Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Горельшев, А. И. Нейштадт, О смене режима распространения лучей в плавно нерегулярном волноводе, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 3, 348–364

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5539>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 10:31:30

О смене режима распространения лучей в плавно нерегулярном волноводе

И. В. Горелышев, А. И. Нейштадт

Исследуется трасса луча в плоском плавно нерегулярном волноводе. Возможны два режима распространения лучей: с отражениями и без отражений от стенок волновода. В каждом из режимов задача имеет адиабатический инвариант. Получена асимптотическая формула для значения скачка адиабатического инварианта при смене режима распространения.

Библиография: 13 названий.

Рассматриваемые в геометрической оптике волноводы можно разделить на три типа: волноводы с отражающими стенками, рефракционные волноводы, в которых лучи удерживаются за счет неоднородности показателя преломления среды поперек волновода, и волноводы с комбинированным механизмом удержания лучей – с одной стороны рефракция, а с другой – резкая граница (волновод Земля – ионосфера, приповерхностные звуковые каналы в океане) [1].

В работе рассматривается заполненный неоднородно преломляющей средой плоский плавно нерегулярный волновод с отражающими стенками. Задача состоит в том, чтобы найти трассу луча, распространяющегося в волноводе. Плавная нерегулярность означает, что расстояние между стенками волновода и показатель преломления среды внутри волновода изменяются медленно вдоль волновода (адиабатическая ситуация) [1]. В задаче с параллельными стенками и показателем преломления, не изменяющимся вдоль волновода, возможны два режима распространения луча: с отражениями и без отражений от стенок волновода. Из-за медленного изменения параметров системы вдоль волновода режим распространения может меняться. Для режима без отражений от стенок стандартная схема (см. [2]) адиабатической теории возмущений (АТВ) описывает трассу луча с высокой точностью. В [3] было показано, что формальная схема АТВ описывает трассу луча в режиме с отражениями с той же точностью, что и в режиме без отражений. В частности, значение адиабатического инварианта [2] в обоих режимах движения приближенно сохраняется на большом интервале времени. Оказывается, изменение режима распространения луча приводит к квази-случайному скачку значения адиабатического инварианта. В работе получена асимптотическая формула для величины этого скачка. Данный скачок является аналогом скачка адиабатического инварианта при

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00117) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-691.2008.1).

Рис. 1

переходе через сепаратрису в гамильтоновых системах с медленной зависимостью от времени [4]–[6] и в гамильтоновых системах с быстрыми и медленными движениями [7]. Роль сепаратрисы выполняет режим распространения, когда луч касается стенки.

1. Гамильтонова динамика системы

Распространение луча в плоской среде описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом вида

$$\mathcal{H} = p_x^2 + p_y^2 - n^2,$$

рассматриваемой на уровне гамильтониана $\mathcal{H} = 0$. Здесь (x, y) – декартовы координаты на плоскости, p_x, p_y – импульсы (направляющие луча), сопряженные переменным x, y ; $n = n(y, x)$ – показатель преломления среды внутри волновода.

Рассматривается плавно нерегулярный волновод (см. рис. 1). Это означает, что $n = n(y, \varepsilon x)$, где $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр. Пусть, для простоты, нижняя стенка волновода совпадает с осью Ox . Положение верхней стенки зададим формулой $y = d(\varepsilon x)$, где $d(\cdot)$ – гладкая функция. Будем рассматривать только отражения от верхней стенки. Отражения от нижней стенки могут быть рассмотрены аналогичным образом. Ввиду плавной нерегулярности имеет смысл сначала рассмотреть задачу с фиксированными значениями εx и p_x . На фазовом портрете (в координатах y, p_y) полученной системы имеется кривая, касающаяся линии $y = d(\varepsilon x)$. Назовем эту кривую сепаратрисой. Вернемся теперь к полной системе.

ЛЕММА 1. *В рассматриваемой задаче значение координаты x вдоль трассы луча в окрестности значения $x = x_0$, соответствующего изменению режима распространения, монотонно возрастает.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для смены режима распространения проекция траектории гамильтоновой системы на плоскость (y, p_y) должна пересечь сепаратрису. На сепаратрисе имеется точка $y = d(\varepsilon x_0), p_y = 0$. Поэтому при пересечении сепаратрисы $p_x = \pm n(d(\varepsilon x_0), \varepsilon x_0) \neq 0$. Если бы луч мог менять направление распространения вдоль волновода, это происходило бы при $p_x = 0$. Следовательно, рассматривая задачу о смене режима распространения, можно считать координату x монотонной функцией времени, и утверждение доказано.

Рис. 2

Понизим размерность системы. Введем гамильтониан $E = -p_x$, при этом переменная x , канонически сопряженная p_x , может рассматриваться в качестве времени. Пусть распространение луча происходит слева направо. В этом случае p_x имеет положительное значение. Таким образом, получаем гамильтонову систему с медленной зависимостью от времени и гамильтонианом

$$E = -\sqrt{n^2(y, \tau) - p^2}, \quad (1.1)$$

где (p, y) – канонически сопряженные переменные: p – импульс, а y – координата; τ – “медленное время”, $\tau = \varepsilon x$.

Полученная гамильтонова система описывает трассу луча между отражениями луча от стенки. Чтобы полностью описать динамику, необходимо описать отражение луча от стенки.

Условие, что угол падения равен углу отражения, приводит к соотношению

$$p_1 = -p + \frac{2\varepsilon d'}{1 + (\varepsilon d')^2} (p\varepsilon d' + \sqrt{\eta^2 - p^2}), \quad (1.2)$$

где p и p_1 – значения импульса p до и после отражения, d' – производная функции d по τ , $\eta = n(d(\tau), \tau)$.

