Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. А. Сукочев, В. И. Чилин, А. Ф. Бер, Дифференцирование в коммутативных регулярных алгебрах, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 3, 453–454

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm547>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:11:53

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В КОММУТАТИВНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ АЛГЕБРАХ

А. Ф. Бер, Ф. А. Сукочев, В. И. Чилин

Теория дифференцирований в операторных алгебрах (C^* -алгебрах, AW^* -алгебрах и W^* -алгебрах) в настоящее время достаточно хорошо разработана (см., например, [1], [2]). Интерес к таким дифференцированиям во многом определяется их тесной связью с автоморфизмами соответствующих алгебр. Хорошо известно, что любое дифференцирование C^* -алгебры является непрерывным, а дифференцирование AW^* -алгебры – всегда внутреннее. Развитие теории алгебр измеримых операторов, присоединенных к W^* -алгебрам и AW^* -алгебрам (см. обзор [3]) позволило выделить новые классы алгебр неограниченных операторов, которые по своей алгебраической и порядковой структуре близки к W^* -алгебрам и AW^* -алгебрам. Естественно возникает вопрос об описании свойств дифференцирований для этих классов алгебр. До сих пор был открытым вопрос о том, будет ли внутренним всякое дифференцирование в алгебре $L(M)$ всех измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана M .

В настоящей заметке показывается, что уже для коммутативных алгебр фон Неймана M существуют не внутренние дифференцирования на $L(M)$. Кроме того, устанавливается, что дифференцирования на $L(M)$, вообще говоря, не являются непрерывными в топологии сходимости по мере. Указанные вопросы рассматриваются в заметке для класса коммутативных регулярных алгебр, который, в частности, содержит класс алгебр $L(M)$, в случае, когда M – коммутативная алгебра фон Неймана.

Используется терминология и обозначения теории регулярных колец из [4], теории алгебр фон Неймана из [5] и теории измеримых операторов из [3], [6].

Пусть $\mathcal{A}$ – коммутативная алгебра с единицей 1 над полем K . Через $\nabla(\mathcal{A})$ обозначим множество всех идемпотентов в $\mathcal{A}$. Для любых $e, g \in \nabla$ положим $e \leq g$, если $eg = e$. Известно, что отношение $e \leq g$ есть отношение частичного порядка на $\nabla(\mathcal{A})$, относительно которого $\nabla(\mathcal{A})$ является булевой алгеброй. Будем предполагать, что в алгебре $\mathcal{A}$ выполняется следующее условие регулярности: для любого $a \in \mathcal{A}$ существует такое $e \in \nabla(\mathcal{A})$, что $a\mathcal{A} = e\mathcal{A}$ (в этом случае говорят, что $\mathcal{A}$ – коммутативная регулярная алгебра). Идемпотент $e \in \nabla(\mathcal{A})$ назовем носителем для элемента $a \in \mathcal{A}$, если $ea = a$ и из $g \in \nabla(\mathcal{A})$, $ga = a$, следует, что $e \leq g$. Нетрудно видеть, что носитель для a всегда существует (его мы будем обозначать через $s(a)$) и $a\mathcal{A} = s(a)\mathcal{A}$.

Пусть μ – конечная строго положительная мера на булевой алгебре идемпотентов $\nabla(\mathcal{A})$ коммутативной регулярной алгебры $\mathcal{A}$. Для любых $a, b \in \mathcal{A}$ положим $\rho(a, b) = \mu(s(a - b))$. Ясно, что ρ является метрикой на $\mathcal{A}$ и топология, порожденная ρ , наделяет $\mathcal{A}$ структурой топологического кольца.

