Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Шамаров, Преобразование Фурье распределений однородных случайных полей с независимыми приращениями и комплексные цепи Маркова–Маслова, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 2, 311–316

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm543>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 18:37:04

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА–МАСЛОВА

Н. Н. Шамаров

Доказаны формулы, описывающие, при некоторых достаточно общих условиях, преобразования Фурье распределений процессов и полей, о которых говорится в заглавии. Аналогичный метод,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-01074.

© Н. Н. ШАМАРОВ 2004

примененный к комплексным марковским цепям на конечном отрезке, может быть использован для нахождения преобразования Фурье комплексной пуассоновской меры из [1, гл. IX] (там оно найдено с помощью разложения меры в ряд) исходя из ее конечномерных распределений.

Пространство значений случайного поля предполагается полским (= полным сепарабельным метризуемым) локально выпуклым пространством, однако, по-видимому, результаты являются новыми и для вещественных процессов. О процессах предполагается также, что их траектории не имеют разрывов второго рода относительно (ослабленной) топологии пространства значений; таковы, в частности, процессы скачков пуассоновского типа. Ранее [2] такая формула была доказана только для процессов с сильно непрерывными траекториями. О применении аналогичной конструкции для непрерывных полей к частному случаю полей Винера–Леви–Ченцова [3] см. также [2].

1. Терминология, обозначения и вспомогательные результаты. Если V – вещественное векторное пространство, F – множество линейных функционалов на V , $x \in V$ и $f \in F$, то $\langle f, x \rangle$ определяется равенством $\langle f, x \rangle = f(x)$. Для $a > 0$ и (размеченного) разбиения

$$T = \{0 = t_0^T \leq t_1^T \leq t_2^T \leq \dots \leq t_{N_T}^T = a\}$$

отрезка $[0, a]$ на отрезки $\Delta_j^T = [t_{j-1}^T; t_j^T] \ni s_j^T$ полагаем

$$d(T) = \max\{|\Delta_j^T| : j = 1, 2, \dots, N_T\}, \quad \text{где } |\Delta_j^T| = t_j^T - t_{j-1}^T.$$

Если для функций $X: [0, \infty) \rightarrow V$ и $G: [0, \infty) \rightarrow F$ существует предел сумм

$$\sum_{j=1}^{N_T} \langle G(s_j^T), X(t_j^T) - X(t_{j-1}^T) \rangle$$

при $d(T) \rightarrow 0$, обозначим его символом $\int_0^a \langle G, dX \rangle$; аналогично, если для сумм

$$\sum_{j=1}^{N_T} \langle G(t_j^T) - G(t_{j-1}^T), X(s_j^T) \rangle$$

существует предел при $d(T) \rightarrow 0$, обозначим его $\int_0^a \langle dG, X \rangle$. Пределы сумм двух этих типов будем называть *интегралами Стильтьеса*, а сами суммы – *интегральными*. Преобразование Абеля, примененное к таким интегральным суммам, приводит к следующей лемме.

ЛЕММА 1. Если $X(0) = 0$ и $G(a) = 0$, то

$$\int_0^a \langle G, dX \rangle = - \int_0^a \langle dG, X \rangle$$

(существование любой из частей этого равенства влечет существование другой).

Далее без специальных оговорок используются терминология и обозначения для топологий локально выпуклых пространств (ЛВП) из книги [4].

Если μ – некоторая F -цилиндрическая мера [5] на V , то комплекснозначная функция $\tilde{\mu}$ на F называется F -преобразованием Фурье меры μ , если для всякого $f \in F$, выполнено равенство

$$\tilde{\mu}(f) = \int_V e^{if(x)} \mu(dx);$$

если V – ЛВП и $F = V^*$, где символом V^* обозначается топологически сопряженное к ЛВП V векторное пространство, то F опускается.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если F является векторным пространством и разделяет точки в V , а мера μ счетно аддитивна, то преобразование Фурье секвенциально непрерывно относительно слабой топологии $\sigma(F, V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это предположение следует из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если в условиях предложения 1 существует функция $K_\mu: F \rightarrow \mathbb{C}$, секвенциально непрерывная относительно $\sigma(F, V)$, такая, что $\tilde{\mu}(f) \equiv e^{K_\mu(f)}$ и $K(0) = 0$, то она называется *кумулянтной меры* μ^1 .

Далее символ X будет обозначать произвольное ЛВП, которое мы рассматриваем как измеримое пространство относительно его борелевской сигма-алгебры B_X ; X_β^* – топологически сопряженное к ЛВП X пространство X^* , наделенное сильной топологией $\beta(X^*, X)$.

