, 0)$, $I(\mathcal{M}, 0)$ стоят $I^*(\Lambda, 0)$, $I^*(\mathcal{M}, 0)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kochurov A. S. Approximation by piecewise constant functions on the square // East J. Approximations. 1995. V. 1. № 4. P. 463–478.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: kochurov@math.msu.su

Поступило
25.07.2000
Исправленный вариант
22.07.2003