Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Григорьев, Об ортомассивности множества характеристических функций выпуклых множеств, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 1, 151–155

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm540>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 07:57:21

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ ОРТОМАССИВНОСТИ МНОЖЕСТВА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

П. Г. Григорьев

В заметке представлены дополнения к результатам недавней работы Б. С. Кашина [1], где была получена нижняя оценка для наилучших n -членных приближений класса K_2 характеристических функций выпуклых подмножеств квадрата по произвольной ортонормированной системе в метрике гильбертова пространства, а также оценка *характеристики ортомассивности* класса K_2 . Автором установлена оценка сверху ортомассивности данного класса функций, а также замечено, что метод, примененный в [1], без труда переносится на d -мерный случай.

Введем необходимые обозначения. Пусть $A \subset [0, 1]^d$; обозначим

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A; \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Положим

$$K_d := \{\chi_A(x) : A - \text{выпуклое подмножество куба } [0, 1]^d\}.$$

Пусть $\Phi = \{\phi_j\}_{j \in J}$ – произвольная система функций из $L_2[0, 1]^d$; *наилучшим n -членным приближением* функции $f \in L_2[0, 1]^d$ по системе Φ называется величина

$$e_n(f, \Phi) := \inf_{\Lambda \subset J : |\Lambda| \leq n, a_j \in \mathbb{R}} \left\| f - \sum_{j \in \Lambda} a_j \phi_j \right\|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для функционального класса $F \subset L_2[0, 1]^d$ определим наилучшее n -членное приближение формулой

$$e_n(F, \Phi) := \sup_{f \in F} e_n(f, \Phi). \quad (1)$$

В связи с приложениями n -членных приближений для сжатия изображений С. В. Конягин в 1993 г. поставил вопрос об асимптотике величин $e_n(K_d, \Phi)$ при $n \rightarrow \infty$ в предположении, что Φ – некоторая ортонормированная система (ОНС). Вероятно этот вопрос возник из-за следующего интуитивно очевидного факта: *произвольный класс функций на квадрате, достаточно полно представляющий “реальные” изображения, содержит K_2 .*

При $d = 1$ величины (1) убывают экспоненциально; в качестве соответствующей системы функций Φ можно взять систему Хаара. Однако при $d = 2$ ситуация качественно меняется. В [1] было

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №№ 02-01-00315, НШ-1549.2003.1.

доказано, что существует константа $c > 0$ такая, что для любой ортонормированной системы Φ справедливо

$$e_n(K_2, \Phi) \geq \frac{c}{n}. \quad (2)$$

Более того, в [1] с помощью результатов работы [2] получен аналог оценки (2) для фреймов¹. Пусть $\Phi = \{\phi_j\}_{j \in J}$ – жесткий фрейм в $L_2[0, 1]^d$; для класса функций $K \subset L_2[0, 1]^d$ положим

$$\sigma_n(K, \Phi) := \sup_{f \in K} \inf_{\Lambda \subset J, |\Lambda| \leq n} \left\| f - \sum_{j \in \Lambda} (f, \phi_j) \phi_j \right\|_2.$$

Аналог оценки (2) для жесткого фрейма Φ имеет вид

$$\sigma_n(K_2, \Phi) \geq \frac{c}{n}.$$

Отметим также работу Донохо [4]. В [4] установлена оценка снизу (с порядком $1/n$) для модифицированных n -членных приближений класса характеристических функций звездных множеств с гладкой границей, когда вместо наилучшего приближения по ортогональной системе рассматривалось приближение по произвольной системе функций, при условии, что *время, затрачиваемое на поиск приближающей линейной комбинации, полиномиально ограничено* (см. точную формулировку в [4]). Для нижних оценок в [1] и [4] используется свойство многомерного куба, вложенного в соответствующие классы функций, про который известно, что он *несжимаем* (см. [5]).

