Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Ухлов, Дифференциальные и геометрические свойства соболевских отображений, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 2, 317–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm544>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 11:15:08

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СОБОЛЕВСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. Д. Ухлов

Пусть D и D' – области в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и гомеоморфизм $\varphi: D \rightarrow D'$ принадлежит пространству Соболева $L_q^1(D)$. Рассматривается задача об описании дифференциальных и геометрических свойств обратного отображения $\varphi^{-1}: D' \rightarrow D$. Основным результатом работы составляет

ТЕОРЕМА 1. Пусть гомеоморфизм $\varphi: D \rightarrow D'$ принадлежит $L_q^1(D)$, $n - 1 < q < \infty$, и обладает N - и NL^{-1} -свойствами Лузина. Тогда обратное отображение $\varphi^{-1}: D' \rightarrow D$ принадлежит $L_1^1(D')$, дифференцируемо почти всюду (п.в.) в D' и является обобщенным квазиконформным гомеоморфизмом.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 03-01-00899, и INTAS-10170.

Напомним, что пространство Соболева $L_q^1(D)$, $1 \leq q \leq \infty$, состоит из локально-суммируемых функций, имеющих первые обобщенные производные, и таких, что конечна величина

$$\|f\|_{L_q^1(D)} = \|\nabla f\|_{L_q(D)}, \quad \text{где } \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

называемая *полунормой* функции f .

Если отображение $\varphi: D \rightarrow D'$ принадлежит классу $L_{1,\text{loc}}^1(D)$, то для почти всех точек области D определены формальная матрица Якоби

$$D\varphi(x) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

и ее якобиан $J(x, \varphi) = \det D\varphi(x)$. Норма $|D\varphi(x)|$ матрицы есть норма линейного оператора, определенного этой матрицей, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Гомеоморфизм φ областей D и D' называется *обобщенным квазиконформным* $((p, q)$ -квазиконформным, $1 \leq q \leq p \leq \infty$) [1], если φ принадлежит $L_{1,\text{loc}}^1(D)$ и конечна величина

$$K_{p,q}(D) = \|K_p(\cdot)\|_{L_q(D)},$$

где $K_p(x) = \inf\{k: |D\varphi(x)| \leq k|J(x, \varphi)|^{1/p}, x \in D\}$, а число κ определяется из соотношения $1/\kappa = 1/q - 1/p$ при $q < p$, и $\kappa = \infty$ при $q = p$.

Понятие (p, q) -квазиконформного отображения естественным образом обобщает понятие квазиконформного отображения (при $p = q = n \geq 2$ данное определение совпадает с определением квазиконформного отображения), и (p, q) -квазиконформные отображения представляют пример топологических отображений с интегрируемым искажением [2].

Для произвольного открытого ограниченного множества $U \subset \mathbb{R}^n$ определим функцию Φ по правилу

$$\Phi(U) = \sup_{f \in L_{\infty}^1(U)} \left(\frac{\|f \circ \varphi\|_{L_q^1(D)}}{\|f\|_{L_{\infty}^1(U)}} \right)^q.$$

ЛЕММА 1 [3]. Пусть φ принадлежит $L_q^1(D)$. Тогда Φ является ограниченной монотонной счетно-аддитивной функцией, определенной на открытых ограниченных подмножествах $\mathbb{R}^n$.

Отображение $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $\text{BVL}(D)$ (т.е. имеет ограниченную вариацию на почти всех прямых), если оно имеет ограниченную вариацию на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси. Для такого отображения φ почти всюду в D существуют частные производные $\partial \varphi_i / \partial x_j$, $i, j = 1, \dots, n$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть гомеоморфизм $\varphi: D \rightarrow D'$ принадлежит $L_q^1(D)$, $n-1 < q < \infty$. Тогда обратное отображение $\varphi^{-1}: D' \rightarrow D$ является BVL -отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольный n -мерный открытый параллелепипед $P, \bar{P} \subset D'$, с ребрами, параллельными координатным осям, и покажем, что φ имеет ограниченную вариацию на п.в. сечениях P прямыми, параллельными оси x_n .

