Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Подольский, О следе возмущенной операторной полугруппы, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 3, 462–466

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm552>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 12:45:58

О СЛЕДЕ ВОЗМУЩЕННОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ПОЛУГРУППЫ

В. Е. Подольский

Работа посвящена изучению следа полугруппы $e^{-t(A+B)}$, где A – дискретный оператор, а B – ограниченный оператор, на основе полученных нами оценок для приближения указанной полугруппы невозмущенной полугруппой e^{-tA} в ядерной норме. Приближения полугрупп в нормах идеалов компактных операторов уже исследовались; мы укажем здесь на работы [1], [2], в которых изучается скорость приближения полугруппы членами последовательности типа Троттера. Однако в основном изучению подвергались конкретные дифференциальные операторы (см., например, [3]), а для абстрактных операторов исследование асимптотики при $t \rightarrow 0+$ следа полугруппы ограничивалось оценкой главной части.

Напомним некоторые факты теории симметрично-нормированных идеалов (в кольце ограниченных операторов) компактных операторов (см. [4]). *Сингулярными числами* компактного оператора S называются упорядоченные по убыванию собственные числа s_n положительного оператора $\sqrt{SS^*}$. Множество компактных операторов со сходящимся при некотором $p > 0$ рядом $\sum s_n^p$ мы обозначаем $\mathfrak{S}_p$ – это множество операторов при $p \geq 1$ образует симметрично-нормированный идеал в алгебре ограниченных операторов с нормой $\|S\|_p = (\sum s_n^p)^{1/p}$; симметричность нормы означает выполнение неравенства

$$\|B_1 S B_2\|_p \leq \|B_1\| \|S\|_p \|B_2\| \quad (1)$$

для любых ограниченных операторов B_1 и B_2 . При $p = 1$ эта норма называется *ядерной нормой*

операторов. Так же мы будем использовать неравенство

$$\|S\|_p \leq \|S_1\|_{p_1} \dots \|S_k\|_{p_k}; \quad (2)$$

здесь $S = S_1 \dots S_k$, а операторы $S_1, \dots, S_k$ соответственно принадлежат идеалам $\mathfrak{S}_{p_1}, \dots, \mathfrak{S}_{p_k}$, где $p^{-1} = p_1^{-1} + \dots + p_k^{-1}$.

Во всей работе оператор A таков, что $A^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ с некоторым $p \geq 1$, его собственные вектора $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис, соответствующие собственные числа $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ лежат в открытом секторе Ω : $-\pi/2 + \omega < \arg z < \pi/2 - \omega$, $0 < \omega < \pi/2$. Нетрудно видеть, что тогда A^* имеет те же собственные вектора с собственными числами $\bar{\lambda}_n$ и $AA^* = A^*A$. Через $|A|$ мы будем обозначать положительный оператор $\sqrt{AA^*}$; его дробные степени определены по спектральной теореме. Так как спектр A лежит в Ω , то $|\lambda_n|^{-1} \geq (\operatorname{Re} \lambda_n)^{-1} \cos \omega$ и $(\operatorname{Re} A)^{-1} \in \mathfrak{S}_p$, и так как сингулярные числа полугруппы e^{-tA} равны $e^{-\operatorname{Re} \lambda_n t}$, верна формула

$$\|e^{-tA}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-p \operatorname{Re} \lambda_n t} \right)^{1/p}. \quad (3)$$

Об операторе B мы предполагаем, помимо ограниченности, что спектр $A + B$ так же лежит в Ω (техническое удобство, не ограничивающее общности). Через μ_n будем обозначать собственные числа оператора $A + B$. Во всей работе одним и тем же символом c обозначаются различные положительные константы, не зависящие от основных переменных встречающихся неравенств.

Основным соотношением, которое будет использовано для исследования возмущенной полугруппы, будет следующее хорошо известное уравнение [5]:

$$e^{-t(A+B)} - e^{-tA} = - \int_0^t e^{-(t-s)A} B e^{-s(A+B)} ds, \quad (4)$$

из которого методом последовательных приближений получаем сходящийся по операторной норме ряд ($t = t_0$)

$$e^{-t(A+B)} = e^{-tA} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} e^{-(t-t_1)A} B \dots B e^{-t_k A} dt_k \dots dt_1. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть существует число $\alpha > 0$ такое, что $\|e^{-tA}\|_1 \leq ct^{-\alpha}$ при $t \in (0, +\infty)$. Тогда ряд (5) сходится в ядерной норме, причем сходимость остатка ряда равномерна на любом отрезке $[a, b] \in [0, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя неравенства (1) и (2), запишем оценку общего члена ряда (5) (как мы увидим ниже, преобразования законны для всех достаточно больших k):

