Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Печенцов, А. Ю. Попов, Асимптотическое поведение плотности спектральной меры сингулярного оператора Штурма–Лиувилля, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 3, 455–458

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm550>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 13:23:53

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПЛОТНОСТИ СПЕКТРАЛЬНОЙ МЕРЫ СИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

А. С. Печенцов, А. Ю. Попов

В пространстве $L_2[0, +\infty)$ рассмотрим оператор $\mathbb{L}$, задаваемый дифференциальным выражением

$$\ell y(x) \equiv -y''(x) - q(x)y(x), \quad q \in C[0, +\infty), \quad q: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

и граничным условием

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Пусть $\varphi(x, \lambda)$ и $\theta(x, \lambda)$ – решения уравнения

$$\ell y = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с начальными условиями $\varphi(0, \lambda) = \theta'(0, \lambda) = \sin \alpha$, $\varphi'(0, \lambda) = -\cos \alpha$, $\theta(0, \lambda) = \cos \alpha$.

По теореме Г. Вейля [1] существует неубывающая и ограниченная снизу на $\mathbb{R}$ функция $\rho_\alpha(\lambda)$ (возможно не единственная) такая, что

1) $\forall f \in L_2[0, +\infty)$ существует предел (обобщенное преобразование Фурье функции f)

$$\hat{f}(\lambda) \underset{L_2(\mathbb{R}, d\rho_\alpha)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(x) \varphi(x, \lambda) dx,$$

т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{f}(\lambda) - F_n(\lambda))^2 d\rho_\alpha(\lambda) = 0,$$

где $F_n(\lambda) = \int_0^n f(x) \varphi(x, \lambda) dx$;

2) функция f представляется как предел в $L_2[0, \infty)$ “преобразования Фурье по мере $d\rho_\alpha$ ” от функции $\hat{f}$:

$$f(x) \underset{L_2[0, +\infty)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) \varphi(x, \lambda) d\rho_\alpha(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \hat{f}(\lambda) \varphi(x, \lambda) d\rho_\alpha(\lambda).$$

При $\text{Im } z > 0$ рассмотрим функцию

$$m(z) = \begin{cases} -\text{ctg } \alpha + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho_\alpha(\lambda)}{z - \lambda}, & \sin \alpha \neq 0, \\ a + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - \lambda} + \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) d\rho_0(\lambda), & \sin \alpha = 0, \end{cases}$$

постоянная $a \in \mathbb{C}$ выбирается так, чтобы при $z \rightarrow i\infty$ имела место асимптотика

$$m(z) = -i\sqrt{z} + \rho_\alpha(-\infty) + o(1).$$

Тогда решение $\theta(x, z) + m(z)\varphi(x, z)$ уравнения (1) принадлежит пространству $L_2[0, \infty)$.

В точках непрерывности λ , μ функция $\rho_\alpha(\lambda)$ связана с функцией Вейля–Титчмарша $m(z)$ по формуле

$$\rho_\alpha(\lambda) - \rho_\alpha(\mu) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_\mu^\lambda \text{Im } m(t + i\delta) dt.$$

Работа поддержана грантом президента Российской Федерации ведущих научных школ № НШ – 680.2003.1.

В случае $q(x) \equiv 0$ явный вид плотности спектральной меры $\rho'_\alpha(\lambda)$ был указан Титчмаршем [2]:

$$\rho'_\alpha(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(\lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0, \quad \operatorname{tg} \alpha < 0, \\ 2 \cos \alpha \sin^{-3} \alpha \delta(\lambda - \lambda_0), & \lambda < 0, \quad \operatorname{tg} \alpha > 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $\lambda_0 = -\operatorname{ctg}^2 \alpha$, δ – дельта-функция Дирака.

Впервые оценку сверху спектральной функции $\rho_\alpha(\lambda)$ ($\sin \alpha \neq 0$) при $\lambda \rightarrow +\infty$ для локально суммируемого потенциала $q(x)$ получил Левитан [3], а затем Марченко [4] установил асимптотическую формулу при $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\rho_\alpha(\lambda) \sim \begin{cases} \frac{2}{\pi \sin^2 \alpha} \lambda^{1/2}, & \sin \alpha \neq 0, \\ \frac{2}{3\pi} \lambda^{3/2}, & \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Изучению спектральной функции $\rho_\alpha(\lambda)$ посвятили свои работы Аткинсон [5], Беневитц [6], Харрис [7], Истэм [8].