2. Переход через сепаратису

Рассмотрим фазовый портрет гамильтоновой системы с гамильтонианом (1.1) при замороженном значении τ (см. рис. 2). На этом портрете имеются сепаратрисы, разделяющие области с различными режимами распространения луча. Вдали от сепаратрис переменная “действие” является гладкой функцией фазовых переменных и ее значение сохраняется с хорошей точностью на большом интервале времени. На сепаратрисе “действие” как функция фазовых переменных имеет особенность. Это является причиной скачка значения “действия” при переходе через сепаратрису.

В рассматриваемой задаче имеются две сепаратрисы. Первая сепаратриса соответствует переходу к режиму с отражениями от верхней, вторая – от нижней стенок

волновода. Ниже мы рассматриваем переход через первую сепаратрису. Переход через вторую сепаратрису рассматривается аналогичным образом.

2.1. Улучшенный адиабатический инвариант. Рассмотрим фазовый портрет исследуемой гамильтоновой системы при фиксированном значении τ . На этом фазовом портрете сделаем замену переменных от исходных переменных (p, y) к переменным “действие-угол” (I, ϕ) при помощи производящей функции $S(I, y, \tau)$. Переменная ϕ вводится таким образом, чтобы при полном обороте вдоль фазовой кривой ее изменение составило 2π . Теперь переменные (I, ϕ) выражаются согласно формулам

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dy, \quad \phi = 2\pi \frac{t}{T},$$

где I – “действие” (адиабатический инвариант АИ), ϕ – “угол” (фаза), t – время движения от начального положения до точки (y, p) вдоль кривой уровня функции E при фиксированном значении τ , и T – период движения вдоль кривой уровня функции E при фиксированном значении τ . Гамильтониан задачи при этом принимает вид

$$H = H_0(I, \tau) + \varepsilon H_1(I, \phi, \tau). \quad (2.1)$$

Значение скачка “действия” при переходе через сепаратрису мало по сравнению с колебаниями значения “действия” в каждом из режимов распространения луча. Удобно поэтому рассматривать скачок “улучшенного действия” (УД), или улучшенного адиабатического инварианта J , который в каждом режиме распространения имеет колебания $O(\varepsilon^2)$. Значение J задается формулой (см. [5])

$$J = I + \varepsilon u, \quad u = u(p, y, \tau) = \frac{1}{\partial H_0 / \partial J} \int_0^\phi (H_1(J, \chi, \tau) - \langle H_1 \rangle) d\chi,$$

где $\langle \cdot \rangle$ обозначает усреднение по фазе.

ЛЕММА 2. Для режима с отражениями от верхней стенки функция $u(\cdot)$ имеет вид

$$u(p_0, y_0, \tau) = \frac{1}{2\pi} \oint \left(\frac{T}{2} - t \right) \frac{\partial E}{\partial \tau} dt + \frac{T d'}{2\pi^2} (\psi - \pi) \sqrt{\eta^2 - E^2}, \quad (2.2)$$

где

$$\psi = \frac{2\pi t_0}{T} = -\frac{2\pi}{T} E \int_{y_0}^{d(\tau)} \frac{dy}{p}.$$

Здесь контур, вдоль которого ведется интегрирование, является траекторией невозмущенной ($\tau = \text{const}$) системы, проходящей через точку (y_0, p_0) . Траектория параметризуется временем t , а значение $t = 0$ соответствует точке (y_0, p_0) , $T = T(E, \tau)$ – период движения вдоль этой траектории. Мы предполагаем здесь, что $p_0 > 0$. Значение t_0 – время движения от (y_0, p_0) до верхней стенки, вычисленное в невозмущенной системе; $\eta = \eta(\tau) = n(d(\tau), \tau)$.

В режиме без отражений формула для u упрощается и принимает вид (ср. [5])

$$u(y_0, p_0, \tau) = \frac{1}{2\pi} \oint \left(\frac{T}{2} - t \right) \frac{\partial E}{\partial \tau} dt.$$

Доказательство леммы 2 (вывод формулы для функции замены переменных) приведено в приложении.

Значение J сохраняется с точностью $O(\varepsilon^2)$ в каждом из режимов распространения луча. Однако, как будет показано ниже, J испытывает скачок порядка $\varepsilon^{3/2}$ при переходе через сепаратрису.

2.2. Асимптотические разложения в окрестности сепаратрисы. Введем $\mathcal{E} = n(d(\tau), \tau) - \sqrt{n^2 - p^2}$. Тогда $E = \mathcal{E} - \eta$, где $\eta = n(d(\tau), \tau)$. На сепаратрисе $\mathcal{E} = 0$. Обозначим h значение $\mathcal{E}$. Переменную “действие” можно рассматривать как функцию значения энергии h и “медленного времени” τ : $I = I(h, \tau)$. Эта функция имеет особенность при $h = 0$. Найдем асимптотику функции $I(h, \tau)$ в окрестности сепаратрисы. Функция $I(h, \tau)$ при $h > 0$ может быть записана следующим образом:

$$I = I_{\text{sm}} + (I - I_{\text{sm}}) = I_{\text{sm}} - \frac{1}{\pi} \int_{d(\tau)}^{y_{\text{max}}} \sqrt{n^2 - E^2} dy, \quad (2.3)$$

