Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Чешкова, О паре гиперповерхностей в евклидовом пространстве, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 3, 474–475

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm548>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:32:47

О ПАРЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. А. Чешкова

Говорят, что отображение $f: M \rightarrow \bar{M}$ для двух римановых многообразий $M, \bar{M}$ *сильно соотраняющее кривизну*, если f отображает $\nabla^m R$ в $\bar{\nabla}^m \bar{R}$ для каждого $m = 0, 1, 2, \dots$, где $\nabla^m R, \bar{\nabla}^m \bar{R}$ обозначает m -е ковариантные производные тензорных полей кривизны R на M и $\bar{R}$ на $\bar{M}$, соответственно [1, с. 324]. Номидзу и Яно [1], [2] доказали теорему: *сильно соотраняющий кривизну диффеоморфизм между неприводимыми аналитическими римановыми многообразиями M и $\bar{M}$ размерности ≥ 2 есть гомотетическое преобразование.*

ТЕОРЕМА 1. *Если $f: M \rightarrow \bar{M}$ – диффеоморфизм пары невырожденных гиперповерхностей в евклидовом пространстве E^n , $n > 3$, соотраняющий тензоры кривизны, то первые фундаментальные формы $g, \bar{g}$ и вторые фундаментальные формы $b, \bar{b}$ гиперповерхностей $M, \bar{M}$ удовлетворяют равенствам $\bar{g} = t^2 g, \bar{b} = tb, t \in R$.*

ТЕОРЕМА 2. *Если $f: M \rightarrow \bar{M}$ – диффеоморфизм пары невырожденных гиперповерхностей в евклидовом пространстве E^n , $n > 3$, соотраняющий тензоры кривизны, то локально гиперповерхность $\bar{M}$ получена из гиперповерхности M с помощью гомотетии и изометрии в E^n .*

1. Основные формулы. Пусть $M, \bar{M}$ – две гладкие гиперповерхности в евклидовом пространстве E^n , $f: M \rightarrow \bar{M}$ – диффеоморфизм, $F(M)$ – R -алгебра дифференцируемых на M функций, $T_s^q(M)$ – F -модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (q, s) , ∂ – дифференцирование в E^n .

Формулы Гаусса–Вейнгартена гиперповерхности M имеют вид [1, с. 23]

$$\begin{aligned} \partial_X Y &= \nabla_X Y + b(X, Y)n, \\ \partial_X n &= -AX, \end{aligned} \quad (1)$$

где $X, Y \in T_0^1(M)$, ∇ – связность Леви-Чивита метрики $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$; $b(X, Y) = g(AX, Y)$ – вторая фундаментальная форма поверхности M , $A \in T_1^1(M)$ – оператор Вейнгартена, n – орт нормали, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в E^n . Выполняются уравнения Гаусса–Кодацци

$$R(X, Y)Z = b(Y, Z)AX - b(X, Z)AY, \quad (2)$$

$$(\nabla_Y b)(X, Z) = (\nabla_X b)(Y, Z), \quad (3)$$

где $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$ – тензор кривизны связности ∇ , $(\nabla_X b)(Y, Z) = Xb(Y, Z) - b(\nabla_X Y, Z) - b(Y, \nabla_X Z)$ – ковариантная производная поля b в связности ∇ .

Обозначим через r радиус-вектор точки $p \in M$, через $\bar{r}$ – радиус-вектор точки $f(p) \in \bar{M}$. Тогда отображение $f: M \rightarrow \bar{M}$ запишется в виде

$$\bar{r} = f(r).$$

Дифференциал отображения f определится из равенства $df(X) = df(\partial_X r) = \partial_X \bar{r}$, $X \in TM$. Отображение f индуцирует на M метрику

$$\bar{g}(X, Y) = \langle df(X), df(Y) \rangle.$$

Пусть $\bar{b}^*(dfX, dfY) = \bar{b}(X, Y)$ – вторая фундаментальная форма гиперповерхности $\bar{M}$, $\bar{\nabla}$ – связность Леви-Чивита метрики $\bar{g}$, $\bar{n}$ – орт нормали гиперповерхности $\bar{M}$. Тогда [3]