Стоит также отметить, что не известно существует ли ортогональная система, для которой оценка (2) точна по порядку. Наилучшая известная верхняя оценка для ортогональной системы дает порядок $e_n(K_2, \Phi) \leq cn^{-1/2}$. В [6] получена соответствующая оценка для приближений по системе Хаара функций ограниченной вариации на квадрате, там же построен приближающий алгоритм. Вместе с тем Кандес и Донохо в [7] построили жесткий фрейм в $L_2[0, 1]^2$, для которого установлено, что

$$e_n(K_2^*, \Phi) \leq cn^{-1}(\log n)^{3/2},$$

где K_2^* – множество функций вида $f = f_0 + f_1 \cdot \chi_B$, $f_0, f_1 \in C^2([0, 1]^2)$, B – произвольное звездное множество с C^2 -границей.

Автором замечено, что оценка (2) без труда может быть обобщена на общий d -мерный случай. Справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Для произвольного $d \geq 2$ существует постоянная $c(d)$ такая, что для произвольной ортонормированной системы Φ справедливо*

$$e_n(K_d, \Phi) \geq c(d)n^{-1/(d-1)},$$

причем константу $c(d)$ можно оценить $c(d) \geq c\sqrt{dv_d}$, где $v_d := \pi^{d/2}/\Gamma(d/2 + 1)$ – объем единичного евклидова шара в $\mathbb{R}^d$, а $c > 0$ – абсолютная константа. Для произвольного жесткого фрейма Φ имеет место

$$\sigma_n(K_d, \Phi) \geq c(d)n^{-1/(d-1)}.$$

¹Определение фрейма и жесткого фрейма (ЖФ) можно найти в [2] или [3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1 существенно не отличается от доказательства соответствующего двумерного результата в [1]. Надо лишь заменить вершины правильного вписанного в единичный круг n -угольника некоторой оптимальной ε -сетью на поверхности d -мерного шара, а затем воспользоваться результатом работы [5] (подробнее см. [1]).

Кашин [1] ввел понятие *ортомассивности* произвольного подмножества K единичного шара гильбертова пространства H . По определению

$$OM_n(K) := n^{-1/2} \sup_{\substack{\{\psi_j\}_{j=1}^n - \text{ОНС} \\ \{f_j\}_{j=1}^n \subset K}} \sum_{j=1}^n (\psi_j, f_j), \quad n = 1, 2, \dots$$

Величину $OM_n(K)$ будем называть *характеристикой* ортомассивности множества K . Легко видеть, что всегда $OM_n(K) \leq n^{1/2}$. В [1] отмечено, что для $K = K_1 \subset L_2[0, 1]$ справедливо $OM_n(K_1) \asymp \log n$, а для π_d – множества характеристических функций d -мерных параллелепипедов, лежащих в кубе со сторонами, параллельными граням куба, справедливо

$$OM_n(\pi_d) \asymp (\log n)^d. \quad (3)$$

Для $K_2 \subset L_2[0, 1]^2$ в [1] доказана оценка

$$OM_n(K_2) \geq cn^{1/6}. \quad (4)$$

Автором замечено, что конструкция, использованная в [1] для доказательства (4), без сколь-нибудь существенных изменений переносится на d -мерный случай. Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Для произвольного $d \geq 2$ существует постоянная $c'(d)$ такая, что

$$OM_n(K_d) \geq c'(d)n^{1/2-1/(d+1)},$$

причем константу $c'(d)$ можно оценить $c'(d) \geq c'\sqrt{dv_d}$, где $c' > 0$ – абсолютная константа.

Верхняя оценка в (3) тесно связана с оценками можоранты прямоугольных частных сумм многомерного ряда. В одномерном случае оценка (см. [8, лемма 1, с. 333])

$$\int \max_{1 \leq n \leq N} \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) \right|^2 d\mu(x) \leq CN(\log N)^2, \quad (5)$$

где $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ – ОНС на некотором вероятностном пространстве, используется для доказательства теоремы Меньшова–Радемахера. С помощью (5) доказана следующая

ТЕОРЕМА 3. Для произвольного $d \geq 2$ существует постоянная $c''(d)$ такая, что

$$OM_n(K_d) \leq c''(d)n^{1/2-1/(2d)}(\log n)^{1/d}.$$

Приведем ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3 в двумерном случае. Пусть $\{A_j\}_1^n$ – выпуклые подмножества единичного квадрата, а $\{\chi_j\}_1^n$ – их характеристические функции. Для произвольного $m = 1, 2, \dots$ выпуклое множество A_j можно представить в виде дизъюнктного объединения

$$A_j = \left(\bigcup_{k=1}^m B_{j,k} \right) \cup R_j,$$

Рис. 1. Принцип разбиения множеств A_j ($m = 5$).