где I_{sm} – гладкая часть I ,

$$I_{\text{sm}} = \frac{1}{\pi} \int_{y_{\text{min}}}^{y_{\text{max}}} \sqrt{n^2 - E^2} dy;$$

y_{min} и y_{max} – минимальное и максимальное значения координаты y на кривой $\mathcal{E} = h$ без учета стенок. В нашем случае y_{min} расположено между стенками, а y_{max} за верхней стенкой. Функция $I_{\text{sm}}(h, \tau)$ в окрестности сепаратрисы имеет вид

$$I_{\text{sm}} = \frac{1}{2\pi} S(\tau) + \frac{T_0}{2\pi} h + O(h^2),$$

где $S(\tau)$ – площадь, ограниченная сепаратрисой, а $T_0 = T_0(\tau)$ – период движения вдоль сепаратрисы. Сингулярный член дается интегралом в формуле (2.3). Вычислим его в предположении, что коэффициент преломления n не имеет локального минимума в точке $y = d(\tau)$. В этом предположении $\partial n / \partial y < 0$ при $y = d(\tau)$. Следовательно, интеграл из (2.3) принимает вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{d(\tau)}^{y_{\text{max}}} \sqrt{n^2 - E^2} dy = \frac{2}{3\pi} \sqrt{-\frac{\partial n^2}{\partial y} \Big|_{d(\tau)}} (y_{\text{max}} - d(\tau))^{3/2} + O((y_{\text{max}} - d(\tau))^{5/2}).$$

Значение импульса при отражении от стенки есть

$$p = (\eta^2 - E^2)^{1/2} = \left(-\frac{\partial n^2}{\partial y} \Big|_{d(\tau)} (y_{\text{max}} - d(\tau)) \right)^{1/2} + O((y_{\text{max}} - d(\tau))^{3/2}).$$

Следовательно, имеем

$$I = I_{\text{sm}} - \frac{A}{2\eta\sqrt{2\eta}} (\eta^2 - E^2)^{3/2} + O((\eta^2 - E^2)^{5/2}) = I_{\text{sm}} - Ah^{3/2} + O(h^{5/2}), \quad (2.4)$$

где

$$A(\tau) = -\frac{\sqrt{2}}{3\pi \partial \sqrt{n} / \partial y|_{y=d(\tau)}}.$$

Из (2.4) следует выражение для периода

$$T = 2\pi \frac{\partial I}{\partial h} = T_{\text{sm}} - 3\pi Ah^{1/2} + O(h^{3/2}). \quad (2.5)$$

Обозначим δt время мнимого движения за стенкой вдоль гладкой кривой уровня функции $\mathcal{E} = h$. В выражении (2.5) $3\pi Ah^{1/2} = \delta t + O(h)$, и T_{sm} – период движения вдоль гладкой кривой уровня функции $\mathcal{E} = h$. Значение T_{sm} можно заменить на период движения вдоль сепаратрисы T_0 с точностью $O(h)$.

Найдем теперь асимптотику функции u в окрестности сепаратрисы. Согласно (2.2) имеем

$$u = \frac{T}{4\pi} \oint \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} dt - \frac{1}{2\pi} \oint t \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} dt + \frac{Td'}{2\pi^2} (\psi - \pi) \sqrt{2\eta h} + O(h^{3/2}). \quad (2.6)$$

Как и выше, при вычислении интегралов мы дополняем уровень энергии до гладкой замкнутой кривой. Обозначим t_0 момент отражения. Введем следующие определения для интегралов вдоль гладкой кривой уровня функции $\mathcal{E} = h$:

$$\theta_1(\tau, h) = \int_0^{t_0} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} dt, \quad \theta(\tau, h) = \oint_{\text{smooth}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} dt.$$

Индекс “smooth” здесь и ниже означает, что интегрирование ведется по гладкой кривой уровня энергии. Отметим, что θ и θ_1 могут быть вычислены с точностью $O(h)$ и $O(h^{1/2})$ соответственно вдоль сепаратрисы при соответствующем значении τ . Поэтому введем функции $\theta_0 = \theta(\tau, 0)$ и $\theta_{1,0} = \theta_1(\tau, 0)$.

Заметим, что гладкость выражения

$$\frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} dt - \frac{d'}{\pi} \sqrt{2\eta h} + O(h^{3/2}) = -\frac{\partial I}{\partial \tau}$$

выше, чем гладкость выражения для периода T . Поэтому первый член в выражении (2.6) принимает вид

$$\frac{T}{4\pi} \oint \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} dt = \frac{T}{4\pi} (\theta_0 + 2d' \sqrt{2\eta h} + O(h)) = \frac{T}{4\pi} \theta_0 + \frac{T_0 d'}{2\pi^2} \pi \sqrt{2\eta h} + O(h).$$

Выражение для u сводится к виду

$$u = \frac{T}{4\pi} \theta_0 - \frac{1}{2\pi} \oint t \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} dt + \frac{T_0 d'}{2\pi^2} \psi \sqrt{2\eta h} + O(h), \quad T = T_0 - \delta t + O(h).$$

Вычислим интеграл

$$\oint t \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} dt = \oint_{\text{smooth}} t \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} dt - t_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} \Big|_{t_0} \delta t - \delta t \int_{t_0}^T \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} dt + O(\delta t^2).$$

Окончательно,

$$\oint t \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} dt = \oint_{\text{smooth}} t \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} dt - t_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} \Big|_{t_0} \delta t - \delta t \oint \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} dt + \delta t \int_0^{t_0} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} dt + O(\delta t^2).$$