$$\partial_X dfY - df\bar{\nabla}_X Y = \bar{b}(X, Y)\bar{n}. \quad (4)$$

Имеем

$$\begin{aligned}\partial_X \partial_Y df Z - df \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{b}(X, \bar{\nabla}_Y Z) \bar{n} &= X \bar{b}(Y, Z) \bar{n} + \bar{b}(Y, Z) \partial_X \bar{n}, \\ \partial_Y \partial_X df Z - df \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{b}(Y, \bar{\nabla}_X Z) \bar{n} &= Y \bar{b}(X, Z) \bar{n} + \bar{b}(X, Z) \partial_Y \bar{n}, \\ \partial_{[X, Y]} df Z - df \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z &= \bar{b}([X, Y], Z) \bar{n}.\end{aligned}$$

Так как

$$\partial_X \partial_Y df Z - \partial_Y \partial_X df Z - \partial_{[X, Y]} df Z = 0,$$

имеем

$$df \bar{R}(X, Y) Z = ((\bar{\nabla}_Y \bar{b})(X, Z) - (\bar{\nabla}_X \bar{b})(Y, Z)) \bar{n} + \bar{b}(X, Z) \partial_Y \bar{n} - \bar{b}(Y, Z) \partial_X \bar{n},$$

где $(\bar{\nabla}_X \bar{b})(Y, Z) = X \bar{b}(Y, Z) - \bar{b}(\bar{\nabla}_X Y, Z) - \bar{b}(Y, \bar{\nabla}_X Z)$ — ковариантная производная поля $\bar{b}$ связности $\bar{\nabla}$, $\bar{R}(X, Y) Z = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z$ — тензор кривизны связности $\bar{\nabla}$.

Так как $df \bar{R}(X, Y) Z, \partial_X \bar{n} \in T\bar{M}$, получим

$$df \bar{R}(X, Y) Z = \bar{b}(X, Z) \partial_Y \bar{n} - \bar{b}(Y, Z) \partial_X \bar{n}, \quad (5)$$

$$(\bar{\nabla}_Y \bar{b})(X, Z) = (\bar{\nabla}_X \bar{b})(Y, Z). \quad (6)$$

2. Доказательство теоремы 1. По условию теоремы $\bar{R} = R$. Используя (2), (5), получим

$$b(Y, Z) df AX - b(X, Z) df AY = \bar{b}(X, Y) \partial_Y \bar{n} - \bar{b}(Y, Z) \partial_X \bar{n}.$$

Пусть $X_i, i = 1, \dots, n-1$, — орты главных направлений гиперповерхности M , k_i — главные кривизны. Тогда $AX_i = k_i X_i$. Полагаем $\partial_{X_i} \bar{n} = -\bar{A} df X_i$ и при $n > 3$ рассмотрим

$$\begin{aligned}k_i k_j df X_j &= \bar{b}_{ii} \bar{A} df X_j - \bar{b}_{ij} \bar{A} df X_i, & i \neq j, \\ k_\alpha k_j df X_j &= \bar{b}_{\alpha\alpha} \bar{A} df X_j - \bar{b}_{\alpha j} \bar{A} df X_i, & \alpha \neq i, j.\end{aligned}$$

Так как $k_i k_\alpha \neq 0$, домножим первое равенство на k_α , а второе на k_i и отнимем. Получим

$$(\bar{b}_{ii} k_\alpha - \bar{b}_{\alpha\alpha} k_i) \bar{A} df X_j - \bar{b}_{ij} k_\alpha \bar{A} df X_i + \bar{b}_{\alpha j} \bar{A} df X_\alpha = 0.$$

Так как $df X_i, df X_j, df X_\alpha$ линейно независимы и $\det \bar{A} \neq 0$, получим

$$\bar{b}_{ii} k_\alpha - \bar{b}_{\alpha\alpha} k_i = 0, \quad \bar{b}_{ij} = 0, \quad \bar{b}_{i\alpha} = 0.$$

Итак,

$$k_i k_j df X_j = \bar{b}_{ii} \bar{A} df X_j. \quad (7)$$

Таким образом, линии кривизны гиперповерхности M при отображении $f: M \rightarrow \bar{M}$ перейдут в линии кривизны гиперповерхности $\bar{M}$.