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} e^{-(t-t_1)A} B e^{-(t_1-t_2)A} \dots B e^{-t_k A} dt_k \dots dt_1 \right\|_1 \\ & \leq \|B\|^k \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} \|e^{-(t-t_1)A}\|_{k+1} \|e^{-(t_1-t_2)A}\|_{k+1} \dots \|e^{-t_k A}\|_{k+1} dt_k \dots dt_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как из (3) следует $\|e^{-tA}\|_k = \|e^{-ktA}\|_1^{1/k} \leq c(kt)^{-\alpha/k} \leq ct^{-\alpha/k}$, интеграл в (6) оценивается сходящимся при k таких, что $\alpha/(k+1) < 1$, интегралом

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} (t-t_1)^{-\frac{\alpha}{k+1}} (t_1-t_2)^{-\frac{\alpha}{k+1}} \dots t_k^{-\frac{\alpha}{k+1}} dt_k \dots dt_1 = \frac{\Gamma^{k+1}(1 - \frac{\alpha}{k+1})}{\Gamma(k+1-\alpha)} t^{k-\alpha}. \quad (7)$$

Мы вычислили этот интеграл, последовательно интегрируя по $t_k, \dots, t_1$ и пользуясь Эйлеровым интегралом $\int_0^{\tau} t^{\gamma} (\tau-t)^{\beta} dt = \tau^{\gamma+\beta+1} B(\gamma+1, \beta+1)$ при $\beta, \gamma > -1$. Так как $\Gamma(k)$ с точностью до экспоненциальных множителей ведет себя как k^k , и так как все остальные коэффициенты в нашей оценке¹ общего члена ряда (5) имеют не более чем экспоненциальный рост, теорема доказана.

¹О константе в формуле (7) заметим, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma^{k+1}(1 - \frac{\alpha}{k+1}) = e^{\gamma\alpha}$, здесь γ — постоянная Эйлера.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 1 при всех $N \in \mathbb{N}$ таких, что $\alpha/N < 1$, верна асимптотическая при $t \rightarrow 0+$ формула для следа возмущенной полугруппы

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} e^{-t(A+B)} &= \operatorname{Tr} e^{-tA} - \operatorname{Tr}(Be^{-tA})t \\ &+ \sum_{k=2}^{N-2} (-1)^k \operatorname{Tr} \int_0^t \dots \int_0^{t_{k-1}} e^{-(t-t_1)A} B \dots Be^{-t_k A} dt_k \dots dt_1 + O(t^{N-1-\alpha}). \end{aligned} \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка остатка немедленно следует из доказательства теоремы, второе слагаемое имеет приведенный вид в силу известного свойства следа $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$:

$$\int_0^t \operatorname{Tr}(e^{-(t-s)A} B e^{-sA}) ds = \int_0^t \operatorname{Tr}(B e^{-tA}) ds.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если вместо условия теоремы 1 при $t \rightarrow 0+$ верна асимптотическая оценка $\|e^{-tA}\|_1 = o(t^{-\alpha})$, то в формуле (8) (по-прежнему верной при тех же N) остаточный член имеет вид $o(t^{N-1-\alpha})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При этом условии для любого $\varepsilon > 0$ в достаточно малой правой полукрестности точки $t = 0$ в подынтегральной функции интеграла (7) вместо сомножителя $t_k^{-\alpha/(k+1)}$ можно взять $\varepsilon t_k^{-\alpha/(k+1)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Доказанная теорема 1 (и соответственно следствия 1 и 2) никак не использовали структуру спектра оператора и полученные результаты имеют место для операторов с произвольной природой спектра. Однако на практике удобно пользоваться известными свойствами спектра; здесь мы укажем хорошо известные достаточные условия на спектр дискретного оператора с тем, чтобы к нему были применимы теорема и следствия:

- i) если $\lambda_n \in \Omega$ и $|\lambda_n| \geq cn^{1/\alpha}$ с некоторым $\alpha > 0$, то $\|e^{-tA}\|_1 \leq ct^{-\alpha}$;
- ii) если $\lambda_n \in \Omega$ и $|\lambda_n^{-1}| = o(n^{-1/\alpha})$ с некоторым $\alpha > 0$, то $\|e^{-tA}\|_1 = o(t^{-\alpha})$ при $t \rightarrow 0+$.

