Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Омелянов, Д. А. Кулагин, Асимптотика кинк-кинк взаимодействия для уравнений типа sine-Gordon, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 4, 603–607

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm55>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 15:25:40

УДК 517.95

АСИМПТОТИКА КИНК-КИНК ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА SINE-GORDON

Д. А. Кулагин, Г. А. Омелянов

Рассматривается класс полулинейных волновых уравнений с малым параметром ε . Нелинейность $F(u)$ предполагается такой, что соответствующее уравнение имеет точное самоподобное решение типа кинка. Для $F(u)$ найдены достаточные условия, при выполнении которых два кинка взаимодействуют (в смысле главного члена асимптотики по ε) по тому же сценарию, что и кинки уравнения sine-Gordon.

Библиография: 9 названий.

Рассмотрим полулинейное волновое уравнение с параметром ε

$$\varepsilon^2(u_{tt} - u_{xx}) + F'(u) = 0. \quad (1)$$

Условия

$$F(z) \in C^\infty(\mathbb{R}^1), \quad F(z) > 0 \quad \text{для } z \in (0, 1), \quad (A)$$

$$F^{(i)}(z_0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, K, \quad F^{(K+1)}(z_0) > 0 \quad \text{для } z_0 = 0 \text{ и } z_0 = 1, \quad (B)$$

где $K = 1$ или $K = 3$, гарантируют существование самоподобного решения уравнения (1) типа кинка

$$u(x, t, \varepsilon) = \omega\left(\beta \frac{x - Vt}{\varepsilon}\right), \quad \beta^2 = (1 - V^2)^{-1}, \quad \omega(\eta) \in C^\infty(\mathbb{R}^1), \quad (2)$$
$$\omega(\eta) \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow -\infty, \quad \omega(\eta) \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow +\infty,$$

которое стабилизируется на бесконечностях со скоростью не ниже $1/\eta$. При дополнительном предположении

$$F\left(\frac{1}{2} + z\right) = F\left(\frac{1}{2} - z\right), \quad (C)$$

функция $\omega(\eta) - 1/2$ является нечетной, $\omega(\eta) + \omega(-\eta) = 1$. Примерами таких F являются

$$F(z) = \frac{1 - \cos(2\pi z)}{4\pi^2}, \quad F(z) = \sin^4(\pi z). \quad (3)$$

Первый пример соответствует уравнению sine-Gordon (уравнение SG). Хорошо известно, что кинки уравнения SG взаимодействуют без изменения своей формы и единственным результатом взаимодействия является появление фазового сдвига [1]. Возникает естественный вопрос: можно ли найти такие условия на F , при выполнении которых столкновение кинков уравнения (1) будет происходить по тому же сценарию, что и для уравнения SG (SG-сценарию)?

Точное решение задачи Коши для уравнения (1) неизвестно [2]. Поэтому мы построим асимптотическое решение, трактуя ε как малый параметр. Заметим, что кинки (2) стремятся к функции Хевисайда при $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом, мы должны использовать слабое определение решения, которое позволяет переходить к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Однако определение асимптотического по $\text{mod } O(\varepsilon^2)$ решения, построенного на базе стандартного $\mathcal{D}'$ -определения, для уравнения (1) не предписывает для кинков никакого закона движения. Чтобы преодолеть это препятствие, определим асимптотическое решение следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность функций $u(t, x, \varepsilon)$, принадлежащая пространству $C^\infty(0, T; C^\infty(\mathbb{R}_x^1))$ при $\varepsilon > 0$ и пространству $C(0, T; \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x^1))$ при $\varepsilon \geq 0$, называется *слабой асимптотикой по $\text{mod } O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2)$* решения уравнения (1), если для любой тестовой функции $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ выполняется соотношение

$$2 \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 u_t u_x \psi dx + \int_{-\infty}^{\infty} \{(\varepsilon u_t)^2 + (\varepsilon u_x)^2 - 2F(u)\} \psi_x dx = O(\varepsilon^2), \quad (4)$$

где правая часть принадлежит $C^\infty(0, T)$ при $\varepsilon > 0$ и является кусочно-непрерывной функцией t равномерно по $\varepsilon \geq 0$, а оценка понимается как максимум модуля функции t .