Пусть P_0 – проекция P на подпространство $x_n = 0$ и I – проекция P на координатную ось x_n . Тогда $P = P_0 \times I$. Монотонная счетно-аддитивная функция Φ по правилу $\Phi(A, P) = \Phi(A \times I)$ порождает монотонную счетно-аддитивную функцию открытого множества $A \subset P_0$. Для п.в. точек $z \in P_0$ величина

$$\bar{\Phi}'(z, P) = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{\Phi(B^{n-1}(z, r), P)}{r^{n-1}} \right]$$

конечна [4], где $B^{n-1} - (n-1)$ -мерный шар с центром в точке z и радиусом $r > 0$.

Далее, n -мерная мера Лебега $\Psi(U) = |\varphi^{-1}(U)|$, где U открыто в D' , являясь монотонной счетно-аддитивной функцией, также порождает монотонную счетно-аддитивную функцию $\Psi(A, P) = \Psi(A \times I)$ открытого множества $A \subset P_0$, при этом $\bar{\Phi}'(z, P) < +\infty$ для п.в. точек $z \in P_0$.

Зафиксируем произвольно точку $z \in P_0$, в которой конечны $\overline{\Phi}'(z, P)$ и $\overline{\Psi}'(z, P)$. На сечении $I_z = \{z\} \times I$ параллелепипеда P возьмем произвольно взаимно не пересекающиеся замкнутые промежутки $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ с длинами $b_1, \dots, b_k$ соответственно. Обозначая через R_i открытое множество точек, удаленных от Δ_i на расстояние, меньшее заданного $r > 0$, рассмотрим конденсаторы (Δ_i, R_i) . Пусть $r > 0$ выбрано так, что $r < cb_i, i = 1, \dots, k$, где c – подходящая постоянная. Тогда функция $\eta_i(x) = d(x, \Delta_i)/r$ является допустимой для конденсатора (Δ_i, R_i) . Следовательно, применяя лемму 1 и оценку снизу для емкости конденсатора [5], получаем

$$\left(\frac{(\text{diam } \varphi^{-1}(\Delta_i))^{q/(n-q)}}{|\varphi^{-1}(R_i)|^{(1-n+q)(n-1)}} \right)^{1/q} \leq c_1 \Phi(R_i)^{1/q} \cdot \frac{1}{r}.$$

Отсюда находим, что

$$\text{diam } \varphi^{-1}(\Delta_i) \leq c_2 \left(\frac{|\varphi^{-1}(R_i)|}{r^{n-1}} \right)^{(1-n+q)/q} \cdot \left(\frac{\Phi(R_i)}{r^{n-1}} \right)^{(n-1)/q}.$$

Суммируя по $i = 1, \dots, k$, применяя неравенство Гёльдера и используя теорему Безиковича [6] для оценки значения функции Φ через кратность покрытия, имеем

$$\sum_{i=1}^k \text{diam } \varphi^{-1}(\Delta_i) \leq c_3 \left(\frac{|\varphi^{-1}(B^{n-1}(z, r), P)|}{r^{n-1}} \right)^{(1-n+q)/q} \cdot \left(\frac{\Phi(B^{n-1}(z, r), P)}{r^{n-1}} \right)^{(n-1)/q}.$$

Устремляя r к нулю, получаем

$$\sum_{i=1}^k \text{diam } \varphi^{-1}(\Delta_i) < +\infty,$$

откуда $\varphi^{-1} \in \text{BVL}(D')$.

Напомним, что отображение $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ обладает N -свойством Лузина, если образ всякого множества нулевой меры есть множество меры нуль, и N^{-1} -свойством Лузина, если прообраз всякого множества нулевой меры есть множество меры нуль.

Отображение $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ обладает NL -свойством Лузина ($\varphi \in NL(D)$), если оно обладает N -свойством Лузина на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси, относительно H^1 -меры Хаусдорфа.

Будем говорить, что гомеоморфизм $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ обладает NL^{-1} -свойством Лузина, если обратное отображение $\varphi^{-1}: D' \rightarrow D$ обладает NL -свойством Лузина.