Далее мы применим полученные результаты к теории регуляризованных следов. В работе [6] для оператора A с ядерной резольвентой и ограниченного B была доказана формула следа, просуммированного по Абелю:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n - (B\varphi_n, \varphi_n)) e^{-\lambda_n t} = 0. \quad (9)$$

Следующая теорема усиливает этот результат.

ТЕОРЕМА 2. Если $|\lambda_n|^{-1} = o(n^{-1})$, то формула (9) верна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как указывалось выше, в данном случае имеет место оценка

$$\|e^{-tA}\|_1 = o(t^{-1})$$

при $t \rightarrow 0+$, и в силу следствия 2 верна формула для следа возмущенной полугруппы (здесь мы положили $N = 3$)

$$\operatorname{Tr} e^{-t(A+B)} = \operatorname{Tr} e^{-tA} - t \operatorname{Tr}(B e^{-tA}) + o(t).$$

Используя несложное преобразование

$$\frac{1}{t} (\operatorname{Tr} e^{-t(A+B)} - \operatorname{Tr} e^{-tA}) = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\mu_n t} - e^{-\lambda_n t}) = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{(\lambda_n - \mu_n)t} - 1) e^{-\lambda_n t}$$

и ограниченность B (для всех n верно $|\mu_n - \lambda_n| < c$), мы можем в окрестности нуля записать

$$\mathrm{Tr}(Be^{-tA}) + o(1) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) e^{-\lambda_n t} + O(t) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t},$$

и далее, вычисляя $\mathrm{Tr}(Be^{-tA})$ в базисе $\{\varphi_n\}$ и используя $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} = o(t^{-1})$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (B\varphi_n, \varphi_n) e^{-\lambda_n t} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) e^{-\lambda_n t} + o(1),$$

что и доказывает теорему.

В конкретных задачах математической физики вычисление слагаемых в формуле (8) при $k \geq 2$ уже сопряжено с заметными техническими трудностями (при $k = 2$ для псевдодифференциального оператора A на компактном многообразии размерности m , возмущенного оператором умножения на функцию, речь идет о вычислении $(4m+2)$ -кратного интеграла). В следующей теореме мы предлагаем упрощение этих формул при некоторых дополнительных предположениях об операторах, сравнительно легко проверяемых для псевдодифференциальных операторов. Мы ограничиваемся наиболее важным (и наименее громоздким) случаем $k = 2$. Повторение этих рассуждений для следующих членов разложения не содержит никаких иных трудностей, помимо объемности выкладок.

ТЕОРЕМА 3. Пусть условия теоремы 1 выполнены при $\alpha < 4$ и пусть существует $-\alpha < \delta < 1 - \alpha/4$ такое, что оператор $(BA - AB)|A|^{-\delta}$ продолжается до ограниченного. Тогда при $t \rightarrow 0+$ верно

$$\mathrm{Tr} e^{-t(A+B)} = \mathrm{Tr} e^{-tA} - t \mathrm{Tr}(Be^{-tA}) + \frac{t^2}{2} \mathrm{Tr}(B^2 e^{-tA}) + O(t^{3-\alpha-\delta}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\alpha < 4$ формула (8) приобретает вид ($N = 4$)

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} e^{-t(A+B)} &= \mathrm{Tr} e^{-tA} - \mathrm{Tr}(Be^{-tA})t \\ &+ \mathrm{Tr} \int_0^t \int_0^s e^{-(t-s)A} B e^{-(s-\tau)A} B e^{-\tau A} d\tau ds + O(t^{3-\alpha}), \end{aligned}$$