где $B_{j,k}$ имеют вид: $B_{j,k} = [(k-1)/m, k/m) \times [a_j, b_j]$, а меру остатка R_j можно оценить $\text{meas}(R_j) \leq 4/m$.

Пусть $\chi_{j,k}$ и r_j обозначают характеристические функции множеств $B_{j,k}$ и R_j соответственно; очевидно, $\|r_j\|_2 \leq 2m^{-1/2}$.

Для произвольной ОНС $\{g_j\}_1^n$ имеем

$$\sum_{j=1}^n (\chi_j, g_j) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^m (\chi_{j,k}, g_j) + (r_j, g_j) \right) \leq \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n (\chi_{j,k}, g_j) + 2 \frac{n}{\sqrt{m}}.$$

Применяя (5) для функции

$$F_k := \sum_{j=1}^n \chi_{j,k} g_j,$$

получим $\|F_k\|_2 \leq \text{const} \cdot \sqrt{n} \log n$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^n (\chi_{j,k}, g_j) = \sum_{j=1}^n \int_{B_{j,k}} g_j \leq \int_{[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}] \times [0,1]} |F_k| \leq \frac{\|F_k\|_2}{\sqrt{m}} \leq \frac{\text{const} \cdot \sqrt{n} \log n}{\sqrt{m}}.$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^n (\chi_j, g_j) \leq \text{const} \cdot \sqrt{mn} \log n + 2 \frac{n}{\sqrt{m}}.$$

Оптимизируя по m , получим

$$\sum_{j=1}^n (\chi_j, g_j) \leq C n^{3/4} (\log n)^{1/2}.$$

Доказательство теоремы в d -мерном случае проводится по той же схеме.

Верхняя оценка ортомассивности класса характеристических функций выпуклых подмножеств куба на степенной порядок отличается от нижней. При $d = 2$ имеем

$$n^{1/6} \ll OM_n(K_2) \ll n^{1/4} (\log n)^{1/2}. \quad (6)$$

В связи с попытками улучшить верхнюю оценку возникла следующая задача оценки можорант ортогонального ряда по треугольникам.

ЗАДАЧА. Пусть $\{f_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty}$ – произвольная ОНС на вероятностном пространстве. Для $N = 1, 2, \dots$ определим можоранту по треугольным суммам

$$F_N(x) := \sup_{A, B > 0: AB \leq N} \sum_{A \leq j + B \leq AB} f_{j,k}(x).$$

Верно ли, что справедлива оценка

$$\|F_N\|_2 \leq C\sqrt{N}(\log N)^2? \quad (7)$$

Оценка (7) позволила бы улучшить верхнюю оценку в (6) до порядка $n^{1/6}(\log n)^{4/3}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кашин Б. С. // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 4. С. 509–515.
2. Кашин Б. С., Куликова Т. Ю. // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 2. С. 312–315.
3. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.-Ижевск: РХД, 2001.
4. Donoho D. L. // Constr. Approx. 2001. V. 17. № 3. P. 353–382.
5. Кашин Б. С. // Тр. МИАН. 1985. Т. 172. С. 187–191.
6. Cohen A., DeVore R., Petrushev P., Xu Y. // Amer. J. Math. 1999. V. 121. P. 587–628.
7. Candès E. L., Donoho D. L. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with C^2 singularities. Preprint. Доступен на <http://www.acm.caltech.edu/emmanuel/publications.html>.
8. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. 2-е изд. М.: АФЦ, 1999.