Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Зейфман, О точных оценках скорости сходимости для некоторых систем дифференциальных уравнений, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 2, 303–306

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm545>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 15:36:44

О ТОЧНЫХ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. И. Зейфман

При изучении оценок устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с внедиагонально неотрицательной матрицей коэффициентов очень удобным является метод, основанный на понятии логарифмической нормы оператора [1], [2] и соответствующих оценках матрицы Коши, см. [3]–[6].

Этот метод позволяет получить явные оценки скорости сходимости к предельному режиму, которые являются точными при подходящем выборе перенормировок. В настоящей заметке показано, что при выполнении естественных условий такая перенормировка существует, а при некоторых дополнительных условиях она единственна.

Рассмотрим систему

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}, \quad (1)$$

где $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$. Будем предполагать всюду далее, что все $a_{ij}(t)$ действительны и непрерывны на $[0, \infty)$ и, кроме того, при всех $i \neq j$, $t \geq 0$ выполнена оценка $a_{ij}(t) \geq 0$ ($A(t)$ внедиагонально неотрицательна). Всюду в заметке будет использоваться l_1 -норма: $\|\mathbf{x}\| = \sum_i |x_i|$, $\|A(t)\| = \max_j \sum_i |a_{ij}(t)|$. Логарифмическая норма вводится, как известно, как правая производная нормы матрицы Коши:

$$\gamma(A(t)) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\|U(t+h, t)\| - 1}{h},$$

где $U(t, s)$ – матрица Коши системы (1). При этом логарифмическая норма существует при любом неотрицательном t и вычисляется по формуле

$$\gamma(A(t)) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\|I + A(t) \cdot h\| - 1}{h} = \max_j \left(a_{jj}(t) + \sum_{i \neq j} |a_{ij}(t)| \right).$$

Кроме того, при любых $0 \leq s \leq t$ справедлива оценка

$$\|U(t, s)\| \leq \exp \left(\int_s^t \gamma(A(\tau)) d\tau \right).$$

Положим

$$m(t) = \min_j \left(\sum_i a_{ij}(t) \right), \quad M(t) = \max_j \left(\sum_i a_{ij}(t) \right).$$

Тогда, используя внедиагональную неотрицательность $A(t)$, получаем

$$\|U(t, s)\| \leq \exp \left(\int_s^t M(\tau) d\tau \right). \quad (2)$$

С другой стороны, если $\mathbf{x}(s) \geq \mathbf{0}$ (т.е. все $x_i(s) \geq 0$), то

$$\frac{d}{dt} \sum_i x_i = \sum_{i,j} a_{ij}(t) x_j = \sum_j \left(\sum_i a_{ij}(t) \right) x_j \geq \min_j \sum_i a_{ij}(t) \cdot \sum_i x_i$$

и

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \sum_i x_i(t) \geq \exp \left(\int_s^t m(\tau) d\tau \right) \cdot \|\mathbf{x}(s)\|. \quad (3)$$

В [5] для некоторых систем с якобиевой матрицей $A(t)$ доказано существование преобразования $\mathbf{z} = D\mathbf{x}$ такого, что для преобразованной системы выполняется равенство $M(t) = m(t)$, и следовательно, оценка типа (2) является точной.

Введем некоторые дополнительные понятия.

Будем говорить, что цепочка

$$a_{i_1, i_2}(u), \quad a_{i_2, i_3}(u), \quad \dots, \quad a_{i_m, i_{m+1}}(u)$$

образует *дорожку невырожденности*, если выполнены следующие условия:

- 1) $i_{m+1} = i_1$;
- 2) все $a_{i_k, i_{k+1}}(u) > 0$;
- 3) $i_k \neq i_{k+1}$ для всех k ;
- 4) $\{1, \dots, n\} \subset \{i_1, \dots, i_m\}$.

Отметим, что наличие у внедиагонально неотрицательной матрицы $A(u)$ дорожки невырожденности равносильно неразложимости этой матрицы.

