Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Злотник, Слабые решения уравнений движения вязкой сжимаемой реагирующей бинарной смеси: единственность и непрерывная по Липшицу зависимость от данных, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 2, 307–310

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm546>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 12:02:00

СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ РЕАГИРУЮЩЕЙ БИНАРНОЙ СМЕСИ: ЕДИНСТВЕННОСТЬ И НЕПРЕРЫВНАЯ ПО ЛИПШЦУ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ДАННЫХ

А. А. Злотник

1. Системам квазилинейных уравнений движения вязких сжимаемых сред посвящена обширная литература [1], [2]. Одной из актуальных проблем является разработка теории глобальных по времени и по данным слабых решений, включая вопросы их существования, единственности и непрерывной зависимости от данных (начальных данных, коэффициентов уравнений, свободных членов и т.д.) и др. Для системы уравнений одномерного движения вязкого теплопроводного газа последние два вопроса изучались в [3]–[6] (см. также [7]) и [8]. Для более сложных систем уравнений для реагирующего газа (иными словами, в задаче горения) слабые решения рассмотрены в [9], [10].

Совсем недавно в [11] получено, в частности, существование слабых решений для еще более сложной системы уравнений для реагирующей бинарной газовой смеси; отметим, что регулярные решения задач о бинарных смесях ранее исследовались в [12], [13]. Настоящая работа посвящена вопросам единственности этих слабых решений и их непрерывной зависимости от данных.

Система квазилинейных уравнений одномерного движения вязкой сжимаемой реагирующей бинарной газовой смеси имеет вид

$$\eta_t = u_x, \quad u_t = \sigma_x, \quad \sigma = \nu \rho u_x - p, \quad p = k(z)\rho\theta, \quad \rho = \eta^{-1}, \quad (1)$$

$$(c_V(z)\theta)_t = (\lambda \rho \theta_x)_x + \sigma u_x + \mu f(\theta), \quad z_t = -f(\theta)z \quad (2)$$

в области $(x, t) \in Q = Q_T \equiv \Omega \times (0, T)$ при краевых и начальных условиях

$$u|_{x=0, M} = 0, \quad \lambda \rho \theta_x|_{x=0, M} = 0, \quad (\eta, u, \theta, z)|_{t=0} = (\eta^0(x), u^0(x), \theta^0(x), z^0(x)). \quad (3)$$

Здесь $\Omega = (0, M)$, а $k(z) = k_1 z + k_2(1 - z)$, $c_V(z) = c_{V1}z + c_{V2}(1 - z)$, причем $\nu > 0$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $k_i > 0$, $c_{Vi} > 0$, $i = 1, 2$, – физические постоянные. Специфичным для задачи о бинарной смеси является зависимость коэффициентов k и c_V от функции z .

Искомые функции $\eta > 0$, $u, \theta > 0$ и $0 \leq z \leq 1$ – соответственно удельный объем, скорость, абсолютная температура и концентрация невыгоревшего топлива – являются функциями лагранжевых массовых координат (x, t) . Функции σ, p, ρ – это соответственно напряжение, давление, плотность.

Нам потребуются пространства $L^{q,r}(Q)$, $V_2(Q)$ [14] с нормами

$$\|w\|_{L^{q,r}(Q)} = \|\|w\|_{L^q(\Omega)}\|_{L^r(0,T)}, \quad \|w\|_{V_2(Q)} = \|w\|_{L^{2,\infty}(Q)} + \|w_x\|_{L^2(Q)},$$

где $q, r \in [1, \infty]$. Пусть также $W_{\mathbf{q}, \mathbf{r}}^{1,0}(Q)$ [4], [5] – пространство с нормой

$$\|w\|_{W_{\mathbf{q}, \mathbf{r}}^{1,0}(Q)} = \|w\|_{L^{q_0, r_0}(Q)} + \|w_x\|_{L^{q_1, r_1}(Q)},$$

где $\mathbf{q} = (q_0, q_1)$, $\mathbf{r} = (r_0, r_1)$, а $H^1(\Omega) = W_2^1(\Omega)$ – пространство Соболева.

