Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Терехин, К вопросу о возмущениях системы Хаара,
Матем. заметки, 2004, том 75, выпуск 3, 466–469

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm553>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:34:39

К ВОПРОСУ О ВОЗМУЩЕНИЯХ СИСТЕМЫ ХААРА

П. А. Терехин

В статье обсуждаются свойства полноты и базисности в пространстве $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, общих систем функций

$$\{1, \varphi_{k,j}\}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad j = 0, \dots, 2^k - 1,$$

²Здесь используется условие $\delta > -\alpha$. В [8] исследованы все случаи, но для наших целей этот представляет наибольший интерес.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00123, программы “Ведущие научные школы РФ”, грант НШ-1295.2003.1, и программы INTAS, грант № 99-00089.

близких в определенном смысле к классической системе функций Хаара

$$\{1, \chi_{k,j}\}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad j = 0, \dots, 2^k - 1,$$

где $1 = \chi_{[0,1]}$ и $\chi_{k,j}(t) = 2^{k/2} \chi(2^k t - j)$, $\chi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1]}$. Поводом к такому обсуждению послужил результат работы В. И. Филиппова [1, теорема 3, с. 600], который мы воспроизводим в эквивалентной формулировке: *если $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k/2} \max_{0 \leq j < 2^k} \|\chi_{k,j} - \varphi_{k,j}\|_1 < 1$, то система функций $\{1, \varphi_{k,j}\}$ полна в пространстве $L_1[0, 1]$.*

В настоящей работе показывается, что этот результат можно усилить, если воспользоваться хорошо известной методикой получения теорем устойчивости представляющих свойств близких систем функций и простейшими свойствами системы Хаара. Именно, справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Если $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k/2} \max_{0 \leq j < 2^k} \|\chi_{k,j} - \varphi_{k,j}\|_1 < 1$, то система функций $\{1, \varphi_{k,j}\}$ является базисом пространства $L_1[0, 1]$.*

Аналог сформулированной теоремы верен при любом $p \in [1, \infty)$:

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $1 \leq p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Если*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1/2-1/q)} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} \|\chi_{k,j} - \varphi_{k,j}\|_p^q \right)^{1/q} < 1,$$

то система функций $\{1, \varphi_{k,j}\}$ является базисом пространства $L_p[0, 1]$.

Теорема 2 допускает дальнейшее усиление.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $1 \leq p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Если система функций $\{1, \varphi_{k,j}\}$ ω -линейно независима в $L_p[0, 1]$ и*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1/2-1/q)} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} \|\chi_{k,j} - \varphi_{k,j}\|_p^q \right)^{1/q} < \infty,$$

то система функций $\{1, \varphi_{k,j}\}$ является базисом пространства $L_p[0, 1]$.

Напомним, что система функций $\{1, \varphi_{k,j}\}$ называется ω -линейно независимой в пространстве $L_p[0, 1]$, если из сходимости в этом пространстве нуль-ряда

$$c_{-1}1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} c_{k,j} \varphi_{k,j} = 0$$

следует равенство нулю всех его коэффициентов

$$c_{-1} = 0, \quad c_{k,j} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad j = 0, \dots, 2^k - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть

$$f = (f, 1)1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} (f, \chi_{k,j}) \chi_{k,j}$$

– ряд Фурье–Хаара функции $f \in L_p[0, 1]$. Определим конечномерные операторы $K_n: L_p[0, 1] \rightarrow L_p[0, 1]$, $n = 0, 1, \dots$, равенством

$$K_n f = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{2^k-1} (f, \chi_{k,j}) (\chi_{k,j} - \varphi_{k,j}).$$

Нетрудно видеть, что сопряженные операторы $K_n^*: L_q[0, 1] \rightarrow L_q[0, 1]$ даются равенством

$$K_n^* g = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{2^k-1} (g, \chi_{k,j} - \varphi_{k,j}) \chi_{k,j}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|K_{n+p}^* g - K_n^* g\|_q &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left\| \sum_{j=0}^{2^k-1} (g, \chi_{k,j} - \varphi_{k,j}) \chi_{k,j} \right\|_q \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} 2^{k(1/2-1/q)} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} |(g, \chi_{k,j} - \varphi_{k,j})|^q \right)^{1/q} \\ &\leq \|g\|_q \sum_{k=n+1}^{n+p} 2^{k(1/2-1/q)} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} \|\chi_{k,j} - \varphi_{k,j}\|_p^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Отсюда и в силу условий теоремы последовательность K_n^* сходится по равномерной операторной норме. То же справедливо и для последовательности K_n . Таким образом, равенство

$$Kf = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} (f, \chi_{k,j}) (\chi_{k,j} - \varphi_{k,j})$$