Полагая $\mathbf{z} = D(t)\mathbf{x}$, получаем из (1) систему

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = B(t)\mathbf{z}, \quad (4)$$

где

$$B(t) = \frac{dD(t)}{dt} \cdot D^{-1}(t) + D(t) \cdot A(t) \cdot D^{-1}(t) = (b_{ij}(t))_{i,j=1}^n.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть матрица $A(t)$ внедиагонально неотрицательна и имеет при любом неотрицательном t дорожку невырожденности (возможны разные дорожки при разных t). Тогда существует диагональная матрица $D(t) = \text{diag}(d_i(t))$ с положительными $d_i(t)$ такая, что матрица $B(t)$ приведенной системы (4) внедиагонально неотрицательна и при всех неотрицательных t и любом j выполнено

$$\sum_i b_{ij}(t) = 0. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях теоремы для матрицы $B(t)$ системы (4) в предположении, что все $d_i(t) > 0$ при всех $t \geq 0$, получаем

$$b_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{d_i(t)}{d_j(t)} \cdot a_{ij}(t), & j \neq i, \\ \frac{d'_i(t)}{d_i(t)} + a_{ii}(t), & j = i. \end{cases}$$

Тогда условие (5) выполняется, если

$$\frac{d'_j(t)}{d_j(t)} + a_{jj}(t) + \sum_{i \neq j} \frac{d_i(t)}{d_j(t)} \cdot a_{ij}(t) = 0,$$

откуда получаем уравнение

$$\frac{d\mathbf{d}}{dt} = -A^T(t) \cdot \mathbf{d}. \quad (6)$$

Пусть вначале все $a_{ii}(t) \geq 0$. Тогда, используя теорему 14.2.1 из [7], получаем существование на полуоси $[0, \infty)$ нетривиального неотрицательного решения $\mathbf{x}^*(t)$ у уравнения (6).

Докажем, что это решение строго положительно.

Предположим, что найдется момент $t_0 \geq 0$ и индекс i_1 такие, что $x_{i_1}^*(t_0) = 0$. Тогда, поскольку i_1 входит в некоторую дорожку невырожденности, имеем

$$\frac{dx_{i_1}^*(t_0)}{dt} = - \sum_j a_{j, i_1}(t_0) \cdot x_j^*(t_0) \leq -a_{i_m, i_1}(t_0) \cdot x_{i_m}^*(t_0).$$

Отсюда необходимо $x_{i_m}^*(t_0) = 0$. Аналогично $x_{i_m-1}^*(t_0) = 0, \dots, x_{i_2}^*(t_0) = 0$, т.е. $\mathbf{x}^*(t_0) = 0$, что противоречит нетривиальности решения $\mathbf{x}^*(t)$. Отсюда и вытекает, что решение $\mathbf{x}^*(t)$ строго положительно при всех $t \geq 0$.

В общем случае введем неотрицательную вспомогательную матрицу

$$A_1(t) = A(t) + L(t)I, \quad \text{где } L(t) = \max_i |a_{ii}(t)|.$$

Тогда система

$$\frac{d\mathbf{d}}{dt} = -A_1^T(t) \cdot \mathbf{d} \quad (7)$$

имеет, по доказанному, строго положительное решение $\mathbf{y}^*(t)$. Следовательно, и решение системы (6)

$$\mathbf{x}^*(t) = \exp\left(\int_0^t L(u) du\right) \mathbf{y}^*(t)$$

также строго положительно.

Полагая теперь $D(t) = \text{diag}(x_i^*(t))$, получаем утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы справедливы следующие оценки:

1) при любом $\mathbf{x}(s)$ и $t \geq s$

$$\|\mathbf{z}(t)\| \leq \|\mathbf{z}(s)\|;$$

2) при любом $\mathbf{x}(s) \geq \mathbf{0}$ и $t \geq s$

$$\|\mathbf{z}(t)\| \geq \|\mathbf{z}(s)\|;$$

3) при всех $t \geq s \geq 0$

$$\|U(t, s)\| \leq \|D^{-1}(t)\| \cdot \|D(s)\|. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые две оценки сразу вытекают из утверждения теоремы и неравенств (2), (3). Для получения третьей, обозначая через $V(t, s)$ матрицу Коши системы (4), получаем