ЛЕММА 2 [5]. *Преобразование Фурье счетно аддитивной вещественнозначной меры на радоновском ЛВП X непрерывно относительно топологии сходимости на компактах и, тем более, относительно $\beta(X^*, X)$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть E – радоновское ЛВП. Однородный стохастически $\sigma(E, E^*)$ -непрерывный процесс ξ с временным параметром $t \geq 0$ и с независимыми приращениями [6, с. 416–417] в E , назовем *q-процессом*, если марковская переходная мера $p(s, t; x; dy)$ процесса ξ задается формулой

$$p(s, t; x; A) = q_{t-s}(A - x), \quad 0 \leq s \leq t, \quad x \in E, \quad A \in B_E,$$

q – распределение $\xi(1)$ на (E, B_E) и для каждого $t \geq 0$ выполнено $K_{q_t} = t \cdot K_q$.

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ и $E^{\mathbb{R}_+}$ – пространство всех функций $\mathbb{R}_+ \rightarrow E$, наделенное (тихоновской) топологией поточечной сходимости; известно [4], что сопряженное $(E^{\mathbb{R}_+})^*$ изоморфно как векторное пространство прямой сумме континуума экземпляров пространства E^* , т.е. пространству Y_+ всех E^* -значных мер [5] y на алгебре $2^{\mathbb{R}_+}$ (всех подмножеств в $\mathbb{R}_+$) с не более чем конечным числом точек в носителе, так что $y = \sum_{t \in \text{supp } y} v_t \cdot \delta_t$, где для каждого $t \in \text{supp } y$ выполнено условие $v_t \in E^*$, и δ_t – дираковская мера, сосредоточенная в точке t ; соответствующий функционал $\ell_y \in (E^{\mathbb{R}_+})^*$ задается формулой

$$\ell_y(x) = \int x(t) y(dt) \equiv \sum_{t \in \text{supp } y} v_t(x(t)), \quad x \in E^{\mathbb{R}_+}.$$

ЛЕММА 3. *Пусть цилиндрическая мера M_+ на $E^{\mathbb{R}_+}$ является распределением q-процесса ξ и $\widetilde{M}_+$ – ее преобразование Фурье. Тогда, если $J \in \mathbb{N}$, $0(=t_0) \leq t_1 < \dots < t_J < \infty$ и*

$$y = \sum_{j=1}^J \delta_{t_j} v_j \in Y_+, \quad \text{где } v_j \in E^*, \quad j = 1, \dots, J,$$

то

$$\widetilde{M}_+(\ell_y) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^J (t_j - t_{j-1}) \cdot K_q \left(\sum_{k=j}^J v_k \right) \right\}. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы не отличается от доказательства пункта 1° основной теоремы в [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для произвольного ЛВП X полагаем

$$C_R(X) = \{x: [0, \infty) \rightarrow X: x(0) = 0, \text{ функция } x \text{ непрерывна справа в каждой точке } t \geq 0 \text{ и имеет пределы слева в каждой точке } t > 0\},$$

и свяжем с $C_R(X)$ топологию равномерной сходимости на каждом отрезке.

¹Отметим, что если кумулянта существует, то она единственна; если при этом функция $\tilde{\mu}$ непрерывна относительно какой-нибудь топологии сопряженного, то такова же и K_μ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пространство $C_R(X)$ – ЛВП; если X сепарабельное, полное или метризуемое, то и $C_R(X)$ таково же; в $C_R(X)$ плотно подпространство, образованное финитными функциями с конечным числом значений и, следовательно, функции класса $C_R(X)$ (слабо) локально ограничены. Так как точки разрыва каждой функции $y \in C_R(X)$ могут быть только первого рода, то в случае метризуемого X множество их не более, чем счетно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Определим рекурсивно последовательность пространств:

$$C_{R,0}(X) = X, \quad C_{R,1}(X) = C_R(X)$$

и для $D \in \mathbb{N}$ положим

$$C_{R,D+1}(X) = C_R(C_{R,D}(X)).$$

Пусть еще $C_{(0)}(X) = X$ и для каждого натурального D положим $C_{(D)}(X)$ – замкнутое подпространство в пространстве локально ограниченных функций $[0, \infty)^D \rightarrow X$, наделенном топологией локально равномерной сходимости, порожденное конечными линейными комбинациями индикаторов множеств вида

$$\prod_{j=1}^D [a_j, b_j), \quad 0 < a_j < b_j < \infty$$

(т.е. полуоткрытых прямоугольных D -мерных параллелепипедов, отделенных от координатных гиперплоскостей). Полагаем, кроме того,

$$C_r(X) = \{x: [0, \infty) \rightarrow E: \forall f \in E^*, f \circ x \in C_R(\mathbb{R}^1)\};$$