Левая часть (4) представляет собой результат умножения уравнения (1) на $\psi(x)u_x$ и интегрирования по частям в случае гладкой u . Таким образом, она равна нулю для любого точного кинк-решения. С другой стороны, соотношение (4) есть условие ортогональности, возникающее для однофазной асимптотики (в случае $F = F(u, t, x, \varepsilon)$ см. [3], [4]). Это условие, во-первых, гарантирует существование первой поправки, а во-вторых, приводит к уравнению, описывающему движение фронта искаженного кинка. Данное уравнение, так называемое *условие типа Гюгонио*, трактуется как предел (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рассмотрим два кинка, не взаимодействующих при $t = 0$:

$$u|_{t=0} = \sum_{i=1}^2 \omega \left(\beta_i \frac{x - x_i^0}{\varepsilon} \right), \quad \varepsilon u_t|_{t=0} = - \sum_{i=1}^2 \beta_i C_i V_i \omega' \left(\beta_i \frac{x - x_i^0}{\varepsilon} \right), \quad (5)$$

где x_i^0 – константы такие, что $x_1^0 - x_2^0 \geq \text{const} > 0$ равномерно по ε , $C_i = \pm 1$, $V_i \in (0, 1)$. Пусть для определенности $C_2 = 1$. Тогда траектории $x = C_i V_i t + x_i^0$ имеют точку пересечения $x = x^*$ для $C_1 = -1$ и любых $V_i \in (0, 1)$, либо для $C_1 = 1$ и $V_2 > V_1$.

Основной результат работы состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть предположения (A)–(C) выполнены. Пусть также F и β_i таковы, что

$$F(z+1) = F(z), \quad (D)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega(\eta) + \omega(\theta\eta)) d\eta \leq \int_{-\infty}^{\infty} \{F(\omega(\eta)) + F(\omega(\theta\eta)) + 2\beta_1\beta_2\sqrt{F(\omega(\eta))F(\omega(\theta\eta))}\} d\eta, \quad \theta = \frac{\beta_1}{\beta_2}. \quad (E)$$

Тогда кинки в задаче (1), (5) взаимодействуют по SG-сценарию.

Для обоих примеров (3) все предположения теоремы выполнены.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ. Наметим основные этапы доказательства теоремы. Следуя методу слабых асимптотик [5]–[9], полагаем

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^2 \omega\left(\beta_i \frac{x - \Phi_i(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) + O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \quad (6)$$

где $\Phi_i = \varphi_{i0}(t) + \varepsilon\varphi_{i1}(\tau)$, $\varphi_{i0} = C_i V_i t + x_i^0$, $\tau = \beta_1(\varphi_{20} - \varphi_{10})/\varepsilon$, $\varphi_{i1}(\tau) \in C^\infty$, $\varphi_{i1} \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow -\infty$. Момент “времени” $\tau = 0$ соответствует пересечению траекторий $x = \varphi_{i0}(t)$, $i = 1, 2$, в точке $x = x^*$. Поведение $\varphi_{i1}(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ описывает сценарии взаимодействия кинков.

Символом $O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^k)$ обозначаются функции $f(x, t, \varepsilon)$, принадлежащие $C^\infty(0, T; C^\infty(\mathbb{R}_x^1))$ при $\varepsilon > 0$ и принадлежащие $C(0, T; \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x^1))$ при $\varepsilon \geq 0$, такие, что равномерно по $\varepsilon \geq 0$ для любой $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_x^1)$ справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t, \varepsilon)\psi(x) dx = O(\varepsilon^k),$$

где оценка понимается в том же смысле, что и в соотношении (4).