Положим $\bar{A} df X_i = \bar{k}_i df X_i$. Имеем

$$\bar{b}_{ii} = \langle \bar{A} df X_i, df X_i \rangle = \bar{k}_i \bar{g}_{ii}. \quad (8)$$

В силу (7), (8) имеем

$$k_i k_j = \bar{k}_i \bar{k}_j \bar{g}_{ii}. \quad (9)$$

Так как $n > 3$, рассмотрим $k_i k_\alpha = \bar{k}_i \bar{k}_\alpha \bar{g}_{ii}$, $\alpha \neq j$. Отсюда $k_j / \bar{k}_j = k_\alpha / \bar{k}_\alpha$. Положим $k_j / \bar{k}_j = t$. Из (8), (9) имеем $\bar{g}_{ii} = t^2$, $\bar{b}_{ii} = t k_i = t b_{ii}$. Так как X_i — орты главных направлений гиперповерхности M и $df X_i$ — главные направления гиперповерхности $\bar{M}$, то матрица g в базисе X_i , единичная, а матрица $\bar{b}$ диагональная. Следовательно, имеем

$$\bar{g} = t^2 g, \quad \bar{b} = t b. \quad (10)$$

Докажем, что $t = \text{const}$. Дифференцируем равенство $\bar{b}(Y, Z) = tb(Y, Z)$:

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X \bar{b})(Y, Z) + \bar{b}(\bar{\nabla}_X Y, Z) + \bar{b}(Y, \bar{\nabla}_X Z) \\ = (Xt)b(Y, Z) + t(\nabla_X b)(Y, Z) + tb(\nabla_X Y, Z) + tb(Y, \nabla_X Z). \end{aligned}$$

Так как отображение f конформное, то [4, с. 84]

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + \omega(X)Y + \omega(Y)X - g(X, Y)U, \\ \omega(X) &= \frac{Xt}{t}, \quad \omega(X) = g(X, U), \quad X, Y \in \chi(M). \end{aligned} \quad (11)$$

Имеем

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X \bar{b})(Y, Z) + t\omega(Y)b(X, Z) - tg(X, Y)b(U, Z) \\ + t\omega(X)b(Y, Z) + t\omega(Z)b(Y, X) - tg(X, Z)b(Y, U) = t(\nabla_X b)(Y, Z). \end{aligned}$$

Используем равенства (3), (6):

$$g(X, Z)b(Y, U) - g(Y, Z)b(X, U) = 0.$$

Полагая $X = Z = X_i$, $Y = X_j$, имеем $k_j \omega(X_j) = 0$, $\omega(X_j) = 0$, $X_j t = 0$, $j = 1, \dots, n-1$, $t = \text{const}$.

3. Доказательство теоремы 2. По теореме Бонне [1, с. 51] квадратичные формы $\bar{g}$, $\bar{b}$ определяют гиперповерхность $\bar{M}$ вплоть до положения в E^n , а гиперповерхность, определяемая уравнением $\bar{r} = tr$, имеет те же квадратичные формы. Следовательно, гиперповерхность $\bar{M}$ получена из гиперповерхности M с помощью гомотетии и изометрии в E^n .

В частности, при изометрии f имеем $t^2 = 1$ и имеет место теорема о жесткости для гиперповерхности в E^n , $n > 3$ (см. [1, с. 47]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М.: Мир, 1981.
2. Nomizu K., Yano K. // Math. Z. 1967. V. 97. P. 29–37.
3. Чешкова М. А. // Изв. Алтайского гос. ун-та, Барнаул. 1996. № 1. С. 7–9.
4. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.