Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Печень, Об одном асимптотическом разложении
в квантовой теории, *Матем. заметки*, 2004, том 75, вы-
пуск 3, 459–461

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm551>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевают, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 11:07:23

ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

А. Н. Печень

Асимптотические методы [1] широко применяются в квантовой механике, квантовой теории поля, статистической физике. В данной заметке строится асимптотическое разложение, которое возникает при изучении квантовых открытых систем, а именно, при изучении динамики таких систем на больших временах в режиме слабой связи. Известно, что динамика квантовой системы, взаимодействующей с резервуаром, на больших временах (в стохастическом пределе) описывается уравнением Шрёдингера с *квантовым белым шумом* [2], квантовыми стохастическими и мастер-уравнениями [3], [4]. Важной задачей является изучение поправок к стохастическому пределу. Как было установлено в [5], эти поправки описываются уравнениями, в которые входят операторы рождения и уничтожения, действующие в псевдогильбертовых пространствах, т.е. в пространствах с индефинитной метрикой (см. [6], [7]). Эти операторы были названы *квантовым мультипольным шумом*.

В [5] было явно построено представление квантового дипольного шума, введенного в [8], в пространстве Фока с индефинитной метрикой. В данной заметке впервые строится представление алгебры всего набора квантовых мультипольных шумов в бесконечном тензорном произведении гильбертовых и псевдогильбертовых пространств и с использованием этого представления формулируется основная теорема об асимптотическом разложении свободной эволюции операторов рождения и уничтожения (после перерастяжки времени) по операторам мультипольного шума. Это разложение понимается в смысле асимптотического разложения корреляционных функций. Такое асимптотическое разложение (нулевым членом которого является квантовый белый шум) возникает и играет важную роль при изучении временной динамики квантовых открытых систем на больших временах в случае слабого взаимодействия с резервуаром.

1. Некоторые определения. Пусть $S(\mathbb{R})$ обозначает пространство Шварца быстро убывающих комплекснозначных функций на прямой; $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ – пространство комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^d$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ – пространство комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на $\mathbb{R}^d$.

Квантовым мультипольным шумом называется $*$ -алгебра с образующими $\{c_n^\pm(f) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, f \in S(\mathbb{R})\}$, удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[c_m^-(f), c_n^+(h)] = \delta_{n,m} i^n \gamma_n \int_{\mathbb{R}} \overline{f^{(n)}(t)} h(t) dt, \quad [c_m^-(f), c_n^-(h)] = [c_m^+(f), c_n^+(h)] = 0, \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-01084, INTAS YSF 01/1-200 и NATO-CNR Fellowship.

где $\delta_{n,m}$ – символ Кронекера, γ_n – вещественные числа, $\gamma_0 > 0$, $f^{(n)}$ обозначает n -ю производную функции f , $\bar{f}$ – функция, комплексно сопряженная к f . Предполагается, что $\gamma_n \neq 0$. Мы будем использовать обозначения $c^+(f) = \int dt f(t) c^+(t)$, $c^-(f) = \int dt \bar{f}(t) c^-(t)$, где $c_n^\pm(t)$ – операторно-значные обобщенные функции такие, что

$$[c_n^-(t), c_m^+(\tau)] = \delta_{n,m} i^n \gamma_n \delta^{(n)}(\tau - t) \quad (2)$$

и $\delta^{(n)}(\tau - t)$ обозначает n -ю производную δ -функции Дирака.

Псевдогильбертовым пространством называется пара $(\mathcal{H}, \hat{\eta})$, где $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, а $\hat{\eta}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – линейный ограниченный самосопряженный оператор такой, что $\hat{\eta}^2 = 1$ (оператор с такими свойствами является унитарным). Оператор $\hat{\eta}$ называется *метрическим оператором*. Он определяет индефинитное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ равенством $\langle f, h \rangle := (f, \hat{\eta}h)$, где $f, h \in \mathcal{H}$ и $(\cdot, \cdot)$ – положительно определенное скалярное произведение в $\mathcal{H}$.

