Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Холщевникова, Сумма всюду сходящегося тригонометрического ряда, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 3, 470–473

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm549>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 07:09:35

СУММА ВСЮДУ СХОДЯЩЕГОСЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

Н. Н. Холщевникова

В данной работе рассматриваются два вопроса, касающиеся суммы всюду сходящегося тригонометрического ряда. Хорошо известна (см., например, [1, гл. I, § 72])

ТЕОРЕМА ДЮ БУА-РЕЙМОНА–ЛЕБЕГА. *Если тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1)$$

всюду на $[0, 2\pi)$ сходится к ограниченной функции f , то этот ряд есть ряд Фурье функции f .

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства теоремы следует, что ее утверждение остается справедливым, если ряд (1) с условием

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad (2)$$

всюду суммируется к функции f методом Римана.

Эта теорема была доказана дю Буа-Реймоном [2] для ограниченной, интегрируемой по Риману функции f в 1876 г. и обобщена Лебегом [3] на случай ограниченной (и, автоматически, интегрируемой по Лебегу) функции в 1903 г.

На вопрос Б. С. Кашина о примере тригонометрического ряда всюду сходящегося к ограниченной, но не интегрируемой по Риману функции, автор не только сразу не ответил, но и не нашел соответствующего примера в широко известной литературе по тригонометрическим рядам [1], [3]–[6] (что естественно не исключает наличие такого примера в других опубликованных или нет работах). Приведем здесь (упрощенный после обсуждения с В. А. Скворцовым)

ПРИМЕР ограниченной, но не интегрируемой по Риману функции, являющейся суммой всюду сходящегося тригонометрического ряда.

Пусть E – совершенное, нигде не плотное множество положительной меры на $[0, 2\pi)$, например, канторовское множество положительной меры. Занумеруем каким-нибудь способом смежные интервалы множества E в последовательность $I_i = (a_i, b_i)$, $i \in \mathbb{N}$. Для каждого интервала I_i через J_i обозначим подотрезок

$$J_i = \left[\frac{a_i + b_i}{2} - \frac{b_i - a_i}{4^i}, \frac{a_i + b_i}{2} + \frac{b_i - a_i}{4^i} \right].$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00428.

Обозначим через f_i функцию, равную нулю вне J_i и на концах отрезка J_i , единице в середине J_i и линейную в левой и правой половинах отрезка J_i . Функции f_i , $i \in \mathbb{N}$, непрерывны на $[0, 2\pi)$. Положим

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x), \quad x \in [0, 2\pi).$$

Таким образом,

$$f(x) = \begin{cases} f_i(x), & x \in I_i (i \in \mathbb{N}), \\ 0, & x \in E. \end{cases}$$

Очевидно, что f — ограниченная функция первого класса Бэра, f непрерывна на смежных интервалах I_i , $i \in \mathbb{N}$, и разрывна в каждой точке множества E . Следовательно, f не интегрируема по Риману в силу критерия Лебега, так как множество ее точек разрыва имеет положительную меру. Ряды Фурье функций f_i , $i \in \mathbb{N}$, равномерно сходятся к f_i на $[0, 2\pi)$. В силу принципа локализации Римана отсюда и из определения функции f следует, что ее ряд Фурье $S(f)$ сходится к f на каждом из смежных интервалов I_i , $i \in \mathbb{N}$. Осталось показать, что $S(f)$ сходится к нулю на E .

Пусть $x \in E$, $\delta > 0$. Положим

$$A(x, \delta) = \{i \in \mathbb{N}: I_i \cap (x, x + \delta) \neq \emptyset\}, \quad B(x, \delta) = \{i \in \mathbb{N}: I_i \cap (x - \delta, x) \neq \emptyset\},$$

и оценим интегралы $\int_x^{x+\delta} f(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt$ и $\int_{x-\delta}^x f(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt$.

Имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_x^{x+\delta} f(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| &\leq \sum_{i \in A(x, \delta)} \int_{J_i} \frac{dt}{t-x} \\ &\leq \sum_{i \in A(x, \delta)} \frac{1}{\frac{a_i+b_i}{2} - \frac{b_i-a_i}{4^i} - a_i} 2 \frac{b_i-a_i}{4^i} \leq \sum_{i \in A(x, \delta)} \frac{2}{4^{i-1}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогично

$$\left| \int_{x-\delta}^x f(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| \leq \sum_{i \in B(x, \delta)} \frac{2}{4^{i-1}}. \quad (4)$$

При этом, если $A(x, \delta)$ или $B(x, \delta)$ пусто, то соответствующие интегралы равны нулю.

Заддим $\epsilon > 0$ и выберем номер i_0 таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{i \geq i_0} \frac{2}{4^{i-1}} < \frac{\epsilon}{4}. \quad (5)$$

Если $x \in E$ и x не является концом смежного к E интервала, то оба множества $A(x, \delta)$ и $B(x, \delta)$ бесконечны для любого $\delta > 0$. При этом, число $\delta > 0$ можно выбрать настолько малым, чтобы числа из $A(x, \delta)$ и $B(x, \delta)$ были не меньше i_0 .