Уточнения асимптотики $\rho_\alpha(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ производились по двум направлениям условий на потенциал q :

I. $q \in L(0, +\infty)$,

II. $q(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow +\infty, \int_0^{+\infty} \frac{q'^2}{|q|^{5/2}} dx < \infty, \int_0^{+\infty} \frac{|q''|}{|q|^{3/2}} dx < \infty, \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|q|}} dx = \infty$.

Мы ограничимся рассмотрением случая II. Именно в этой ситуации для $q(x) = \varepsilon x$ и $q(x) = \varepsilon x^2$ мы изучали концентрацию отрицательного спектра (см. [9], [10]) в сколь угодно малой окрестности собственного значения невозмущенного оператора ($\varepsilon = 0$). Истэм [8] получил асимптотическое разложение $\rho'_0(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ для гладких на $[0, +\infty)$ потенциалов, имеющих порядок роста на бесконечности такой же как и у $x^c, 0 < c \leq 2$.

ТЕОРЕМА А ([8]). Пусть q дифференцируема $M+2$ раза ($M \geq 1$), причем $(M+1)$ производная локально абсолютно непрерывна на $[0, +\infty)$.

В дополнении к условиям II выполнены оценки при $x \in [1, \infty)$

$$q(x) \geq Kx^c, \quad |q^{(\nu)}(x)| \leq K_\nu x^{c-\nu}, \quad 1 \leq \nu \leq M+2,$$

где K, K_ν – положительные постоянные, $0 < c \leq 2$. Тогда справедлива асимптотика

$$\pi \rho_0(\lambda) = \frac{2}{3} \lambda^{3/2} - q(0) \lambda^{1/2} + c_0 + \sum_{r=1}^{[\frac{M}{2}]} c_r \lambda^{-(2r-1)/2} + O(\lambda^{-(M/2)+\varepsilon}), \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

где $\{c_r\}_{r=0}^\infty$ – последовательность чисел, зависящих от потенциала q .

В той же статье Истэмом анонсирован аналогичный результат при произвольном значении $\alpha \in (0, \pi)$. Асимптотическое разложение $\pi \rho'_\alpha(\lambda)$ начинается с $\lambda^{-1/2} \sin^{-2} \alpha$ и далее идет по получаемым отрицательным степеням λ .

Отметим, что потенциал

$$q(x) = x^p, \quad 0 < p < 2, \quad p \neq 1,$$

ввиду особенности производных в точке $x = 0$ не удовлетворяет условиям теоремы А.

В этой работе мы находим несколько первых слагаемых в асимптотике $\rho'_\alpha(\lambda)$, $0 < \alpha < \pi$, для существенно более широкого, чем в [8], класса потенциалов. Мы не требуем дифференцируемости $q(x)$ в нуле. Производная потенциала $q'(x)$ может неограниченно расти в окрестности нуля, однако $q'(x) = o(1/x)$ при $x \rightarrow +0$. Также снимается ограничение $q(x) \asymp x^c$ ($x \rightarrow +\infty$). Неограниченность $q'(x)$ в окрестности нуля приводит к тому, что разложение $\rho'_\alpha(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$

идет уже не по полуцелым степеням λ , а по системе функций достаточно сложной природы (см. ниже (3)). Анализ формулы (3) показывает, что получение явной формы полного асимптотического разложения при $\lambda \rightarrow +\infty$ для произвольных бесконечно гладких на $(0, +\infty)$ и даже “достаточно правильно” ведущих себя на бесконечности потенциалов (в точке $x = 0$ гладкости может не быть!) является очень трудной задачей. В связи с этим мы ограничились написанием только первых слагаемых асимптотики $\rho'_\alpha(\lambda)$.