в частности, $C_{R,1}(X) \subset C_r(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если X полное, метризуемое или сепарабельное, таковы же и $C_{R,D}(X)$, $C_{R,1}(X) = C_{(1)}(X)$ и для каждого $m = 1, \dots, D-1$ формулы

$$f \mapsto F_{f,m}, \quad (F_{f,m}(t_1, \dots, t_m))(t_{m+1}, \dots, t_D) = f(t_1, t_2, \dots, t_D)$$

задают изоморфизм ЛВП $C_{(D)}(X)$ на $C_{(m)}(C_{(D-m)}(X))$; при $m = 1$ получаем последовательно изоморфизмы пространств

$$C_{(D)}(X), \quad C_{R,1}(C_{(D-1)}(X)), \quad C_{R,1}(C_{R,1}(C_{(D-2)}(X))), \quad \dots, \quad C_{R,D}(X),$$

(мы отождествляем эти пространства посредством указанных изоморфизмов). Кроме того, функции из $C_{R,D}(X)$ локально ограниченные и борелевские. Если $x \in C_r$, то x также локально ограничена, поскольку x -образ каждого отрезка $[0, a]$ слабо ограничен.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Положим

$$C_D(X^*) = \{g \in C^{(D)}([0, \infty)^D, X^*): \sup g \text{ ограничен}\}$$

(=пространство всех D разнепрерывно дифференцируемых финитных функций $g: [0, \infty)^D \rightarrow X_\beta^*$); если $g \in C_D(X^*)$ и $t = (t_1, t_2, \dots, t_D) \in [0, \infty)^D$, то

$$G_g(t) = \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} \dots \frac{\partial}{\partial t_D} g(t)$$

и при $g \in C_1(X^*) \setminus \{0\}$ положим $t_g = \max(\sup g)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $g \in C_1(X^*)$ и $x \in C_r(X)$, то существуют и равны интегралы

$$\int_0^{t_g} \langle g, dx \rangle \quad (\text{Стильтьеса}) \quad \text{и} \quad \int_0^{t_g} \langle -g'(t), x(t) \rangle dt \quad (\text{Римана}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что функция $[0, \infty) \ni t \mapsto \langle g'(t), x(t) \rangle$ интегрируема по Риману на отрезке $[0, t_g]$. Отметим, что так как x ограничена (в силу замечания 2) на каждом отрезке полуоси $\mathbb{R}^+$ и так как базой окрестностей нуля в E^* служат поляры ограниченных подмножеств в E , то при фиксированном $t \geq 0$ функция

$$[-t, 1] \ni s \mapsto \langle g'(t+s) - g'(t), x(t+s) \rangle$$

бесконечно мала при $s \rightarrow 0$ в силу непрерывности g' ; кроме того, функция

$$[-t, t] \ni s \mapsto \langle g'(t), x(t+s) - x(t) \rangle$$

имеет пределы слева и непрерывна справа. Следовательно, на $[-t, 1]$ функция

$$s \mapsto \langle g'(t+s), x(t+s) \rangle \equiv \langle g'(t), x(t) \rangle + \langle g'(t+s) - g'(t), x(t+s) \rangle + \langle g'(t), x(t+s) - x(t) \rangle$$

имеет предел при $s \rightarrow 0$ — 0 при всяком $t > 0$ и непрерывна в нуле справа при всяком $t \geq 0$. Кроме того, $\langle g'(0), x(0) \rangle = 0$; значит, функция $t \mapsto \langle g'(t), x(t) \rangle$ принадлежит классу $C_{R,1}$ и в силу замечания 1 локально интегрируема по Риману. Далее,

$$\lambda_g(x) = \int_0^{t_g} \langle g'(t), x(t) \rangle dt.$$

Теперь проверим, что предел сумм

$$S_T = \sum_{j=1}^{N_T} \langle g(t_j^T) - g(t_{j-1}^T), x(s_j^T) \rangle$$

при $d(T) \rightarrow 0$ существует и равен числу $\lambda_g(x) \equiv \int_0^{t_g} \langle g'(t), x(t) \rangle dt$. Для этого сначала применим в каждом слагаемом суммы S_T теорему Лагранжа о конечных приращениях (для каждого j к непрерывно дифференцируемой вещественной функции $t \mapsto \langle g(t), x(s_j^T) \rangle$ на отрезке $\Delta_j^T = [t_{j-1}^T, t_j^T]$) и получим такие точки $u_j^T \in \Delta_j^T$, что

$$S_T = \sum_{j=1}^{N_T} \langle g'(u_j^T), x(s_j^T) \rangle \cdot |\Delta_j^T|, \quad \text{где } |\Delta_j^T| = t_j^T - t_{j-1}^T.$$