Если $x \in E$ и x является, для определенности, правым концом смежного к E интервала, то выберем $\delta > 0$ таким образом, что $f(t) = 0$ при $t \in (x - \delta, x)$ и минимальный номер в $A(x, \delta)$ не меньше i_0 .

Как известно (см. [1, гл. I, § 33]), для частичных сумм ряда Фурье для произвольного $\delta > 0$ справедлива формула

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt + o(1),$$

где $o(1)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ равномерно по x . Отсюда следует, что для $x \in E$ и выбранного указанным образом по ϵ и i_0 числа $\delta > 0$ можно найти такой номер N , что ввиду оценок (3)–(5) получим

$$|S_n(f, x)| < \epsilon \quad \text{при } n \geq N.$$

Следовательно, ряд Фурье $S(f)$ функции f сходится к нулю в каждой точке множества E . Тем самым мы получили, что $S(f)$ всюду сходится к f . Пример построен.

При построении примера выяснилось также, что в нем, в качестве функции f не может фигурировать характеристическая функция какого-либо подмножества из $[0, 2\pi)$. А именно, справедлива

ТЕОРЕМА 1. Если тригонометрический ряд сходится всюду или сходится всюду на интервале (α, β) к функции f , то число значений функции f на $[0, 2\pi)$ или на (α, β) , соответственно, не равно двум.

Вообще число значений суммы тригонометрического ряда, там где ряд сходится, может быть конечным, счетным или континуальным, так как сумма ряда – борелевская функция на его области сходимости. Теорема 1 является следствием более общей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть тригонометрический ряд (1) с условием (2) суммируется методом Римана всюду или всюду на интервале (α, β) к функции f . Тогда число значений функции f на $[0, 2\pi)$ или на (α, β) , соответственно, не равно двум.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что ряд $S(1)$ с условием (2) суммируется методом Римана всюду на $[0, 2\pi)$ к характеристической функции $\chi_E(x)$, множества $E \subset [0, 2\pi)$, где $E \neq \emptyset$ и $E \neq [0, 2\pi)$. Тогда, как следует из теоремы дю Буа-Реймона–Лебега ряд S есть ряд Фурье $S(\chi_E)$ функции χ_E . Функция Римана $F(x)$ ряда S , являющаяся суммой дважды почленно проинтегрированного ряда S , равна в этом случае

$$F(x) = Ax + B + \int_0^x dt \int_0^t \chi_E(u) du. \quad (6)$$

Суммируемость ряда (1) с условием (2) методом Римана означает, что

$$D^2 F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{h^2} = \chi_E(x), \quad x \in [0, 2\pi),$$

где $\Delta_h^2 F(x) = F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)$.

Учитывая (6) получим, что

$$D^2 F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \int_0^h m(E \cap (x+t-h, x+t)) dt, \quad (7)$$

где $m(A)$ – мера множества A . Отсюда, в частности, следует, что χ_E – функция первого класса Бэра, а, значит, в силу теоремы Лебега–Хausдорфа (см. [7, § 31, IX]) – борелевская функция первого класса. Следовательно, [7, § 31, I], E – множество типа G_δ и F_σ одновременно. Тогда и множество $E_1 = [0, 2\pi) \setminus E$ имеет тип G_δ и F_σ .

Покажем, что если $E \cap (a, b) \neq \emptyset$, то найдется непустой интервал $(a_1, b_1) \subset E \cap (a, b)$. Действительно, множество $E \cap (a, b)$ имеет тип F_σ , поэтому $E \cap (a, b) = \bigcup_{k=1}^\infty F_k$, где F_k – замкнутые множества. Так как $E \cap (a, b)$ имеет также тип G_δ , в силу теоремы Бэра о категории хотя бы одно множество F_m плотно в $E \cap (a_1, b_1) \neq \emptyset$ для некоторого интервала $(a_1, b_1) \subset (a, b)$. Следовательно, $E \cap (a_1, b_1) = F_m \cap (a_1, b_1)$. Допустим, что $(a_1, b_1) \setminus F_m \neq \emptyset$. Тогда найдется непустой смежный интервал (c, d) к множеству F_m на (a_1, b_1) . Пусть, для определенности, $c \neq a_1$, $c \in F_m$. Тогда $D^2 F(c) = 1$, так как $c \in F_m$, но с другой стороны $1/h^2 \Delta_h^2 F(c) \leq 1/2$, так как $m(E \cap (c+t-h, c+t)) = m(E \cap (c+t-h, c)) \leq h-t$ для малых значений h и в силу формулы (7). Полученное противоречие доказывает, что $(a_1, b_1) \subset E \cap (a, b)$.

Аналогично, если $E_1 \cap (c, d) \neq \emptyset$, то найдется непустой интервал $(c_1, d_1) \subset E_1 \cap (c, d)$.