Предположим, что начальные данные обладают свойствами $\eta^0, z^0 \in L^\infty(\Omega)$, $u^0, \theta^0 \in L^2(\Omega)$ и $\text{ess inf}_\Omega \eta^0 > 0$, $\theta^0 > 0$, $0 \leq z^0 \leq 1$, а $f \in C^1([0, \infty))$, $0 \leq f(\theta) \leq \bar{f}$. Будем изучать слабое решение задачи (1)–(3) (кратко – задачи $\mathcal{P}$) со свойствами (несколько более широкими, чем в [11])

$$\eta, z \in L^\infty(Q), \quad \eta_t, z_t \in L^2(Q), \quad u, \theta \in V_2(Q), \quad \text{ess inf}_Q \eta > 0, \quad \theta > 0, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00700.

Отметим, что свойства $\theta^0 > 0$ и $\theta > 0$ ниже фактически несущественны.

Рассмотрим два экземпляра – $\mathcal{P}^{(1)}$ и $\mathcal{P}^{(2)}$ – задачи $\mathcal{P}$, в которых решения, функции σ, p, ρ, f , коэффициенты и начальные данные будем пометать верхним индексом (1) и (2). Введем операцию взятия разности $\Delta\varphi := \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}$, так что $\Delta\eta = \eta^{(1)} - \eta^{(2)}$, $\Delta\eta^0 = \eta^{0,(1)} - \eta^{0,(2)}$, $\Delta\nu = \nu^{(1)} - \nu^{(2)}$ и т.д.

Пусть $\bar{N} \geq N > 1$ – параметры. Через $K = K(\bar{N})$, $K_1 = K_1(\bar{N})$, ... будем обозначать положительные неубывающие функции от параметра $\bar{N}$, которые могут зависеть также от M, T , но не от данных рассматриваемых задач. Положим также $\|y\|_C = \sup_{\zeta \geq 0} |y(\zeta)|$ и $\|y\|_{C^1} = \|y\|_C + \|y'\|_C$.

ТЕОРЕМА. Пусть при $\ell = 1, 2$ коэффициенты и начальные данные удовлетворяют условиям

$$\nu^{(\ell)}, k_i^{(\ell)}, c_{Vi}^{(\ell)}, \lambda^{(\ell)}, \mu^{(\ell)} \in [N^{-1}, N], \quad i = 1, 2, \quad \|f^{(\ell)}\|_{C^1} \leq N, \\ N^{-1} \leq \eta^{0,(\ell)} \leq N, \quad \|u^{0,(\ell)}\|_{L^2(\Omega)} + \|z^{0,(\ell)}\|_{H^1(\Omega)} \leq N.$$

Пусть также $\bar{N}^{-1} \leq \eta^{0,(\ell)} \leq \bar{N}$, $\|u^{(\ell)}\|_{V_2(Q)} + \|\theta^{(\ell)}\|_{V_2(Q)} \leq \bar{N}$. Тогда справедлива следующая оценка нормы разности слабых решений задач $\mathcal{P}^{(1)}$ и $\mathcal{P}^{(2)}$:

$$\|\Delta\eta\|_{L^\infty(Q)} + \|\Delta u\|_{V_2(Q)} + \|\Delta\theta\|_{W_{q,r}^{1,0}(Q)} + \|\Delta z\|_{L^\infty(Q)} + \|\Delta z\|_{L^{2,\infty}(Q)} \\ \leq K_\varepsilon(N)(\Delta^0 + \Delta_c + \|\Delta f\|_{C^1}) \quad (4)$$

через нормы разностей начальных данных и коэффициентов

$$\Delta^0 := \|\Delta\eta^0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\Delta u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta\theta^0\|_{L^1(\Omega)} + \|\Delta z^0\|_{H^1(\Omega)}, \\ \Delta_c := |\Delta\nu| + |\Delta k_1| + |\Delta k_2| + |\Delta c_{V1}| + |\Delta c_{V2}| + |\Delta\lambda| + |\Delta\mu|,$$

при всех $\mathbf{q} = (q_0, q_1)$, $\mathbf{r} = (r_0, r_1)$ таких, что $q_0, r_0 \in [1, \infty]$, $q_1, r_1 \in [1, 2]$ и $1/(2q_0) + 1/r_0 = (1 + \varepsilon)/2$ (или $q_0 = 1$, $r_0 = \infty$), $1/(2q_1) + 1/r_1 = 1 + \varepsilon/4$ с любым $\varepsilon > 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $z^0 \in H^1(\Omega)$, то слабое решение задачи (1)–(3) единственно.