определяет компактный оператор в $L_p[0, 1]$. Далее, в силу условия ω -линейной независимости системы функций $\{1, \varphi_{k,j}\}$ единица не является собственным значением оператора K . Поэтому оператор $A = I - K$ обратим. Последнее утверждение основано на следующем хорошо известном факте, непосредственно вытекающем из альтернативы Фредгольма: *если число $\lambda \neq 0$ не является собственным значением компактного оператора K , то оператор $\lambda I - K$ обратим* (см., например, [2, с. 87]). Осталось заметить, что $A1 = 1$, $A\chi_{k,j} = \varphi_{k,j}$, $k = 0, 1, \dots$, $j = 0, \dots, 2^k - 1$, т.е. система $\{1, \varphi_{k,j}\}$ эквивалентна системе Хаара и потому является базисом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Так же, как и при доказательстве теоремы 3, получим оценку

$$\|K_n^* g\|_q \leq \|g\|_q \sum_{k=0}^n 2^{k(1/2-1/q)} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} \|\chi_{k,j} - \varphi_{k,j}\|_p^q \right)^{1/q},$$

откуда

$$\|K\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1/2-1/q)} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} \|\chi_{k,j} - \varphi_{k,j}\|_p^q \right)^{1/q} < 1$$

и оператор $A = I - K$ снова обратим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Достаточно положить в теореме 2 $p = 1$ и заметить, что при $q = \infty$ формально имеем

$$2^{k(1/2-1/q)} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} \|\chi_{k,j} - \varphi_{k,j}\|_p^q \right)^{1/q} = 2^{k/2} \max_{0 \leq j < 2^k} \|\chi_{k,j} - \varphi_{k,j}\|_1.$$

Применим полученные результаты к вопросу о базисности семейств нестационарных всплесков. Всюду далее функции $\varphi_k(t)$, $t \in R$, $k = 0, 1, \dots$, имеют носитель $\text{supp } \varphi_k \subset [0, 1]$ и $\varphi_k \in L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$. Семейство функций

$$\varphi_{k,j}(t) = 2^{k/2} \varphi_k(2^k t - j), \quad k = 0, 1, \dots, \quad j = 0, \dots, 2^k - 1,$$

называется *нестационарным всплеском* (в стационарном случае $\varphi_k = \varphi$ для всех $k = 0, 1, \dots$).

Предположим, далее, что функции φ_k имеют нулевой интеграл:

$$(\varphi_k, 1) = \int_0^1 \varphi_k(t) dt = 0 \quad (1)$$

и нормированы условием

$$(\varphi_k, \chi) = \int_0^{1/2} \varphi_k(t) dt - \int_{1/2}^1 \varphi_k(t) dt = 1. \quad (2)$$

ЛЕММА 1. Пусть $m \leq k$, $0 \leq j < 2^k$, $0 \leq i < 2^m$. Тогда $(\varphi_{k,j}, \chi_{m,i}) = \delta_{mk} \delta_{ij}$, где δ — символ Кронекера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дословно повторяет рассуждения, устанавливающие формулы (2.52) и (2.53) предложения 4 работы автора [2], надо лишь учесть нормировку (2) и нестационарность всплеска, которая в данном случае не оказывает влияния на доказательство.

ЛЕММА 2. Система функций $\{1, \varphi_{k,j}\}$ является ω -линейно независимой в пространстве $L_p[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c_{-1}1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} c_{k,j} \varphi_{k,j} = 0$. Умножая это равенство скалярно на функцию 1 и учитывая равенство (1), получаем $c_{-1} = 0$. Затем, умножая скалярно на функцию χ и применяя лемму 1 с $m = 0$, получаем $c_{0,0} = 0$. Предположим, что для всех $k < m$ равенство $c_{k,j} = 0$ доказано при всех $j = 0, \dots, 2^k - 1$. Тогда $\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} c_{k,j} \varphi_{k,j} = 0$. Умножая это равенство на функцию $\chi_{m,i}$ и применяя лемму 1, получаем $c_{m,i} = 0$, $i = 0, \dots, 2^m - 1$. По индукции заключаем, что все коэффициенты исходного нуль-ряда равны нулю.

ТЕОРЕМА 4. Пусть функции φ_k , $k = 0, 1, \dots$, удовлетворяют условиям (1), (2) и условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-1/p)} \|\chi - \varphi_k\|_p < \infty.$$

Тогда нестационарный всплеск $\{1, \varphi_{k,j}\}$ является базисом пространства $L_p[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из теоремы 3 и леммы 2 с учетом равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1/2-1/q)} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} \|\chi_{k,j} - \varphi_{k,j}\|_p^q \right)^{1/q} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-1/p)} \|\chi - \varphi_k\|_p.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. 1. К случаю стационарного всплеска теорема 4 не применима. Условия базисности стационарных всплесков в пространстве $L_2[0, 1]$ даны в работе [3].

2. Можно показать, что в условиях леммы 2 нестационарный всплеск $\{1, \varphi_{k,j}\}$ не только ω -линейно независим, но и минимален в пространстве $L_p[0, 1]$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов В.И. // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 4. С. 596–602. 2. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979. 3. Терехин П.А. // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 4. С. 547–560.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: terekhinpa@info.sgu.ru

Поступило
07.08.2003