и в дополнительном изучении нуждается только третье слагаемое. Воспользуемся формулой [7, приложение 1]

$$Be^{-tA} - e^{-tA}B = t \int_0^1 e^{-(1-\xi)tA} (AB - BA) e^{-\xi tA} d\xi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^s e^{-(t-s)A} B e^{-(s-\tau)A} B e^{-\tau A} d\tau ds &= \int_0^t \int_0^s e^{-(t-s)A} B \left(B e^{-(s-\tau)A} \right. \\ &+ (s-\tau) \int_0^1 e^{-(1-\xi)(s-\tau)A} (BA - AB) e^{-\xi(s-\tau)A} d\xi \left. \right) e^{-\tau A} d\tau ds \\ &= \int_0^t \int_0^s e^{-(t-s)A} B^2 e^{-sA} d\tau ds \\ &+ \int_0^t \int_0^s e^{-(t-s)A} B(s-\tau) \int_0^1 e^{-(1-\xi)(s-\tau)A} (BA - AB) e^{-\xi(s-\tau)A} d\xi \cdot e^{-\tau A} d\tau ds. \end{aligned}$$

Относительно первого слагаемого замечаем, что

$$\mathrm{Tr} \int_0^t \int_0^s e^{-(t-s)A} B^2 e^{-sA} d\tau ds = \int_0^t \int_0^s \mathrm{Tr}(B^2 e^{-tA}) d\tau ds = \frac{t^2}{2} \mathrm{Tr}(B^2 e^{-tA}),$$

и для доказательства теоремы нам осталось оценить второе слагаемое. Так как оператор $(BA - AB)|A|^{-\delta}$ продолжается до ограниченного, то

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t \int_0^s e^{-(t-s)A} B(s-\tau) \int_0^1 e^{-(1-\xi)(s-\tau)A} (BA - AB) e^{-\xi(s-\tau)A} e^{-\tau A} d\xi d\tau ds \right\|_1 \\ & \leq c \int_0^t \int_0^s (s-\tau) \int_0^1 \|e^{-(t-s)A}\|_4 \|e^{-(1-\xi)(s-\tau)A}\|_4 \|e^{-\xi(s-\tau)A}\|_4 \| |A|^\delta e^{-\tau A} \|_4 d\xi d\tau ds. \end{aligned}$$

В работе [8] проведено детальное исследование поведения в окрестности нуля функции вида $\sum \lambda_n^\delta e^{-\lambda_n t}$ по известному поведению функции $\sum e^{-\lambda_n t}$ и из этих результатов следует, что²

$$\| |A|^\delta e^{-tA} \|_4 \leq ct^{-\alpha/4-\delta}.$$

Применяя эту оценку и уже имеющиеся оценки норм экспонент, получаем вычисляемый интеграл

$$\int_0^t \int_0^s \int_0^1 (t-s)^{-\alpha/4} (1-\xi)^{-\alpha/4} (s-\tau)^{1-\alpha/2} \xi^{-\alpha/4} \tau^{-\alpha/4-\delta} d\xi d\tau ds = ct^{3-\alpha-\delta},$$

и оценка остаточного члена доказана.

В качестве примера возможного применения теоремы 3 укажем на задачу вычисления следа экспоненты оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на компактном многообразии. В этом случае $\delta = 1/2$, и наша теорема позволяет для решения этой задачи при размерности многообразия $m \leq 7$ просто воспользоваться готовыми формулами работы [9] для выражений вида $\text{Tr}(f e^{t\Delta})$, где f – гладкая функция, а $-\Delta$ – оператор Лапласа на многообразиях без края или оператор одной из классических краевых задач. При размерности $m = 2$ остаточный член есть $O(t^{3/2})$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ichinose T., Tamura H. // *Asymptot. Anal.* 1998. V. 17. P. 239–266.
2. Takanobu S. // *Osaka J. Math.* 1998. V. 35. № 3. P. 659–682.
3. Simon B. // *Bull. AMS.* 1982. V. 7. № 3. P. 447–526.
4. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
5. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
6. Подольский В. Е. // *Вестн. МГУ. Сер. 1.* 1999. № 5. С. 42–48.
7. Карасев М. В., Маслов В. П. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.
8. Подольский В. Е. // *Матем. заметки.* 1994. Т. 56. № 1. С. 71–77.
9. Gilkey P. B., Branson T. P. // *Comm. Partial Differential Equations.* 1990. V. 15. № 2. P. 245–272.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
30.01.2003

К ВОПРОСУ О ВОЗМУЩЕНИЯХ СИСТЕМЫ ХААРА

П. А. Терехин

В статье обсуждаются свойства полноты и базисности в пространстве $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, общих систем функций

$$\{1, \varphi_{k,j}\}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad j = 0, \dots, 2^k - 1,$$

²Здесь используется условие $\delta > -\alpha$. В [8] исследованы все случаи, но для наших целей этот представляет наибольший интерес.