2. Для доказательства теоремы применим подход из [5]. Для краткости будем считать, что $\mathcal{P}^{(1)} = \mathcal{P}$, т.е. верхний индекс (1) будем опускать. Положим $I_0 y(t) := \int_0^t y(\tau) d\tau$. Ясно, что $z = e^{-I_0 f(\theta)} z^0$, и так как $z^0 \in H^1(\Omega)$, то существует

$$z_x = e^{-I_0 f(\theta)} [z_x^0 - I_0(f'(\theta)\theta_x) \cdot z^0], \quad (5)$$

откуда $\|z_x\|_{L^{2,\infty}(Q)} \leq \|z_x^0\|_{L^2(\Omega)} + L\|\theta_x\|_{L^{2,1}(Q)}$, где $L = \|f'\|_C$.

Установим сначала вспомогательные оценки для $\Delta\eta$ и Δu .

ЛЕММА 1. При всех $0 < t \leq T$ справедливы оценки

$$\|\Delta\eta\|_{L^\infty(Q_t)} \leq K(\|\Delta u\|_{L^{2,\infty}(Q_t)} + \|\Delta z\|_{L^{\infty,2}(Q_t)} + \|\Delta\theta\|_{L^{\infty,1}(Q_t)} \\ + \|\Delta\eta^0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\Delta u^0\|_{L^2(\Omega)} + \Delta_{1c}), \\ \|\Delta u\|_{V_2(Q_t)} \leq K(\|d\Delta\eta\|_{L^{\infty,2}(Q_t)} + \|\Delta z\|_{L^{2,\infty}(Q_t)} + \|\Delta\theta\|_{L^2(Q_t)} + \|\Delta u^0\|_{L^2(\Omega)} + \Delta_{1c}),$$

где функция $d \in L^2(0, T)$ такова, что $\|d\|_{L^2(0, T)} \leq K_1$, и $\Delta_{1c} := |\Delta\nu| + |\Delta k_1| + |\Delta k_2|$. Здесь и ниже величины K, K_1 не зависят от t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\Delta p = [k(z)\Delta\rho + \Delta k(z) \cdot \rho^{(2)}]\theta^{(2)} + k(z)\rho\Delta\theta$ и

$$|\Delta k(z)| \leq |k_1 - k_2| \cdot |\Delta z| + |\Delta k_1| + |\Delta k_2|. \quad (6)$$

В силу равномерных двусторонних оценок $\eta^{(\ell)}$ и $z^{(\ell)}$ получим

$$|\Delta p| \leq K[\theta^{(2)}|\Delta\eta| + \theta^{(2)}(|\Delta z| + |\Delta k_1| + |\Delta k_2|) + \Delta\theta].$$

Положив $d_1 := \|\theta^{(2)}\|_{L^\infty(\Omega)}$ и применив оценку $\|d_1\|_{L^2(0,T)} = \|\theta^{(2)}\|_{L^\infty,2(Q)} \leq K$, выведем

$$\begin{aligned} I_0\|\Delta p\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq K[I_0(\|d_1\Delta\eta\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\Delta z\|_{L^\infty,2(Q_t)} + \Delta_{1c} + \|\Delta\theta\|_{L^\infty,1(Q_t)}], \\ \|\Delta p\|_{L^2(Q_t)} &\leq K(\|d_1\Delta\eta\|_{L^2(Q_t)} + \|\Delta z\|_{L^2,\infty(Q_t)} + \Delta_{1c} + \|\Delta\theta\|_{L^2(Q_t)}). \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом двух последних оценок доказательство леммы повторяет доказательства лемм 2 и 3 в [5].