Обозначим через G – внутренность множества E , а через G_1 – внутренность множества E_1 . Заметим, что если (a, b) – составляющий интервал G , то $a, b \in E$ и, значит, $D^2 F(a) = D^2 F(b) = 1$. Аналогично, если (c, d) – составляющий интервал множества G_1 , то $c, d \in E_1$ и $D^2 F(c) = D^2 F(d) = 0$.

Пусть (a_1, b_1) – составляющий интервал G . Тогда $D^2 F(b_1) = 1$. Выберем h_1 таким, образом, чтобы выполнялись неравенства $0 < h_1 < 1$, $b_1 - h_1 < a_1$ и

$$\Delta_h^2 F(b_1) \geq \frac{31}{32} h^2 \quad \text{для } h \leq h_1.$$

Так как b_1 – конец составляющего интервала множества G , то $(b_1, b_1 + h_1) \cap E_1 \neq \emptyset$ и найдется интервал $(c, d) \subset (b_1, b_1 + h_1) \cap E_1$. Пусть (c_1, d_1) – составляющий интервал G_1 , содержащий

(c, d) . Тогда $b_1 < c_1 < b_1 + h_1$. Выберем t_1 таким образом, чтобы $t_1 < 1/2h_1$, $b_1 < c_1 - t_1$, $c_1 + t_1 < d_1$ и

$$\Delta_h^2 F(c_1) \geq \frac{1}{32} h^2 \quad \text{для } h \leq t_1.$$

Таким образом, $[c_1 - t_1, c_1] \subset (b_1, b_1 + h_1)$.

Продолжая построение, получим вложенную последовательность отрезков

$$[c_n - t_n, c_n] \subset (b_n, b_n + h_n), \quad [b_{n+1}, b_{n+1} + h_{n+1}] \subset (c_n - t_n, c_n),$$

где $t_{n+1} < \frac{1}{2}h_{n+1} < \frac{1}{2}t_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$, такую, что

$$b_n \in E, \quad c_n \in E_1, \quad D^2 F(b_n) = 1, \quad D^2 F(c_n) = 0, \quad (8)$$

$$\Delta_h^2 F(b_n) \geq \frac{31}{32} h^2 \quad \text{для } h \leq h_n, \quad (9)$$

$$\Delta_h^2 F(c_n) \geq \frac{1}{32} h^2 \quad \text{для } h \leq t_n. \quad (10)$$

Положим $\{d\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [c_n - t_n, c_n]$. Докажем, что $D^2 F(d)$ не может равняться ни 0, ни 1. Покажем, что из (9) следует, что $D^2 F(d) \neq 0$. Заметим сначала, что

$$m(E \cap (b_n, b_n + h_n)) \geq \frac{3}{4} h_n \quad \text{для } n \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

Допустим, что это не так. Тогда для некоторого n

$$\begin{aligned} \Delta_{h_n}^2 F(b_n) &= \int_0^{h_n} m(E \cap (b_n + t - h_n, b_n + t)) dt = \int_0^{h_n} m(E \cap (b_n + t - h_n, b_n)) dt \\ &\quad + \int_0^{h_n} m(E \cap (b_n, b_n + t)) dt \\ &< \int_0^{h_n} (t - h_n) dt + \int_0^{3/4 h_n} t dt + \int_{3/4 h_n}^{h_n} \frac{3}{4} h_n dt < \frac{31}{32} h_n^2. \end{aligned}$$

Следовательно, неравенство (11) верно и из него следует, что

$$\begin{aligned} \Delta_{h_n}^2 F(d) &= \int_0^{h_n} m(E \cap (d + t - h_n, d + t)) dt = \int_0^{h_n} m(E \cap (d + t - h_n, d)) dt \\ &\quad + \int_0^{h_n} m(E \cap (d, d + t)) dt \geq \int_0^{3/4 h_n} \left(h_n - t - \frac{h_n}{4} \right) dt = \frac{9}{32} h_n^2 \end{aligned}$$

для $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $D^2 F(d) \neq 0$. Аналогично с помощью (10) доказывается, что $D^2 F(d) \neq 1$. Полученное противоречие доказывает, что сумма тригонометрического ряда не может принимать двух значений, если ряд всюду сходится. Отсюда с помощью принципа локализации Римана доказывается и случай сходимости на интервале. Теорема доказана.

Отметим, что любое другое конечное число значений реализуется.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
2. Du Bois-Reymond. // Abh. Akad. Wiss. 1876. V. XII. P. 117–166.
3. Lebesgue H. // L'École norm. 1903. V. 20. № 3. P. 453–485.
4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. I, II. М.: Мир, 1965.
5. Lebesgue H. Leçon sur les séries trigonométriques. Paris, 1906.
6. Tonelli L. Serie trigonometriche. Bologna, 1928.
7. Куратовский К. Топология. Т. I. М.: Мир, 1966.