Далее, находим слабую асимптотику выражений, входящих в (4), и убеждаемся, что левая часть этого соотношения есть линейная комбинация $\delta(x - x^*)$, $\varepsilon\delta'(x - x^*)$ и $\varepsilon\delta'(x - \Phi_i)$, $i = 1, 2$. Приравнявая к нулю коэффициенты при дельта-функциях, получаем равенство $\beta_i^2 = 1/(1 - V_i^2)$ и уравнение второго порядка для функции $\sigma = \sigma(\tau)$. Вводя вспомогательную функцию W , переписываем его в виде условий типа Гюгонио

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = P, \quad \frac{dW}{d\tau} = Q. \quad (7)$$

Здесь

$$P = \frac{1}{L} \left\{ \frac{W}{\mathcal{F}} + \sigma - 2(b_1 \bar{\lambda}_2 + \theta b_2 \lambda_2) \right\},$$

$$Q = \frac{\mathcal{F}}{2} \{ (1 - \theta \lambda_1^2) P^2 - 2(1 + \lambda_1(b_2 - \theta b_1)) P + 1 + 2\lambda_1(b_2^2 + \theta b_1^2) \} + \frac{1}{\nu^2} \left(\lambda_1 - \frac{B_\Delta}{\beta_1 \beta_2} \right),$$

и

$$\begin{aligned}
L &= \sigma + \bar{\lambda}_2 - \theta \lambda_2, & \mathcal{F} &= (1 + \theta(1 + 2\lambda_1))^{-1}, \\
\sigma &= \beta_1(\Phi_2 - \Phi_1)/\varepsilon, & \nu &= C_2 V_2 - C_1 V_1, \\
\lambda_1 &= \frac{1}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega'(\eta) \omega'(\theta\eta + \sigma) d\eta, & \lambda_2 &= \frac{1}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta \omega'(\eta) \omega'(\theta\eta + \sigma) d\eta, \\
B_\Delta &= \frac{1}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \{F(\omega(\eta) + \omega(\theta\eta + \sigma)) - F(\omega(\eta)) - F(\omega(\theta\eta + \sigma))\} d\eta, \\
\bar{\lambda}_2 &= \frac{1}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta \omega'(\eta) \omega' \left(\frac{\eta - \sigma}{\theta} \right) d\eta, & a_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (\omega'(\eta))^2 d\eta, & b_i &= \frac{C_i V_i}{\nu}.
\end{aligned}$$

Отметим, что условия (А)–(D) обеспечивают существование сверток λ_i , $\bar{\lambda}_2$, B_Δ , а также стремление их к нулю при $\sigma \rightarrow \pm\infty$.

Взаимосвязь между функциями φ_{11} , φ_{21} и σ задается уравнениями

$$\beta_1 \frac{d\varphi_{11}}{d\tau} = -\mathcal{F}G_1, \quad \beta_2 \frac{d\varphi_{21}}{d\tau} = \theta \mathcal{F}G_2, \quad (8)$$

где

$$G_1 = (1 + \theta\lambda_1) \frac{d\sigma}{d\tau} + 2\theta b_1 \lambda_1 - 1, \quad G_2 = (1 + \lambda_1) \frac{d\sigma}{d\tau} - 2b_2 \lambda_1 - 1.$$

Динамическая система (7) имеет особенность при $\sigma = 0$ и $W \neq 0$. Однако условия (А)–(Е) гарантируют существование сепаратриссы, которая при всех $\tau \in \mathbb{R}^1$ лежит в полосе $\{\sigma \in \mathbb{R}^1, |W| \leq \text{const}\}$ на плоскости (σ, W) , проходит через точку $(0, 0)$ и σ -координата которой стремится к $\pm\infty$, а $W \rightarrow \pm W^0$ при $\tau \rightarrow \pm\infty$. Таким образом, дополняя систему (7) “начальными” условиями

$$\sigma \rightarrow \tau, \quad W \rightarrow W^0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow -\infty,$$

мы фиксируем траекторию, проходящую из левой полуплоскости в правую.