Пусть $\mathcal{B}$ – произвольная подалгебра в $\mathcal{A}$. Линейное отображение $\delta: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ называется дифференцированием, если $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ для всех $a, b \in \mathcal{B}$. Очевидно, что $\delta(e) = 0$ и $\delta(be) = \delta(b)e$ для всех $b \in \mathcal{B}$, $e \in \mathcal{B} \cap \nabla(\mathcal{A})$. Следующая теорема решает задачу о продолжении дифференцирования в коммутативных регулярных алгебрах.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{A}$ – коммутативная регулярная алгебра с единицей над полем K характеристики нуль, μ – конечная строго положительная счетно аддитивная мера на

булевой алгебре $\nabla(\mathcal{A})$ всех идемпотентов в $\mathcal{A}$, $\rho(a, b) = \mu(s(a - b))$, $a, b \in \mathcal{A}$. Пусть $(\mathcal{A}, \rho)$ – полное метрическое пространство, $\mathcal{B}$ – подалгебра в $\mathcal{A}$, $\delta_0: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ – дифференцирование, для которого $s(\delta_0(b)) \leq s(b)$ при всех $b \in \mathcal{B}$. Тогда существует такое дифференцирование $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, что $\delta_0(b) = \delta(b)$ для всех $b \in \mathcal{B}$.

Элемент $a \in \mathcal{A}$ называется *простым*, если он представим в виде $a = \sum_{k=1}^{\omega} \alpha_k e_k$, $\alpha_k \in K$, $e_k \in \nabla(\mathcal{A})$, $e_k e_j = 0$, $k \neq j$, $k, j = 1, \dots, \omega$, где ω – либо натуральное число, либо $\omega = \infty$ (в последнем случае сходимость ряда понимается по метрике ρ). Через $\mathcal{A}(\nabla)$ обозначим подалгебру всех простых элементов из $\mathcal{A}$.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия для существования ненулевого дифференцирования на коммутативной регулярной алгебре.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{A}$ и μ те же, что и в теореме 1, поле K алгебраически замкнуто. Тогда на $\mathcal{A}$ существует ненулевое дифференцирование в том и только в том случае, когда $\mathcal{A}(\nabla) \neq \mathcal{A}$.

Укажем важное приложение теоремы 2 для коммутативных алгебр фон Неймана. Пусть $L(M)$ – алгебра всех измеримых операторов, присоединенных к коммутативной алгебре фон Неймана M . Известно, что $L(M)$ является коммутативной регулярной алгеброй с единицей над полем комплексных чисел.

ТЕОРЕМА 3. Для коммутативной алгебры фон Неймана M следующие условия эквивалентны:

- 1) существует ненулевое дифференцирование из $L(M)$ в $L(M)$;
- 2) булева алгебра $\nabla(L(M))$ не является атомической.

Из теоремы 3, в частности, следует, что если булева алгебра $\nabla(L(M))$ не атомическая, то на $L(M)$ существует не внутреннее дифференцирование.

Известно, что на любой коммутативной алгебре фон Неймана M существует точный нормальный полуконечный след τ (если $\nabla(M)$ имеет счетный тип, т.е. любое семейство ненулевых попарно дизъюнктивных элементов из $\nabla(M)$ не более чем счетно, то след τ можно выбрать конечным). Обозначим через t_τ топологию сходимости по мере в $L(M)$ относительно следа τ . Линейная оболочка в $L(M)$, порожденная $\nabla(M)$, плотна в $(L(M), t_\tau)$. Поэтому любое дифференцирование на $L(M)$, непрерывное в топологии t_τ , будет тождественно равно нулю. Следовательно, согласно теореме 3 в случае, когда булева алгебра $\nabla(L(M))$ не атомическая, на $L(M)$ существует дифференцирование, которое не является непрерывным в топологии t_τ .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sakai S. C^* -Algebras and W^* -Algebras. New York: Springer-Verlag, 1971. 2. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982. 3. Чилин В. И. Частично упорядоченные бэровские инволютивные алгебры // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 27. М.: ВИНТИ, 1985. С. 99–128. 4. Скорняков Л. А. Делекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца. М.: Физматгиз, 1961. 5. Takesaki M. Theory of Operator Algebras I. New York: Spinger-Verlag, 1979. 6. Yeadon F. J. // Proc. Camb. Phil. Soc. 1973. V. 74. P. 257–268.

Поступило
22.10.2003