Вычислим производную $\partial \mathcal{E} / \partial \tau$ в момент t_0 , т.е. на стенке:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} \Big|_{t_0} = \frac{\partial}{\partial \tau} \eta - \frac{\partial}{\partial \tau} \sqrt{n^2 - p^2} = \frac{\partial n}{\partial \tau} + \frac{\partial n}{\partial y} d' - \frac{\eta \partial n / \partial \tau|_{d(\tau), \tau}}{\eta} + O(h) = \frac{\partial n}{\partial y} \Big|_{y=d(\tau)} d' + O(h).$$

Подставляя формулы для t_0 , $\partial \mathcal{E} / \partial \tau|_{t_0}$ и δt в выражение для искомого интеграла, находим

$$\oint t \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} dt = \oint_{\text{smooth}} t \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} dt + \frac{T_0 d'}{\pi} \psi \sqrt{2\eta h} - 3\pi A h^{1/2} (\theta_0 - \theta_{1,0}) + O(h).$$

Нетрудно видеть, что сингулярная часть u_{nsm} функции u имеет вид

$$u_{\text{nsm}} = \frac{3}{4} A h^{1/2} (\theta_0 - 2\theta_{1,0}).$$

2.3. Асимптотическая формула для значения скачка улучшенного адиабатического инварианта. Следующий шаг – вычислить значение скачка УД при переходе через сепаратрису. С этой целью рассмотрим следующую ситуацию. Пусть кривая уровня энергии, на которой находится начальная фазовая точка, не пересекает стенок. Обозначим τ_c значение момента “медленного времени”, при котором площадь, ограниченная сепаратрисой, становится равной начальному значению действия, умноженному на 2π . Предположим также, что переход через сепаратрису происходит трансверсально, т.е. $\theta_0(\tau_c) > 0$.

Дальнейший текст посвящен доказательству следующего основного утверждения.

ТЕОРЕМА 1. *Обозначим значение улучшенного адиабатического инварианта в начальный момент (в режиме без отражений) как J_- , а значение улучшенного адиабатического инварианта через “медленное время” порядка 1 после перехода в режим с отражениями как J_+ . При переходе из режима распространения луча без отражений в режим распространения луча с отражениями значение УД изменяется на величину $J_+ - J_-$. Значение $J_+ - J_-$ описывается асимптотической формулой*

$$J_+ - J_- = A_c (\varepsilon \theta_c)^{3/2} f(\xi) + O(\varepsilon^{5/3}),$$

где $A_c = A(\tau_c)$, $\xi = h_c / (\varepsilon \theta_c)$, h_c – значение $\mathcal{E}$ при первом отражении луча от стенки, $\theta_c = \theta_0(\tau_c)$, а $f(\xi)$ дается выражением

$$f(\xi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} \sum_{k=0}^N (\xi + k)^{1/2} - \frac{3}{4} (\xi + N)^{1/2} - (\xi + N)^{3/2} \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В [8] исследовалась аналогичная система. Именно, была рассмотрена задача об одномерном движении частицы между стенками, медленно меняющими свое положение, при наличии внешнего потенциального силового поля, действующего на частицу. В [8] значение $J_+ - J_-$, вычисленное по аналогичной асимптотической формуле, описывает скачок J с той же точностью $O(\varepsilon^{5/3})$.

Доказательство теоремы состоит из двух частей. Сначала мы в главном приближении выведем асимптотическую формулу. Затем получим оценку точности этой формулы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА. Введем несколько определений. Рассмотрим первое отражение луча от стенки волновода. Обозначим значение гамильтониана $\mathcal{E}$ при этом отражении через h_c ; в главном приближении $h_c \in (0, \varepsilon \theta_0(\tau_c))$. Перед первым отражением значение гамильтониана $\mathcal{E}$ в точке $y = y_{\min}(\tau_c)$ в главном приближении дается выражением $h_c - (1/2)\varepsilon \theta_0(\tau_c)$ и,

следовательно, существует линия $\{y = y_0, p > 0\}$, где $y_0 \in (y_{\min}(\tau_c), d(\tau_c))$ такая, что значение энергии в точке пересечения траектории рассматриваемой гамильтоновой системы и этой линии меньше, чем h_c , но больше, чем $h_c - (1/2)\varepsilon\theta_0(\tau_c)$. Если это значение положительно, обозначим его h_0 и скажем, что переход через сепаратрису произошел без отражения. Если же значение гамильтониана $\mathcal{E}$ оказалось отрицательным, обозначим h_0 энергию в точке следующего пересечения траектории и линии $\{y = y_0, p > 0\}$ и скажем, что переход через сепаратрису произошел с отражением от стенки. Таким образом, h_0 – минимальное положительное значение гамильтониана $\mathcal{E}$ на траектории при пересечении с линией $\{y = y_0, p > 0\}$.

Рассмотрим обороты с началом и окончанием на линии $y = y_0$, совершаемые траекторией на фазовой плоскости. Изучим, как траектория удаляется от сепаратрисы при $h > 0$. Затем рассмотрим оборот, на котором совершается переход через сепаратрису. Выведем формулу для изменения J за оборот. Будем принимать во внимание следующее свойство функции J : изменение J за оборот является величиной порядка ε^3 . Рассмотрим асимптотику членов порядка ε^3 в выражении для изменения J за оборот. Пусть символ Δ перед функцией обозначает изменение значения этой функции за один оборот траектории на фазовой плоскости. Имеем

$$\Delta J = \Delta I + \Delta \varepsilon u.$$

В главном приближении ΔI имеет вид

$$\Delta I = -\frac{1}{2\pi}\theta_0\Delta\tau + \frac{T_0}{2\pi}\Delta h - A(h + \Delta h)^{3/2} + Ah^{3/2}.$$

Здесь $\Delta\tau$ и Δh – изменения “медленного времени” и энергии за один оборот, h – значение энергии в начале оборота.