Поскольку уже доказано, что суммы $\sum_{j=1}^{N_T} \langle g'(s_j^T), x(s_j^T) \rangle \cdot |\Delta_j^T|$ сходятся к $\lambda_g(x)$ при $d(T) \rightarrow 0$, то для завершения доказательства сходимости $S_T \rightarrow \lambda_g(x)$ остается проверить, что разность

$$\delta_T := \sum_{j=1}^{N_T} \langle g'(u_j^T), x(s_j^T) \rangle \cdot |\Delta_j^T| - \sum_{j=1}^{N_T} \langle g'(s_j^T), x(s_j^T) \rangle \cdot |\Delta_j^T|$$

бесконечно мала.

Пусть U — поляра (в E^*) ограниченного множества $x[0, t_g]$. Поскольку функция $g' : [0, \infty) \rightarrow E^*$ непрерывна, то ее сужение на отрезок $[0, t_g]$ равномерно непрерывно, и потому для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что если $|u - s| < \delta$, то $g'(u) - g'(s) \in (\varepsilon/t_g)U$. Тогда, если $d(T) < \delta$, то для каждого $j = 1, 2, \dots, N_T$ выполняется оценка $|\langle g'(u_j^T) - g'(s_j^T), x(s_j^T) \rangle| < \varepsilon/t_g$, откуда

$$|\delta_T| \leq \sum_{j=1}^{N_T} |\langle g'(u_j^T) - g'(s_j^T), x(s_j^T) \rangle| \cdot |\Delta_j^T| \leq \sum_{j=1}^{N_T} \frac{\varepsilon}{t_g} \cdot |\Delta_j^T| = \varepsilon.$$

Сходимость $S_T \rightarrow \lambda_g(x)$ при $d(T) \rightarrow 0$ (для $x \in C_R$) доказана. Отсюда и из леммы 1 вытекает, что и интеграл $\ell_g(x)$ существует и равен $-\lambda_g(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Множество

$$\left\{ \ell_g : C_r(X) \ni x \mapsto \int_0^{t_g} \langle g, dx \rangle : g \in C_1(X^*) \right\}$$

(функционалов на $C_r(X)$) разделяет точки в $C_r(X)$. Если $g \in C_D(X^*)$ и $x \in C_{(D)}(X)$, то существует интеграл Римана $\int_{(\mathbb{R}_+)^D} \langle G_g(t), x(t) \rangle dt$ и множество

$$\left\{ L_g : C_r(X) \ni x \mapsto (-1)^D \cdot \int_0^{t_g} \langle G_g(t), x(t) \rangle dt : g \in C_1(X^*) \right\}$$

(функционалов на $C_{(D)}(X)$) разделяет точки в $C_{(D)}(X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если ЛВП E польское, то *одномерным (случайным) q -полем* в E назовем q -процесс с траекториями из $C_{(1)}(E)$ и, рекурсивно, $(D+1)$ -мерным (случайным) q -полем в E назовем всякое одномерное случайное Q -поле в $C_{(D)}(E)$, где Q – распределение D -мерного q -поля в E .

2. Основные результаты. Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА. Пусть траектории q -процесса ξ принадлежат пространству $C_r(E)$. Тогда для каждого $g \in C_1(E^*)$ функционал ℓ_g (см. замечание 3) измерим относительно (лебеговского продолжения) меры M , задающей распределение процесса ξ на пространстве C_r , и

$$\widetilde{M}(\ell_g) = \exp \left\{ \int_0^\infty K(g(t)) dt \right\}. \quad (2)$$

Если E польское и Q – распределение на $C_{(D)}(E)$ D -мерного q -поля в E , то для каждого $g \in C_D(E^*)$ функционал L_g измерим относительно (лебеговского продолжения) меры Q и

$$\widetilde{Q}(L_g) = \exp \left\{ \int_{[0, \infty)^D} K(g(t)) dt \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in C_1(E^*)$. Случай $g \equiv 0$ очевиден; далее $g \neq 0$ (и $t_g > 0$). Измеримость функционалов ℓ_g вытекает из того, что аппроксимация при каждом $x \in C_r(E)$ интеграла Римана $\int_0^{t_g} \langle g'(t), x(t) \rangle dt \equiv -\ell_g(x)$ последовательностью сумм Римана, определенных посредством фиксированной последовательности отмеченных разбиений отрезка $[0, t_g]$, означает поточечную аппроксимацию функционала ℓ_g зависящими от значений траектории x в конечном числе точек (т.е. $(E^{\mathbb{R}_+})^*$ -цилиндрическими) линейными – и потому измеримыми относительно распределения процесса – функционалами. Измеримость L_g на $C_D(E^*)$ доказывается так же.