Заключительный этап доказательства теоремы состоит в установлении того факта, что величина W^0 меняется при возмущении главного члена асимптотики (6) малыми (в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_x^1)$) добавками. Например, можно положить

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^2 \left(\omega \left(\bar{\beta}_i \frac{x - \Phi_i(t, \tau, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) + A_i(\sigma) U \left(\frac{\bar{\beta}_i x - \Phi_i(t, \tau, \varepsilon)}{\mu_i \varepsilon} \right) \right).$$

Здесь $\bar{\beta}_i = \beta_i + \beta_{i1}(\tau)$, где β_i – те же числа, что и раньше, $\beta_{i1}(\tau) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ – некоторые функции, экспоненциально быстро убывающие при $\tau \rightarrow \pm\infty$ и такие, что $\beta_i > 0$,

$$U \left(\frac{\bar{\beta}_i x - \Phi_i(t, \tau, \varepsilon)}{\mu_i \varepsilon} \right) = \omega^{(2l+1)} \left(\frac{\bar{\beta}_i x - \Phi_i(t, \tau, \varepsilon)}{\mu_i \varepsilon} \right) = O_{\mathcal{D}'}((\varepsilon \mu_i)^{2l+1}), \quad l \geq 1,$$

$A_i(\sigma) \in C^\infty$ – нечетные функции, достаточно быстро стремящиеся к нулю при $\sigma \rightarrow \pm\infty$, причем $|A_1| < |A_2|$, μ_1 и $\mu_2 = \mu_1/\theta$ – достаточно малые параметры. Выбирая соответствующие β_{i1} , $A_i(\sigma)$, μ_i , получим, что $W^0 = 0$. Тогда функции $\varphi_{i1}(\tau)$, определяемые из уравнений, аналогичных (8), будут ограниченными равномерно по $\tau \in \mathbb{R}^1$. Отсюда следует утверждение теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Следующие два утверждения эквивалентны.

1. Функция вида (6) является слабой асимптотикой решения уравнения (1) в смысле определения 1.

2. Функция вида (6) удовлетворяет закону сохранения

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u_t u_x dx = 0$$

и энергетическому соотношению

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x \varepsilon^2 u_t u_x dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{(\varepsilon u_t)^2 + (\varepsilon u_x)^2 - 2F(u)\} dx = 0,$$

отвечающим уравнению (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если кинк $u(t, x, \varepsilon) = \omega(\beta(x - CVt)/\varepsilon)$ есть решение уравнения (1), то антикинк $u(t, x, \varepsilon) = \omega(-\beta(x - CVt)/\varepsilon)$ также является его решением. Утверждения теорем верны также и для взаимодействия антикинок-антикинок. Вместе с тем, описание взаимодействия кинк-антикинок оказывается более сложным. Оно будет рассмотрено отдельно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Захаров В. Е., Тахтаджан Л. А., Фаддеев Л. Д. Полное описание решений уравнения sine-Gordon // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219. С. 1334–1337.
- [2] Жибер А. В., Соколов В. В. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувилевского типа // УМН. 2001. Т. 56. № 1. С. 63–104.
- [3] Maslov V. P., Omel'yanov G. A. Geometric Asymptotics for Nonlinear PDE, I. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2001.
- [4] Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V. Hugoniot-type conditions and weak solutions to the phase field system // Europ. J. Appl. Math. 1999. V. 10. P. 55–77.
- [5] Маслов В. П. Три алгебры, соответствующие негладким решениям систем квазилинейных гиперболических уравнений // УМН. 1980. Т. 35. № 2. С. 252–253.
- [6] Данилов В. Г., Маслов В. П., Шелкович В. М. Алгебры особенностей сингулярных решений квазилинейных строго гиперболических систем первого порядка // ТМФ. 1998. Т. 114. № 1. С. 3–55.
- [7] Danilov V. G., Shelkovich V. M. Propagation and interaction of shock waves of quasilinear equation // Nonlinear Studies. 2001. V. 8. P. 135–170.
- [8] Danilov V. G. Generalized solutions describing singularity interaction // Intern. J. Math. Math. Sci. 2002. V. 30. P. 1–14.
- [9] Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Shelkovich V. M. Weak asymptotics method and interaction of nonlinear waves // Asymptotic Methods for Wave and Quantum Problems (M. V. Karasev, ed.), Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. V. 208. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2003. P. 33–164.