Обозначим через h_* и τ_* значения h и “медленного времени” при отражении от стенки. Вычислим Δh и $\Delta\tau$.

В главном приближении

$$h_* = h + \varepsilon\theta_{1,0};$$

точность этой формулы $O(\varepsilon\sqrt{h})$.

При вычислении Δh и $\Delta\tau$ вместо того, чтобы интегрировать скорости изменения h , τ вдоль траектории, будем интегрировать эти скорости вдоль кривой уровня $h = h_*$ при фиксированном значении переменной “медленное время” τ_* .

ЛЕММА 3. *Изменение значений h и переменной “медленное время” за один оборот вдоль траектории может быть с точностью $O(\varepsilon^2)$ вычислено интегрированием скоростей изменения соответствующих величин вдоль кривой уровня $h = h_*$ при фиксированном значении параметра τ_* .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим время, за которое совершается один оборот. Для изменения значения h рассуждения проводятся аналогичным образом. Вдали от стенки на любом интервале (y_1, y_2) время движения вдоль траектории может быть вычислено как время движения вдоль кривой уровня $h = h_*$ с точностью $O(\varepsilon^2)$. Поэтому рассмотрим некоторую точку $\hat{y}$, близкую к стенке, и вычислим время движения от этой точки до стенки вдоль траектории и вдоль кривой уровня $h = h_*$ при $\tau = \tau_*$. Обозначим (будем рассматривать “медленное время”) разность этих

значений $\delta\tau$. На рассматриваемом интервале $(\hat{y}, d)$ имеем $n' < 0$. Поэтому для вычисления времени будем использовать формулу

$$\tau = \varepsilon \int \frac{E dp}{n(\partial n / \partial y)}.$$

Значение $\delta\tau$ найдем как разность соответствующих интегралов, вычисленных вдоль траектории и вдоль кривой уровня $h = h_*$ при $\tau = \tau_*$ соответственно. Поскольку $n' < 0$, в обоих интегралах можно рассматривать y как функцию импульса, h и “медленного времени”: $y = y(p, h, \tau)$. Пусть $\hat{p} \sim 1$ значение импульса на траектории, соответствующее $\hat{y}$. Можно показать, что значение импульса на кривой уровня $h = h_*$ при $\tau = \tau_*$, соответствующее точке $\hat{y}$, отличается от $\hat{p}$ на величину $\delta p \sim \varepsilon$. Значение импульса на стенке p_* одинаково в обоих случаях. Поэтому с точностью $O(\varepsilon^2)$ величина $\delta\tau$ вычисляется как разность рассматриваемых интегралов на интервале $(p_*, \hat{p})$. Последнее следует из того факта, что время движения вдоль интервала $\gamma = (\hat{p}, \hat{p} + \delta p)$ в обоих случаях оценивается как

$$\varepsilon \int_{\gamma} \frac{E dp}{n(\partial n / \partial y)} = O(\varepsilon \delta p v) = O(\varepsilon^2).$$

Пусть символ δ перед некоторой функцией в подынтегральном выражении означает разность ее значений, вычисленных на траектории и рассматриваемой кривой уровня при одном и том же значении p . Находим

$$\delta\tau = \varepsilon \int_{p_*}^{\hat{p}} \delta \frac{E}{n(\partial n / \partial y)} dp + O(\varepsilon^2).$$

Здесь интегрирование ведется по p от p_* до $\hat{p}$. На данном интервале изменение “медленного времени” оценивается величиной порядка $O(\varepsilon)$. Имеем $y = y(p, h, \tau)$; следовательно,

$$\delta \frac{E}{n(\partial n / \partial y)} = O(\varepsilon).$$

Тогда

$$\delta\tau = \varepsilon \int_{p_*}^{\hat{p}} O(\varepsilon) dp + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2),$$

и часть леммы о нахождении изменения значения “медленного времени” доказана. Доказательство части леммы об изменении значения h проводится аналогичным образом. Лемма доказана.

Продолжим кривую уровня энергии за стенку. Найдем изменение h и времени вдоль такой кривой и вычтем изменение за счет мнимого движения за стенкой. Примем также во внимание, что значение h изменяется при отражении от стенки. Вклад из-за отражения можно вычислить в главном приближении следующим образом:

$$\delta h_a = 2\varepsilon d' \sqrt{2\eta h_*}.$$

Эта формула следует из соотношения (1.2) и из того факта, что в главном приближении импульс при отражении просто меняет знак.

Вклад в Δh из-за движения за стенкой дается в главном приближении выражением

$$\delta h_b = -3\pi\varepsilon A h_*^{1/2} \frac{\partial E}{\partial \tau} \Big|_{t_0}.$$

Нетрудно убедиться, что δh_a и δh_b в главном приближении взаимно уничтожаются. Следовательно, в главном приближении

$$\begin{aligned}\Delta h &= \varepsilon \theta_0, \\ \Delta \tau &= \varepsilon (T_0 - 3\pi A (h + \varepsilon \theta_{1,0})^{1/2}).\end{aligned}$$

Изменение I в главном приближении

$$\Delta I = \frac{3}{2} \varepsilon \theta_0 A (h + \varepsilon \theta_{1,0})^{1/2} - A (h + \varepsilon \theta_0)^{3/2} + A h^{3/2}. \quad (2.7)$$

