Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Н. Берестовский, Об одном свойстве нулей функции Бесселя $J_0(\mu)$, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 2, 302

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm542>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 16:32:34

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ НУЛЕЙ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ $J_0(\mu)$

Г. Н. Берестовский

Результатом настоящей статьи является следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для положительных корней уравнения $J_0(\mu) = 0$, где $J_0(\mu)$ – бesselева функция нулевого порядка, справедливо соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} = \frac{1}{4}. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим решение задачи об остывании равномерно нагретого до температуры u_0 бесконечного круглого цилиндра, $0 \leq r \leq r_0$, при нулевой температуре на его поверхности (см. [1, с. 461, формула (31)]):

$$\frac{u(r, t)}{u_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r / r_0)}{\mu_n J_1(\mu_n)} \exp\left(-\frac{\mu_n^2 a^2 t}{r_0^2}\right),$$

где μ_n – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Проинтегрировав это выражение по сечению, получим для начального момента времени $t = 0$ следующее уравнение для относительного количества тепла в цилиндре:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi u_0}{\mu_n J_1(\mu_n)} \int_0^{r_0} r J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr = \pi r_0^2 u_0.$$

Поскольку интеграл в этом уравнении равен $r_0^2 J_1(\mu_n) / \mu_n$, то окончательно получаем доказываемое соотношение (1).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.