2. Представление квантового мультипольного шума. В данном пункте построено представление квантового 2^n -польного шума $c_n(f)$ с $\gamma_n = 1$ (обобщение на случай произвольных γ_n производится непосредственно) операторами рождения и уничтожения в симметричном пространстве Фока (см. [7])

$$\mathcal{F}_n = \Gamma(\mathcal{H}_n) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^{\otimes_{\text{sym}} k}$$

над одночастичным (гильбертовым для четных n и псевдогильбертовым для нечетных n) пространством $\mathcal{H}_n$. Это одночастичное (псевдо) гильбертово пространство строится как пополнение пространства Шварца $S(\mathbb{R})$ по норме, индуцированной скалярным произведением

$$(f, h)_{\mathcal{H}_n} = \frac{1}{2\pi} \int |x|^n \bar{f}(x) \hat{h}(x) dx$$

где $\hat{f}(x) \equiv (Ff)(x) = \int e^{itx} f(t) dt$ – преобразование Фурье функции f . Метрический оператор η_n на $\mathcal{H}_n$ определим как единственное расширение из плотного подпространства $S(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H}_n$ на все $\mathcal{H}_n$ линейного оператора $\eta = F^{-1} \text{sign}(x) F$. Здесь $\text{sign}(x) = 1$, если $x \geq 0$, и -1 иначе. Очевидно, что оператор η_n удовлетворяет свойствам оператора метрики: $\eta_n = \eta_n^+$ и $\eta_n^2 = 1$. Индефинитное скалярное произведение в $\mathcal{H}_n$ для нечетных n имеет вид $\langle f, h \rangle_{\mathcal{H}_n} = (f, \eta_n h)_{\mathcal{H}_n}$. Для четных n положим по определению $\langle f, h \rangle_{\mathcal{H}_n} \equiv (f, h)_{\mathcal{H}_n}$, так что в этом случае это положительно определенное скалярное произведение. В общем случае можно написать $\langle f, h \rangle_{\mathcal{H}_n} \equiv (f, \eta_n^n h)_{\mathcal{H}_n}$.

Индефинитная (для нечетных n) метрика в $\mathcal{H}_n$ индуцирует индефинитную метрику в $\mathcal{F}_n$ посредством оператора $\hat{\eta}_n = \Gamma(\eta_n^n)$ (вторичное квантование унитарного оператора η_n), которую мы обозначим как $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{F}_n}$.

Пусть $\phi \in \mathcal{F}_n$ – финитный вектор $\phi = (f_0, f_1(t_1), \dots, f_k(t_1, \dots, t_k), \dots)$, т.е. такой, что $f_k = 0$, $k \geq N$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Операторы квантового 2^n -польного шума $c_n^+(f)$ и $c_n^-(f)$ ($f \in S(\mathbb{R})$) определены на плотном в $\mathcal{F}_n$ множестве финитных векторов и действуют на k -частичную компоненту финитного вектора ϕ как

$$(c_n^+(f) f_k)_{k+1}(t_1, \dots, t_{k+1}) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \sum_{i=1}^{k+1} f(t_i) f_k(t_1, \dots, \hat{t}_i, \dots, t_{k+1}), \quad (3)$$

$$(c_n^-(f) f_k)_{k-1}(t_1, \dots, t_{k-1}) = i^n \sqrt{k} \int \overline{f^{(n)}(t)} f_k(t, t_1, \dots, t_{k-1}) dt. \quad (4)$$

В (3) $\hat{t}_i$ означает, что аргумент t_i опущен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Операторы $c_n^\pm(f)$, заданные в (псевдо) гильбертовом пространстве $(\mathcal{F}_n, \hat{\eta}_n)$ формулами (3), (4), удовлетворяют на финитных векторах каноническим коммутационным соотношениям

$$[c_n^-(f), c_n^+(h)] = \langle f, h \rangle_{\mathcal{H}_n} = i^n \int_{\mathbb{R}} \overline{f^{(n)}(t)} h(t) dt$$

и соотношению

$$\langle c_n^-(f)\phi, \psi \rangle_{\mathcal{F}_n} = \langle \phi, c_n^+(f)\psi \rangle_{\mathcal{F}_n},$$

которое означает, что оператор уничтожения $c_n^-(f)$ (псевдо) эрмитово сопряжен к оператору рождения $c_n^+(f)$.

Пусть Γ есть бесконечное тензорное произведение гильбертовых пространств $\mathcal{F}_n$ (по фон Нейману [9]):

$$\Gamma = \bigotimes_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n,$$

со стабилизирующей последовательностью $\{\phi_n\}$, где ϕ_n – вакуумный вектор в $\mathcal{F}_n$. Мы отождествляем операторы $c_n^{\pm}(f)$ в $\mathcal{F}_n$ с операторами, действующими в Γ как $c_n^{\pm}(f)$ на n -ю компоненту тензорного произведения и как $\mathbf{1}$ на остальных сомножителях. Метрический оператор в Γ определим как $\hat{\eta} = \mathbf{1} \otimes \hat{\eta}_1 \otimes \mathbf{1} \otimes \hat{\eta}_3 \otimes \dots$. В результате мы построили представление квантового мультипольного шума в псевдогильбертовом пространстве $(\Gamma, \hat{\eta})$.