Найдем $\Delta \varepsilon u$. В главном приближении имеем

$$\Delta \varepsilon u = \frac{3}{4} A \varepsilon (\theta_0 - 2\theta_{1,0}) ((h + \varepsilon \theta_0)^{1/2} - h^{1/2}). \quad (2.8)$$

Получим выражение для изменения J при переходе через сепаратрису. Необходимо рассмотреть две возможности: на обороте, на котором совершается переход, происходит или не происходит отражение от стенки. В случае, когда отражение не происходит, изменение значений “медленного времени” и h за оборот можно вычислить как $\Delta \tau_0 = \varepsilon T_0$ и $\Delta h_0 = \varepsilon \theta_0$ с точностью $O(\varepsilon^2)$. Следовательно, изменение J с точностью $O(\varepsilon^2)$ дается суммой сингулярных членов в выражениях для I и εu в точке (y_0, p_0) :

$$\Delta_0 J = -A h_0^{3/2} + \frac{3}{4} A \varepsilon (\theta_0 - 2\theta_{1,0}) h_0^{1/2}. \quad (2.9)$$

В главном приближении $h_0 = h_c - \varepsilon \theta_{1,0}$.

В случае перехода через сепаратрису с отражением имеем $\Delta \tau_0 = \varepsilon T_0 - 3\pi A h_c^{1/2}$, $h_c < \varepsilon \theta_{1,0}$. Для h_0 получаем $h_0 = h_c + \varepsilon (\theta_0 - \theta_{1,0})$. Тогда

$$\Delta_0 J = \frac{3}{2} \varepsilon \theta_0 A (h_c)^{1/2} - A h_0^{3/2} + \frac{3}{4} A \varepsilon (\theta_0 - 2\theta_{1,0}) h_0^{1/2}. \quad (2.10)$$

Вычислим полное изменение J . Обозначим его $\Delta_\Sigma J$. Рассмотрим случай, когда переход через сепаратрису происходит без отражения. Для случая с отражением результат тот же. Это естественное следствие того факта, что значение $\Delta_\Sigma J$ не зависит от выбора линии $\{y = y_0, p > 0\}$. Обозначим $\Delta_n J$ изменение J на обороте с номером n , считая от перехода через сепаратрису. В главном приближении будем использовать константы $\theta_c = \theta(\tau_c, 0)$, $\theta_{1c} = \theta_1(\tau_c, 0)$ и $A_c = A(\tau_c)$ вместо функций $\theta_0(\tau)$, $\theta_{1,0}(\tau)$ и $A(\tau)$. Заметим, что изменение $\Delta_\Sigma J$ набирается вблизи сепаратрисы. Поэтому вклад от того, что мы использовали бы истинные значения A , θ , θ_1 , мал. Воспользуемся формулами (2.7)–(2.10) и в главном приближении получим

$$\begin{aligned}\Delta_\Sigma J &= \sum_{n=0}^{N \sim 1/\varepsilon} \Delta_n J = \frac{3}{2} A_c \varepsilon \theta_c \sum_{n=0}^N (h_n + \varepsilon \theta_{1c})^{1/2} \\ &\quad + \frac{3}{4} A_c \varepsilon (\theta_c - 2\theta_{1c}) (h_N + \varepsilon \theta_c)^{1/2} - A_c (h_N + \varepsilon \theta_c)^{3/2}.\end{aligned}$$

Здесь $h_n = h_0 + \varepsilon \theta_c n$ и $h_0 = h_c - \varepsilon \theta_{1c}$. Следовательно, формула для изменения J принимает вид

$$\Delta_\Sigma J = \frac{3}{2} A_c \varepsilon \theta_c \sum_{n=0}^N (h_c + \varepsilon \theta_c n)^{1/2} + \frac{3}{4} A_c \varepsilon \theta_c (h_c + \varepsilon \theta_c (N+1))^{1/2} - A_c (h_c + \varepsilon \theta_c (N+1))^{3/2} + \varepsilon^{3/2} O(N^{-1/2}). \quad (2.11)$$

Окончательно,

$$\Delta_\Sigma J = A_c (\varepsilon \theta_c)^{3/2} \left[\frac{3}{2} \sum_{k=0}^N (\xi + k)^{1/2} - \frac{3}{4} (\xi + N)^{1/2} - (\xi + N)^{3/2} + O(N^{-1/2}) \right], \quad (2.12)$$

где $\xi = h_c / \varepsilon \theta_c$. Перепишем (2.12) как $\Delta_\Sigma J = A_c (\varepsilon \theta_c)^{3/2} f(\xi) + O(\varepsilon^2)$, где

$$f(\xi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} \sum_{k=0}^N (\xi + k)^{1/2} - \frac{3}{4} (\xi + N)^{1/2} - (\xi + N)^{3/2} \right).$$

Функция $f(\xi)$ может быть записана в виде

$$f(\xi) = \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-3/2} \left(\frac{1}{2} - \xi + \frac{1}{t} - \frac{e^{-\xi t}}{1 - e^{-t}} \right) dt. \quad (2.13)$$

Доказательство этого факта основано на свойствах Γ -функции [9] и здесь опускается.