Выведем теперь вспомогательные оценки для Δz .

ЛЕММА 2. При всех $0 < t \leq T$ справедливы оценки

$$\|\Delta z\|_{L^\infty(Q_t)} \leq K(\|\Delta\theta\|_{L^\infty,1(Q_t)} + \|\Delta z^0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\Delta f\|_C), \quad (8)$$

$$\|\Delta z_x\|_{L^2,\infty(Q_t)} \leq K(\|\Delta\theta\|_{L^\infty,1(Q_t)} + \|\Delta\theta_x\|_{L^2,1(Q_t)} + \|\Delta z^0\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta f\|_{C^1}). \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $z = e^{-I_0 f(\theta)} z^0$, $f(\theta) \geq 0$ и $0 \leq z^{0,(2)} \leq 1$, то

$$|\Delta z| \leq |\Delta I_0 f(\theta)| z^{0,(2)} + e^{-I_0 f(\theta)} |\Delta z^0| \leq L I_0 |\Delta\theta| + T \|\Delta f\|_C + |\Delta z^0|.$$

В силу формулы (5) имеем также

$$\begin{aligned} |\Delta z_x| &\leq |\Delta I_0 f(\theta)| (|z_x^0| + |I_0(f'(\theta)\theta_x)|) + e^{-I_0 f(\theta)} (|\Delta z_x^0| \\ &\quad + |I_0 \Delta(f'(\theta)\theta_x)| + |I_0(f'(\theta)\theta_x)| \cdot |\Delta z^0|) \\ &\leq (L I_0 |\Delta\theta| + T \|\Delta f\|_C) (|z_x^0| + L I_0 |\theta_x|) \\ &\quad + |\Delta z_x^0| + L I_0 |\Delta\theta_x| + (T \|\Delta f'\|_C + L |\Delta z^0|) I_0 |\theta_x|. \end{aligned}$$

Полученные оценки для Δz и Δz_x влекут (8) и (9) соответственно (поскольку $\|z_x^0\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta_x\|_{L^2,1(Q)} \leq K$).

Дадим комбинированную оценку для $\Delta\eta$, Δu и Δz .

ЛЕММА 3. При всех $0 < t \leq T$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\Delta\eta\|_{L^\infty(Q_t)} + \|\Delta u\|_{V_2(Q_t)} + \|\Delta z\|_{L^\infty(Q_t)} &\leq K(\|\Delta\theta\|_{L^\infty,1(Q_t)} + \|\Delta\theta\|_{L^2(Q_t)} \\ &\quad + \|\Delta\eta^0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\Delta u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta z^0\|_{L^\infty(\Omega)} + \Delta_{1c} + \|\Delta f\|_C). \end{aligned} \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нормы Δz в правых частях оценок леммы 1 можно оценить в силу (8). Тогда оценка (10) фактически следует из леммы 4 в [5].

Выведем ключевую оценку для $\Delta\theta$.

ЛЕММА 4. При всех $0 < t \leq T$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\Delta\theta\|_{W_{\mathbf{q},\mathbf{r}}^{1,0}(Q_t)} &\leq K(\|\Delta\eta\|_{L^\infty(Q_t)} + \|\Delta u\|_{V_2(Q_t)} + \|\Delta z\|_{L^\infty(Q_t)} + \|\Delta z_x\|_{L^2,\infty(Q_t)} \\ &\quad + \|\Delta\theta\|_{L^\infty,1(Q_t)} + \|\Delta\theta\|_{L^2(Q_t)} + \|\Delta\theta^0\|_{L^1(\Omega)} + \Delta_c + \|\Delta f\|_C), \end{aligned} \quad (11)$$