Заметим, что согласно теореме Банаха – Зарецкого [7], дающей условие абсолютной непрерывности вещественной функции ограниченной вариации, непрерывное BVL -отображение $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит $\text{ACL}(D)$ тогда и только тогда, когда φ обладает NL -свойством Лузина.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть гомеоморфизм $\varphi: D \rightarrow D'$ принадлежит $L_q^1(D)$, $n-1 < q < \infty$, и обладает NL^{-1} -свойством Лузина. Тогда обратное отображение φ^{-1} принадлежит классу $\text{ACL}(D')$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть гомеоморфизм $\varphi: D \rightarrow D'$ дифференцируем почти всюду в области D и обладает N -свойством Лузина. Тогда обратное отображение $\varphi^{-1}: D' \rightarrow D$ дифференцируемо почти всюду в области D' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$s = l_\varphi(x, t), \quad \text{где } l_\varphi(x, t) = \min_{|x-y|=t} |\varphi(x) - \varphi(y)|;$$

тогда $t = L_{\varphi^{-1}}(y, s)$. Имеем [1]

$$\frac{L_{\varphi^{-1}}(y, s)}{s} \leq \frac{L_\varphi^{n-1}(x, t)}{t^{n-1}} \cdot \frac{t^n}{|\varphi(B(x, t))|}.$$

Отображение φ дифференцируемо почти всюду в области D , значит,

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{L_{\varphi}(x, t)}{t} < +\infty \quad \text{для п.в. } x \in D.$$

Рассмотрим множество $Z = \{x \in D: J_{\varphi}(x) = 0\}$, где символом $J_{\varphi}(x)$ обозначена объемная производная отображения φ в точке x :

$$J_{\varphi}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\varphi(B(x, t))|}{t^n}.$$

Мера множества $\varphi(Z)$ равна нулю, поэтому $J_{\varphi}(\varphi^{-1}(y)) \neq 0$ для почти всех $y \in D'$.

Следовательно, учитывая то, что гомеоморфизм обладает N -свойством Лузина, получаем

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow 0} \frac{L_{\varphi^{-1}}(y, s)}{s} < \infty \quad \text{для п.в. } y \in D'.$$

Применяя теорему Степанова [8], заключаем, что отображение φ^{-1} дифференцируемо почти всюду в области D' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из следствия 1 и теоремы 3 вытекает, что φ^{-1} есть ACL-гомеоморфизм, дифференцируемый почти всюду в области D' . Отметим, что $|\varphi(\{x \in D: J(x, \varphi) = 0\})| = 0$ и для почти всех $y \in D'$ выполнено неравенство

$$|D\varphi^{-1}|(y) \leq |D\varphi|^{n-1}(x)|J(y, \varphi^{-1})|, \quad x = \varphi^{-1}(y).$$

Кроме того, $J(y, \varphi^{-1}) \neq 0$ для почти всех $y \in D'$, так как по формуле замены переменной

$$|\varphi^{-1}(\{y \in D': J(y, \varphi^{-1}) = 0\})| = 0,$$

и выполнено N -свойство Лузина.

Отсюда получаем, что

$$\int_{D'} \left(\frac{|D\varphi^{-1}|(y)}{|J(y, \varphi^{-1})|^{1/r}} \right)^{r/(r-1)} dy \leq \int_{D'} |D\varphi|^q(\varphi^{-1}(y)) |J(y, \varphi^{-1})| dy = \int_D |D\varphi|^q(x) dx < \infty.$$

Применяя теорему 2 из [1], получаем, что φ^{-1} порождает ограниченный оператор вложения

$$(\varphi^{-1})^*: L_r^1(D') \rightarrow L_1^1(D)$$

и является $(r, 1)$ -квазиконформным гомеоморфизмом.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Все результаты настоящей работы справедливы для отображений групп Карно, с учетом емкостных оценок, полученных в [1].

Автор выражает искреннюю благодарность профессору С. К. Водопьянову за конструктивные предложения и замечания, позволившие существенно улучшить первоначальный вариант статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Водопьянов С. К., Ухлов А. Д. // Сиб. матем. ж. 1998. Т. 39. № 4. С. 776–795.
2. Водопьянов С. К. // Сиб. матем. ж. 2000. Т. 41. № 1. С. 23–48.
3. Водопьянов С. К., Ухлов А. Д. // Изв. ВУЗов. Сер. матем. 2002. № 10 (485). С. 11–33.
4. Rado Т., Reichelderfer P. V. Continuous transformations in analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1955.
5. Кругликов В. И. // Матем. сб. 1986. Т. 130. № 2. С. 185–206.
6. Гусман М. Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978.
7. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
8. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.