Асимптотическая формула

$$\Delta_\Sigma J = A_c (\varepsilon \theta_c)^{3/2} f(\xi) \quad (2.14)$$

позволяет в главном приближении вычислить скачок адиабатического инварианта как функцию τ_c и ξ . Значение ξ очень чувствительно к выбору начальных условий. Малое, $\sim \varepsilon$, изменение начальных условий вызывает в общем случае большое, ~ 1 , изменение ξ . Если начальные условия известны с точностью хуже, чем $O(\varepsilon)$, то значение ξ не может быть однозначно определено. Поэтому имеет смысл рассматривать ξ как случайную величину (подобный подход к задачам с переходом через сепаратрису был предложен в [10], [11]). Следуя [11], определим распределение вероятности для ξ следующим образом. Пусть α, β – фиксированные числа, $0 < \alpha < \beta < 1$. Возьмем шар начальных условий $\mathcal{V}^\delta$ радиуса $\delta > 0$ в пространстве (τ, y, p) . Обозначим $\mathcal{V}_{\alpha, \beta}^{\delta, \varepsilon}$ подмножество $\mathcal{V}^\delta$ такое, что для начальных условий из $\mathcal{V}_{\alpha, \beta}^{\delta, \varepsilon}$ получаем $\xi \in (\alpha, \beta)$. Тогда по определению (см. [5]) вероятность события $\{\xi \in (\alpha, \beta)\}$ есть

$$\Pr(\xi \in (\alpha, \beta)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{meas } \mathcal{V}_{\alpha, \beta}^{\delta, \varepsilon}}{\text{meas } \mathcal{V}^\delta}.$$

Здесь $\text{meas}(\cdot)$ стандартный объем в пространстве (τ, y, p) . Можно показать (ср. [12], [13]), что формула для ξ имеет вид

$$\xi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \left(\phi_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau_0}^{\tau_c} \omega_0(J, \tau) d\tau \right) + O(\varepsilon) \mod 1,$$

где ϕ_0 , τ_0 , J – начальные значения переменных ϕ , τ , J . Отсюда следует, что

$$\Pr(\xi \in (\alpha, \beta)) = \beta - \alpha.$$

Поэтому ξ может рассматриваться как случайная величина с равномерным распределением на интервале $(0, 1)$. Формула (2.14) позволяет рассматривать скачок адиабатического инварианта как случайную величину и вычислять плотность его распределения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ФОРМУЛЫ (2.14). Докажем теперь, что изменение значения J , вычисленное по формуле (2.14), с точностью $O(\varepsilon^{5/3})$ определяет изменение $J_+ - J_-$:

$$J_+ - J_- = \Delta_\Sigma J + O(\varepsilon^{5/3}).$$

При переходе через сепаратрису значение гамильтониана $\mathcal{E}$ на прямой $\{y = y_0, p > 0\}$ монотонно увеличивается с ростом номера оборота. Разделим интервал значений $\mathcal{E}$ от $O(\varepsilon)$ до $O(1)$ на два интервала некоторым значением $\hat{h}$. Будем предполагать, что $\hat{h}$ мало по сравнению с 1, но много больше ε .

Если h достаточно велико по сравнению с ε , изменение J за один оборот оценивается как $O(\varepsilon^3/h^{3/2})$. Это следует из асимптотической формулы для J и определения процедуры замены переменных, приближенно интегрирующей задачу, когда h достаточно велико по сравнению с ε [3]. Суммируя значения $O(\varepsilon^3/h^{3/2})$ по оборотам на интервале значений $\mathcal{E}$ от $\hat{h}$ до 1, получаем $O(\varepsilon^2/\hat{h}^{1/2})$. Будем рассматривать полученное значение $O(\varepsilon^2/\hat{h}^{1/2})$ как погрешность формулы (2.14), которая набирается на интервале значений $\mathcal{E}$ от $\hat{h}$ до 1. Оценим теперь погрешность на интервале значений $\mathcal{E}$ от $O(\varepsilon)$ до $\hat{h}$ и сравним с уже полученной погрешностью $O(\varepsilon^2/\hat{h}^{1/2})$.

Рассмотрим функцию $J(h, \tau)$ и найдем изменение ее значения за один оборот:

$$\Delta J = J\left(h + \varepsilon \oint_{h_*, \tau_*} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} dt - 2\varepsilon d' \sqrt{2\eta h_*} + O(\varepsilon^2)\tau + \varepsilon \oint_{h_*, \tau_*} dt + O(\varepsilon^2)\right) - J(h, \tau).$$

Здесь $J = I + \varepsilon u$, h и τ – значения $\mathcal{E}$ и “медленного времени” в начале оборота; h_* , τ_* – значения $\mathcal{E}$ и “медленного времени” при отражении от стенки на рассматриваемом обороте. Член $-2\varepsilon d' \sqrt{2\eta h_*}$ в выражении для значения $\mathcal{E}$ соответствует изменению значения $\mathcal{E}$ при отражении от стенки. Следовательно, на рассматриваемом интервале

$$\Delta J = J\left(h + \varepsilon \oint_{h_*, \tau_*} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} dt - 2\varepsilon d' \sqrt{2\eta h_*}, \tau + \varepsilon \oint_{h_*, \tau_*} dt\right) - J(h, \tau) + O(\varepsilon^2).$$

Суммируя члены $O(\varepsilon^2)$ по оборотам на интервале значений $\mathcal{E}$ от $O(\varepsilon)$ до $\hat{h}$, получаем $O(\varepsilon \hat{h})$. Сравним $O(\varepsilon \hat{h})$ с $O(\varepsilon^2/\hat{h}^{1/2})$. Суммарная погрешность будет минимальной при $\hat{h} \sim \varepsilon^{2/3}$.