3. Теорема о разложении свободной эволюции операторов рождения и уничтожения. Пусть

$$\Gamma(L^2(\mathbb{R}^d)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2(\mathbb{R}^d)^{\otimes_{\text{sym}} n}$$

обозначает симметричное (бозонное) пространство Фока с вакуумным вектором Ω и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$.

Для $f, g \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ определены операторы рождения и уничтожения $a^{\pm}(f)$, заданные на плотном в $\Gamma(L^2(\mathbb{R}^d))$ множестве финитных векторов и удовлетворяющие на этом множестве каноническим коммутационным соотношениям

$$[a^-(g), a^+(f)] = (g, f)_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad (a^+(f)\phi, \psi) = (\phi, a^-(f)\psi).$$

Пусть $\omega: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ – бесконечно дифференцируемая ограниченная снизу функция и $S_t, t \in \mathbb{R}$, – однопараметрическая унитарная группа в $L^2(\mathbb{R}^d)$, действующая на $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ как $(S_t f)(p) = e^{it\omega} f(p)$. В физических приложениях функция играет роль закона дисперсии. Типичным примером является $\omega(p) = p^2/2m$ для некоторого $m > 0$. При изучении временной динамики квантовой двухуровневой системы, взаимодействующей с резервуаром, появляется сдвиг в законе дисперсии на ширину перехода между энергетическими уровнями системы ω_0 , так что закон дисперсии принимает вид $\omega(p) = p^2/2m - \omega_0$.

Обозначим

$$A_{\lambda}^{\pm}(t) = \frac{1}{\lambda} a^{\pm}(S_{t/\lambda^2} g), \quad \Phi_0 = \phi_0 \otimes \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n \otimes \dots \in \Gamma.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $g \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d)$, $\omega \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d)$, $\text{supp } g \cap \{k_0 \mid \nabla \omega(k_0) = 0\} = \emptyset$. Тогда для произвольных натуральных n и N имеет место равенство следующих корреляторов (как обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^n)$ по переменным $t_1 \dots t_n$):

$$(\Omega, A_{\lambda}^{\epsilon_1}(t_1) \dots A_{\lambda}^{\epsilon_n}(t_n) \Omega) = \left\langle \Phi_0, \sum_{i_1=0}^N \lambda^{i_1} c_{i_1}^{\epsilon_1}(t_1) \dots \sum_{i_n=0}^N \lambda^{i_n} c_{i_n}^{\epsilon_n}(t_n) \Phi_0 \right\rangle + o(\lambda^N),$$

где $\epsilon_i = \pm$, в правой части $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает индефинитное скалярное произведение в Γ и квантовые операторы мультипольного шума $c_n^{\pm}(t)$ (операторно-значные обобщенные функции) удовлетворяют коммутационным соотношениям (2) с

$$\gamma_n = \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^n d\sigma \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\sigma\omega(k)} |g(k)|^2 dk.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение теоремы можно интерпретировать как следующее асимптотическое операторное разложение:

$$a^{\pm}(S_{t/\lambda^2}g) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} c_n^{\pm}(t), \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (5)$$

Доказательство теоремы основано на использовании теоремы Вика (см. [10]), принципа локальности (см. [11]) и полученного с его помощью асимптотического разложения

$$\frac{1}{\lambda^2} \int dk |g(k)|^2 e^{it\omega(k)(t-\tau)/\lambda^2} \sim \sum_{n=0}^{\infty} (i\lambda)^n \gamma_n \delta^{(n)}(t-\tau).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В. П. Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988.
2. Accardi L., Lu Y. G., Volovich I. V. Quantum Theory and its Stochastic Limit. Berlin: Springer, 2002.
3. Чеботарев А. М. Lectures on Quantum Probability. Mexico: SMM, 2000.
4. Холево А. С. (ред.) Квантовые случайные процессы и открытые системы: Сб. статей 1982–1982 гг. М.: Мир, 1988.
5. Pechen A. N., Volovich I. V. // Infinite-Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. 2002. V. 5. P. 441–464.
6. Азизов Т. Я., Йохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.
7. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т. Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
8. Волович И. В. Quantum Dynamics and Black Noise. Доклад на международной конференции по квантовой информации, Meijo University, 1998.
9. von Neumann J. // Composito Math. 1938. V. 6. P. 1.
10. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Квантовые поля. М.: Наука, 1980.
11. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.