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|D^{-1}(t)\| \cdot \|V(t, s)\| \cdot \|D(s)\| \cdot \|\mathbf{x}(s)\| \leq \|D^{-1}(t)\| \cdot \|D(s)\| \cdot \|\mathbf{x}(s)\|.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть при выполнении условий предыдущей теоремы матрица $A(t)$ якобиева и 1-периодична. Тогда соответствующая диагональная матрица $D(t) = \text{diag}(d_i(t))$ с положительными $d_i(t)$ единственна (с точностью до скалярного множителя).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $W(t, s)$ – матрица Коши системы (6). Тогда, как легко проверить, $W(t, s) = U^T(s, t)$, а значит, $W(t) = (U^T(t))^{-1}$. Как известно [8], в условиях теоремы матрица $U^T(t)$ является вполне положительной при $t > 0$. Рассмотрим матрицу $U^T(1)$. Из ее полной положительности следует, что она имеет n различных вещественных и положительных собственных значений $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$; при этом если собственный вектор $\mathbf{y}^k$ соответствует собственному значению λ_k , то последовательность координат y_i^k имеет в точности $k - 1$ перемен знака ($k = 1, \dots, n$). Тогда матрица $W(1)$ имеет те же собственные векторы и собственные значения λ_i^{-1} . Выберем $\mathbf{d}(0)$. Тогда $\mathbf{d}(0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{y}^i$ при некоторых α_i и

$$\mathbf{d}(m) = W^m(1) \cdot \mathbf{d}(0) = W^m(1) \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{y}^i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^{-m} \mathbf{y}^i > \mathbf{0} \quad (9)$$

для любого натурального m . Так как λ_1^{-1} есть минимальное собственное значение матрицы $W(1)$, то это возможно только в том случае, когда при $i > 1$ число $\alpha_i = 0$. Отсюда и получаем единственное (естественно, с точностью до скалярного множителя) $\mathbf{d}(0) = \mathbf{y}^1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для справедливости теоремы 2 достаточно, чтобы матрица $U^T(t)$ была вполне положительной при достаточно больших t , а для этого, в свою очередь, достаточно существования дорожки невырожденности у “средней” матрицы

$$\overline{A} = \int_0^1 A(\tau) d\tau.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть A – постоянная яacobиева матрица и все $a_{ij} > 0$ при $|i-j| = 1$. Тогда преобразование $D(t) = \text{diag}(d_i(t))$ с положительными $d_i(t)$ единственно (с точностью до скалярной функции) и справедлива следующая точная оценка:

$$\|e^{At}\| \leq e^{\lambda_1 t} \cdot \frac{\max(y_i^1)}{\min(y_i^1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем вместо (9) при любом положительном t

$$\mathbf{d}(t) = e^{-A^T \cdot t} \cdot \mathbf{d}(0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot e^{-\lambda_i t} \cdot \mathbf{y}^i > \mathbf{0}.$$

Отсюда $\alpha_i = 0$ при $i > 1$ и с точностью до скалярного множителя $\mathbf{d}(t) = e^{-\lambda_1 t} \cdot \mathbf{y}^1$.

Тогда

$$\begin{aligned} \|D(t)\| &= \max(d_i(t)) = e^{-\lambda_1 t} \cdot \max(\mathbf{y}_i^1), \\ \|D^{-1}(t)\| &= \max(d_i^{-1}(t)) = e^{\lambda_1 t} \cdot \max(\mathbf{y}_i^{-1}) = e^{\lambda_1 t} \cdot (\min(\mathbf{y}_i^1))^{-1} \end{aligned}$$

и достаточно воспользоваться оценкой (8).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В условиях теоремы 3 можно выбрать преобразование с помощью постоянной матрицы $\hat{D} = D(t) \cdot e^{\lambda_1 t}$.

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лозинский С. М. // Изв. вузов. Сер. матем. 1958. Т. 5. С. 52–90.
2. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
3. Zeifman A. // J. Appl. Probab. 1991. V. 28. P. 268–277.
4. Zeifman A. // Stochastic Process. Appl. 1995. V. 59. P. 157–173.
5. Granovsky B., Zeifman A. // Stochastic Process. Appl. 1997. V. 72. P. 105–120.
6. Granovsky B., Zeifman A. // Appl. Stochastic Models Bus. Ind. 2000. V. 16. P. 235–248.
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
8. Karlin S. // Trans. Amer. Math. Soc. 1964. V. 111. P. 33–107.