ТЕОРЕМА. *Предположим, что непрерывная и неубывающая на $[0, +\infty)$ действительная функция $q(x)$, $q(0) = 0$, $q(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, удовлетворяет следующим условиям:*

- 1) $\int_0^{+\infty} (q(x))^{-1/2} dx = +\infty$;
- 2) $q \in C^3(0, +\infty)$, $q''(x)$ сохраняет знак при больших x и $q'''(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[1, +\infty)$;
- 3) $\forall \delta > 0$ при $x \rightarrow +\infty$ выполняются оценки

$$q(x) = O(x^{2+\delta}), \quad q^{(\nu)}(x) = O(q(x)x^{\delta-\nu}), \quad \nu = 1, 2, 3;$$

- 4) при $x \rightarrow +0$ справедливы оценки

$$q^{(\nu)}(x) = o(x^{-\nu}), \quad \nu = 1, 2, 3.$$

Тогда для плотности спектральной меры оператора $\mathbb{L}$ верна асимптотика

$$\rho'_\alpha(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(\lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + S(\alpha, \lambda) + o(1/\lambda))}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} S(\alpha, \lambda) = & \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \left(\int_0^{\pi/(2\sqrt{\lambda})} q'(x) \cos(2x\sqrt{\lambda}) dx \right. \\ & + \frac{1}{4\lambda} q''\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right) - \frac{1}{4\lambda} \int_{\pi/(2\sqrt{\lambda})}^{+\infty} q'''(x) \cos(2x\sqrt{\lambda}) dx \Big) \\ & + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi/(2\sqrt{\lambda})} q'(x) \sin(2x\sqrt{\lambda}) dx \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\lambda} q'\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right) + \frac{1}{4\lambda^{3/2}} \int_{\pi/(2\sqrt{\lambda})}^{+\infty} q'''(x) \sin(2x\sqrt{\lambda}) dx \right). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если потенциал $q(x)$ из теоремы 1 удовлетворяет дополнительным условиям $q \in C^1[0, +\infty)$, $q'' \in L(0, 1)$, то при $\lambda \rightarrow +\infty$*

$$\rho'_\alpha(\lambda) = \frac{\pi^{-1}\sqrt{\lambda}}{\lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{4\lambda} q'(0) + 0.5 \sin^2 \alpha S_1(\lambda) + o(\frac{1}{\lambda})},$$

где

$$S_1(\lambda) = \left(\int_0^{\pi/(2\sqrt{\lambda})} q'(x) \cos(2x\sqrt{\lambda}) dx + \frac{1}{4\lambda} q''\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right) - \frac{1}{4\lambda} \int_{\pi/(2\sqrt{\lambda})}^{+\infty} q'''(x) \cos(2x\sqrt{\lambda}) dx \right).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если потенциал $q(x)$ из теоремы 1 удовлетворяет дополнительным условиям $q \in C^2[0, +\infty)$, $q'''(x) \in L(0, 1)$, то при $\lambda \rightarrow +\infty$*

$$\rho'_\alpha(\lambda) = \frac{\pi^{-1}\sqrt{\lambda}}{\lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{8\lambda} q''(0) - \frac{\sin 2\alpha}{4\lambda} q'(0) + o(\frac{1}{\lambda})}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Для $q(x) = \varepsilon x^p$, $\varepsilon > 0$, $0 < p \leq 2$, плотность спектральной меры $\rho'_\alpha(\lambda)$ оператора $\mathbb{L}$ имеет асимптотику при $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\rho'_\alpha(\lambda) = \frac{\pi^{-1}\sqrt{\lambda}}{\lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2^{-p-1}\varepsilon\Gamma(1+p) \left(\sin^2 \alpha \cos\left(\frac{\pi p}{2}\right) \lambda^{-\frac{p}{2}} - \sin(2\alpha) \sin\left(\frac{\pi p}{2}\right) \lambda^{-\frac{p+1}{2}} \right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$$

при $0 < p \leq 1$ и

$$\rho'_\alpha(\lambda) = \frac{\pi^{-1}\sqrt{\lambda}}{\lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2^{-p-1}\varepsilon\Gamma(1+p) \sin^2 \alpha \cos\left(\frac{\pi p}{2}\right) \lambda^{-p/2} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$$

при $1 < p \leq 2$.

Основой для получения асимптотики (3) стала формула, выражающая плотность спектральной меры через некоторые функционалы от потенциала q и решение уравнения (1) $\varphi(x, \lambda)$. Положим

$$\xi(x, \lambda, a) = \int_a^x \sqrt{\lambda + q(t)} dt, \quad a \geq 0. \quad (4)$$

В силу положительности $q(x)$ функция $\xi(x, \lambda, a)$ возрастает по x при любых фиксированных $\lambda > 0$ и $a \geq 0$, поэтому соотношение (4) задает x как функцию переменной ξ : $x = x(\xi, \lambda, a)$. Следовательно, корректно определена функция $\eta(\xi, \lambda, a) = (\lambda + q(x))^{1/4} \varphi(x, \lambda)$.