при всех $\mathbf{q}, \mathbf{r}$, указанных в теореме.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разделив первое из уравнений (2) на $c_V(z)$ и использовав второе, формально получим ($c'_V = c_{V1} - c_{V2}$)

$$\theta_t = \left(\frac{\lambda \rho}{c_V(z)} \theta_x \right)_x + \frac{\lambda \rho c'_V}{c_V^2(z)} z_x \theta_x + \frac{\sigma u_x}{c_V(z)} + (\mu + c'_V \theta) f(\theta) \frac{z}{c_V(z)}. \quad (12)$$

Фактически $\theta \in V_2(Q)$ является слабым решением параболического уравнения (12) при краевых и начальных условиях

$$\frac{\lambda \rho}{c_V(z)} \theta_x \Big|_{x=0, M} = 0 \quad \text{и} \quad \theta|_{t=0} = \theta^0,$$

что выводится при помощи стандартной работы с интегральными тождествами.

Поэтому $\Delta \theta \in V_2(Q)$ является слабым решением параболической задачи

$$\Delta \theta_t = (\beta \Delta \theta_x + \Psi)_x + F \quad \text{в } Q, \quad (13)$$

$$(\beta \Delta \theta_x + \Psi)|_{x=0, M} = 0, \quad \Delta \theta|_{t=0} = \Delta \theta^0 \quad (14)$$

с коэффициентом $\beta := \lambda \rho / c_V(z)$ и свободными членами $\Psi := \Delta \beta \cdot \theta^{(2)}$ и

$$F := F_1 + F_2 + F_3 = \Delta \left(\frac{\lambda \rho c'_V}{c_V^2(z)} z_x \theta_x \right) + \Delta \frac{\sigma u_x}{c_V(z)} + \Delta \left((\mu + c'_V \theta) f(\theta) \frac{z}{c_V(z)} \right).$$

Оценим нормы Ψ и F_j , $j = 1, 2, 3$. При всех $0 < t \leq T$, использовав оценку $\|\theta_x^{(2)}\|_{L^2(Q)} \leq \overline{N}$, получим

$$\|\Psi\|_{L^2(Q_t)} \leq \overline{N} \left\| \Delta \frac{\lambda \rho}{c_V(z)} \right\|_{L^\infty(Q_t)} \leq K(\|\Delta \eta\|_{L^\infty(Q_t)} + \|\Delta z\|_{L^\infty(Q_t)} + \Delta_{2c}) \quad (15)$$

с $\Delta_{2c} := |\Delta \lambda| + |\Delta c_{V1}| + |\Delta c_{V2}|$, ср. с (6). Поскольку

$$F_1 = \Delta \frac{\lambda \rho c'_V}{c_V^2(z)} \cdot z_x^{(2)} \theta_x^{(2)} + \frac{\lambda \rho c'_V}{c_V^2(z)} (\Delta z_x \cdot \theta_x + z_x^{(2)} \Delta \theta_x),$$

а также $\|z_x^{(2)}\|_{L^{2,\infty}(Q)} + \|\theta_x\|_{L^2(Q)} \leq K$, выведем

$$\|F_1\|_{L^1(Q_t)} \leq K(\|\Delta \eta\|_{L^\infty(Q_t)} + \|\Delta z\|_{L^\infty(Q_t)} + \Delta_{2c} + \|\Delta z_x\|_{L^{2,\infty}(Q_t)} + \|\Delta \theta_x\|_{L^{2,1}(Q_t)}),$$

ср. с (15). В силу формулы

$$F_3 = \Delta((\mu + c'_V \theta) f(\theta)) \cdot \frac{z^{(2)}}{c_V^{(2)}(z^{(2)})} + (\mu + c'_V \theta) f(\theta) \Delta \frac{z}{c_V(z)}$$

и оценки $\|\theta\|_{L^2(Q)} \leq K$ имеем

$$\|F_3\|_{L^2(Q_t)} \leq K(\|\Delta \theta\|_{L^2(Q_t)} + \|\Delta z\|_{L^\infty(Q_t)} + |\Delta \mu| + \Delta_{2c} + \|\Delta f\|_C).$$