Далее доказывается формула (2) и проверяется, что ее правая и левая части, зависящие от разбиения отрезка $[0, t_g]$, сходятся к соответствующим частям равенства (1) по последовательности равномерных разбиений.

Положим

$$\ell_T(x) = \sum_{j=1}^{N_T} \langle g(t_{j-1}^T) - g(t_j^T), x(t_j^T) \rangle$$

для произвольного разбиения

$$T = \{0 = t_0^T < t_1^T < t_2^T < \dots < t_{N_T}^T = t_g\}$$

и произвольной функции $x \in E^{\mathbb{R}_+}$. Поскольку $g(t_{N_T}^T) = g(t_g) = 0$, то из (1) (и формулы замены переменной для линейных образов цилиндрических мер [5]) при $v_k = g(t_{k-1}^T) - g(t_k^T)$ вытекает, что

$$\widetilde{M}(\ell_T \upharpoonright_{C_R}) = \widetilde{M}_+(\ell_T) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^{N_T} (t_j - t_{j-1}) \cdot K(g_{t_{j-1}^T}) \right\}. \quad (3)$$

Для доказательства того, что $\widetilde{M}(\ell_T \restriction_{C_R})$ сходится к $\widetilde{M}(\ell_g)$ по последовательности равномерных разбиений, достаточно показать, что если $x \in C_R$ и $d(T) \rightarrow 0$, то $\ell_T(x) \rightarrow \ell_g(x)$, и затем воспользоваться предложениями 2 и 1. Для объяснения сходимости $\ell_T(x) \rightarrow \ell_g(x)$ при $d(T) \rightarrow 0$ заметим, что выражение для $-\ell_T(x)$ является частным случаем выражения S_T (при $s_j^T = t_j^T$) (см. предложение 2), которое сходится к $-\ell_g$ при $d(T) \rightarrow 0$. Сходимость правых частей доказана.

Теперь, поскольку кумулянта K порождена борелевской мерой q_1 на радоновском пространстве, то по лемме 2 K непрерывна (вместе с $\dot{q}_1$) в сильной топологии E^* ; и так как $K(0) = 0$ и g непрерывна на $[0, t_g]$, то и комплексная функция $[0, t_g] \ni t \mapsto K(g(t))$ непрерывна, а потому показатель в правой части (3), будучи суммой Римана для непрерывной функции $K \circ g$, сходится к интегралу в показателе в формуле (2) при $d(T) \rightarrow 0$.

Формула для $\dot{Q}(L_g)$ получается теперь индукций по D . Теорема доказана.

Метод оказывается применимым также и к некоммутирующим значениям переходных мер. При этом экспонента от интеграла в формуле (2) должна быть заменена на мультипликативный интеграл (т.е. на решение задачи Коши $\dot{x}_t = K(g(t))x_t$, $x(0) = 1$).

Это может представлять физический интерес, поскольку алгебра c -чисел в [7, гл. 1], а также алгебра значений переходных мер (=переходных функций), играющих сходную роль в книге Швингера [8, гл. 1], определяются вначале соотношениями, не предполагающими совпадения этих алгебр с полем комплексных чисел (там же Швингер ввел канонические антикоммутирующие динамические переменные в квантовую динамику).

Автор благодарит О.Г. Смолянова за постановку задачи и внимание к работе, а также А. И. Штерна и М. В. Смирнову за полезные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В. П. Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана для нелинейных уравнений. М.: Наука, 1976.
2. Shamarov N. N. // Russian J. Math. Phys. 2001. V. 8. № 4. P. 493–494.
3. Богачев В. И. Гауссовские меры. М.: Наука, Физматлит, 1997.
4. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
5. Смолянов О. Г., Фомин С. В. // УМН. 1976. Т. 31. № 4. С. 3–56.
6. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. Т. 2. М.: Наука, 1973.
7. Дирак П. Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979.
8. Schwinger J. Quantum Kinematics and Dynamics. New York: W. A. Benjamin, Inc., 1970.