Введем преобразование Прюфера

$$\eta(\xi, \lambda, a) = r(\xi, \lambda, a) \sin(\Theta(\xi, \lambda, a)), \quad \eta'_\xi(\xi, \lambda, a) = r(\xi, \lambda, a) \cos(\Theta(\xi, \lambda, a)), \quad (5)$$

где $r(\xi, \lambda, a) = \sqrt{\eta^2(\xi, \lambda, a) + \eta_\xi^2(\xi, \lambda, a)}$. Функция Θ формулами (5) определена не однозначно; в дальнейшем выбирается ее непрерывная по ξ ветвь, удовлетворяющая условию $\Theta(0, \lambda, a) \in (-\pi, \pi]$.

При любом $a \geq 0$ справедливо следующее представление для $\rho'_\alpha(\lambda)$:

$$\rho'_\alpha(\lambda) = \pi^{-1} r^{-2}(0, \lambda, a) \exp \left(\int_0^{+\infty} \tilde{R}(\xi, \lambda) \sin(2\Theta(\xi, \lambda, a)) d\xi \right), \quad (6)$$

где $\tilde{R}(\xi, \lambda) = (5/16)(q'(x))^2(\lambda + q(x))^{-3} - (1/4)q''(x)(\lambda + q(x))^{-2}$, $x = x(\xi, \lambda, a)$ — обратная функция по отношению к $\xi(x, \lambda, a)$. Формула (6) была доказана Истемом [8] при $a = 0$; при произвольном $a > 0$ ее доказательство является дословным повторением его рассуждений с соответствующими тривиальными изменениями. Впервые представление $\rho'_\alpha(\lambda)$ было получено Титчмаршем [11, гл. V], но записывалось в иной форме.

В рассматриваемой нами задаче выбор $a = 0$ невозможен ввиду наличия особенностей производных потенциала q в нуле. Мы полагаем $a = a_\lambda = \pi/(2\sqrt{\lambda})$ и ниже под $\xi(x, \lambda)$ и $r(\xi, \lambda)$ понимаем соответственно $\xi(x, \lambda, a_\lambda)$ и $r(\xi, \lambda, a_\lambda)$. Для “составных частей” представления (6) выведены следующие асимптотики при $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} r^2(0, \lambda) &= \lambda^{1/2} \sin^2 \alpha + \lambda^{-1/2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \lambda^{-1/2} \sin^2 \alpha \int_0^{a_\lambda} q'(t) \cos(2t\sqrt{\lambda}) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda^{-1} \sin(2\alpha) \left(\frac{1}{2} \lambda^{-1/2} q'(a_\lambda) - \int_0^{a_\lambda} q'(t) \sin(2t\sqrt{\lambda}) dt \right) + o(\lambda^{-3/2}), \\ \int_0^{+\infty} \tilde{R}(\xi, \lambda) \sin(2\Theta(\xi, \lambda)) d\xi &= -\frac{1}{8} \lambda^{-2} q''(a_\lambda) - \frac{1}{8} \lambda^{-2} \int_{a_\lambda}^{+\infty} q'''(x) \cos(2\xi(x, \lambda)) dx \\ &\quad + \frac{1}{4} \lambda^{-5/2} \operatorname{ctg} \alpha \int_{a_\lambda}^{+\infty} q'''(x) \sin(2\xi(x, \lambda)) dx + o(\lambda^{-2}). \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Weyl H. // Math. Ann. 1910. V. 68. P. 220–268. 2. Titchmarsh E. C. // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1951. V. 207. P. 321–328. 3. Левитан Б. М. // Докл. АН СССР. 1950. Т. 71. № 4. С. 605–608. 4. Марченко В. А. // Тр. ММО. 1951. Т. 1. С. 327–420. 5. Atkinson F. V. Lecture Notes in Math. P. 964. 6. Bennewitz C. // Proc. London Math. Soc. 1989. V. 59 (3). P. 294–338. 7. Harris B. J. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Ser. A. 1985. V. 100. P. 343–360. 8. Eastham M. S. P. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Ser. A. 1998. V. 128. P. 37–45. 9. Печенцов А. С., Попов А. Ю. // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 3. С. 336–344. 10. Печенцов А. С., Попов А. Ю. // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 2. С. 303–306. 11. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Ч. 1. М., 1960.