Далее, приняв во внимание оценку $\|\Delta c_V\|_{L^\infty(Q_t)} \leq |c_{V1} - c_{V2}| \|\Delta z\|_{L^\infty(Q_t)} + |\Delta c_{V1}| + |\Delta c_{V2}|$ и вторую оценку из (7), из доказательства леммы 6 в [5] (см. там оценки (25) и (26)) получим также

$$\|F_2\|_{L^1(Q_t)} \leq K(\|\Delta \eta\|_{L^\infty(Q_t)} + \|\Delta u_x\|_{L^2(Q_t)} + \|\Delta \theta\|_{L^2(Q_t)} + \|\Delta z\|_{L^\infty(Q_t)} + \Delta_{1c} + |\Delta c_{V1}| + |\Delta c_{V2}|).$$

Применив для линейной параболической задачи (13), (14) стандартную $V_2(Q_t)$ -оценку (в случае $F = 0$, $\Delta\theta^0 = 0$) и $W_{\mathbf{q},\mathbf{r}}^{1,0}(Q_t)$ -оценку из [4] (в случае $\Psi = 0$), установим

$$\|\Delta\theta\|_{W_{\mathbf{q},\mathbf{r}}^{1,0}(Q_t)} \leq K(\|\Psi\|_{L^2(Q_t)} + \|F\|_{L^1(Q_t)} + \|\Delta\theta^0\|_{L^1(\Omega)}).$$

В силу указанных выше оценок для Ψ и F_i отсюда следует оценка (11).

В завершение доказательства теоремы подставим оценки (10) и (9) в правую часть (11) и получим при всех $0 < t \leq T$:

$$\|\Delta\theta\|_{W_{\mathbf{q},\mathbf{r}}^{1,0}(Q_t)} \leq K(\|\Delta\theta\|_{L^2(Q_t)} + \|\Delta\theta_x\|_{L^{2,1}(Q_t)} + \Delta^0 + \Delta_c + \|\Delta f\|_{C^1}). \quad (16)$$

Выбрав сначала $\mathbf{q} = (2, 2)$ и $r_0 > 2$, $r_1 > 1$ и применив лемму 3.6 из [4] (которая заменяет в данной ситуации лемму Гронуолла), выведем

$$\|\Delta\theta\|_{L^2(Q_t)} + \|\Delta\theta_x\|_{L^{2,1}(Q_t)} \leq K(\Delta^0 + \Delta_c + \|\Delta f\|_{C^1}).$$

Теперь оценки (10), (16) и (9) влекут оценку (4).

ЗАМЕЧАНИЕ. Как и в [5], можно рассмотреть неоднородные краевые условия (3), другие неоднородные краевые условия и учесть свободные члены во втором уравнении (1) и первом уравнении (2). Это не было сделано, чтобы не загромождать рассуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
2. Lions P. L. Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Vol. 2. Compressible Models. Oxford: Clarendon Press, 1998.
3. Амосов А. А., Злотник А. А. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301. № 1. С. 11–15.
4. Злотник А. А., Амосов А. А. // Сиб. матем. ж. 1997. Т. 38. № 4. С. 767–789.
5. Злотник А. А., Амосов А. А. // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 6. С. 835–846.
6. Злотник А. А., Сун Цзян // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 6. С. 795–800.
7. Zlotnik A. A., Amosov A. A. // The Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Methods / ed. R. Salvi. Lecture Notes in Pure and Appl. Math.. V. 223. New York–Basel: M. Dekker, 2001. P. 141–158.
8. Hoff D. // SIAM J. Math. Anal. 1996. V. 27. № 5. P. 1193–1211.
9. Злотник А. А., Пузанов С. Н. // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 6. С. 944–948.
10. Chen G.-Q., Hoff D., Trivisa K. // Acta Math. Appl. Sinica. 2002. V. 18. № 1. P. 15–36.
11. Chen G.-Q., Hoff D., Trivisa K. // Arch. Rat. Mech. Anal. 2003. V. 166. № 4. P. 321–358.
12. Tabata M. // Kobe J. Math. 1992. V. 9. № 2. P. 195–205.
13. Петров А. Н. // Динамика сплош. среды. 1993. № 107. С. 112–123.
14. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралъцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1968.