Сравним выражение

$$\bar{\Delta} J = J\left(h + \varepsilon \oint_{h_*, \tau_*} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} dt - 2\varepsilon d' \sqrt{2\eta h_*}, \tau + \varepsilon \oint_{h_*, \tau_*} dt\right) - J(h, \tau) \quad (2.15)$$

с соответствующим членом в асимптотической формуле (2.14). С этой целью представим I в виде $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} S(\tau) + \frac{T_0(\tau)}{2\pi} h - A(\tau) h^{3/2}$$

– главная часть I , а $I_2 = O(h^2)$ – малая поправка к главной части. Соответственно, $u = u_1 + u_2$, где

$$u_1 = u_1^0(\tau) + \frac{3}{4} A(\theta_0 - 2\theta_{1,0}) h^{1/2}$$

и $u_2 = O(h)$, u_1^0 – гладкая функция. Окончательно, $J = J_1 + J_2$, где $J_1 = I_1 + \varepsilon u_1$ и $J_2 = I_2 + \varepsilon u_2$. Примем во внимание, что

$$\oint_{h_*, \tau_*} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} dt - 2\varepsilon d' \sqrt{2\eta h_*} = -2\pi \frac{\partial I}{\partial \tau}(h_*, \tau_*), \quad \oint_{h_*, \tau_*} dt = 2\pi \frac{\partial I}{\partial h}(h_*, \tau_*).$$

Теперь (2.15) переходит в

$$\bar{\Delta} J = J \left(h - 2\pi\varepsilon \frac{\partial I}{\partial \tau}(h_*, \tau_*), \tau + 2\pi\varepsilon \frac{\partial I}{\partial h}(h_*, \tau_*) \right) - J(h, \tau). \quad (2.16)$$

Согласно методу, использованному при выводе формулы (2.12), главная часть выражения для изменения J за один оборот дается выражением

$$\tilde{\Delta} J = J_1 \left(h - 2\pi\varepsilon \frac{\partial I_1}{\partial \tau}(h_*, \tau_*), \tau + 2\pi\varepsilon \frac{\partial I_1}{\partial h}(h_*, \tau_*) \right) - J_1(h, \tau). \quad (2.17)$$

Покажем, что выражения (2.16) и (2.17) отличаются на величину $O(\varepsilon^2)$. Можно сразу отбросить члены, содержащие u_2 , в выражении (2.16), так как $u_2 \sim h$, и $\Delta \varepsilon u_2 = O(\varepsilon^2)$. Нетрудно также убедиться, что

$$\varepsilon u_1 \left(h - 2\pi\varepsilon \frac{\partial I}{\partial \tau}, \tau + 2\pi\varepsilon \frac{\partial I}{\partial h} \right) = \varepsilon u_1 \left(h - 2\pi\varepsilon \frac{\partial I_1}{\partial \tau}, \tau + 2\pi\varepsilon \frac{\partial I_1}{\partial h} \right) + O(\varepsilon^2).$$

Теперь преобразуем выражение для изменения “действия” за один оборот ΔI . Рассмотрим ΔI_2 . Заметим, что

$$I_2 \left(h - 2\pi\varepsilon \frac{\partial I}{\partial \tau}, \tau + 2\pi\varepsilon \frac{\partial I}{\partial h} \right) = I_2 \left(h - 2\pi\varepsilon \frac{\partial I_1}{\partial \tau}, \tau + 2\pi\varepsilon \frac{\partial I_1}{\partial h} \right) + O(\varepsilon^3).$$

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора

$$I_2 \left(h - 2\pi\varepsilon \frac{\partial I_1}{\partial \tau}, \tau + 2\pi\varepsilon \frac{\partial I_1}{\partial h} \right) - I_2(h, \tau) = 2\pi\varepsilon \frac{\partial I_2}{\partial \tau} \Big|_{h, \tau} \frac{\partial I}{\partial h} - 2\pi\varepsilon \frac{\partial I_2}{\partial h} \Big|_{h, \tau} \frac{\partial I_1}{\partial \tau} + O(\varepsilon^2).$$

При этом не важно, в какой точке мы вычисляем производную функции $I_1(h, \tau)$. Соответствующая погрешность в ΔI_2 ограничена величиной $o(\varepsilon^2)$. Нетрудно видеть, что

$$\Delta I_1 = I_1 \left(h - 2\pi\varepsilon \frac{\partial I_1}{\partial \tau}, \tau + 2\pi\varepsilon \frac{\partial I_1}{\partial h} \right) - I_1(h, \tau) - \Delta I_2 + O(\varepsilon^2),$$

и утверждение о том, что выражения (2.16) и (2.17) отличаются на величину $O(\varepsilon^2)$, полностью доказано.

Суммируя невязку $O(\varepsilon^2)$ по всем оборотам, получаем полную погрешность $O(\varepsilon\hat{h})$. Окончательно, при $\hat{h} = \varepsilon^{2/3}$ погрешность асимптотической формулы (2.12) из-за замены (2.16) на (2.17) есть $O(\varepsilon^{5/3})$. Таким образом, получаем асимптотическую формулу (2.17) для изменения J за один оборот.

Подставим явные формулы для I_1 и u_1 в формулу (2.17). Будем проводить оценки на интервале значений $\mathcal{E}$ от ε до $\hat{h}$, на котором погрешность $O(\varepsilon^2)$ при вычислении изменения J за один оборот является удовлетворительной. В выражении для Δu_1 необходимо рассмотреть только негладкие члены. Получаем

$$\Delta \varepsilon u_1 = \frac{3}{4} A \varepsilon (\theta_0 - 2\theta_{1,0}) [(h + \varepsilon\theta_0)^{1/2} - h^{1/2}] + O(\varepsilon^2). \quad (2.18)$$

Получим теперь явную формулу для ΔI_1 :

$$\Delta I_1 = \Delta \left(\frac{1}{2\pi} S(\tau) + \frac{T_0}{2\pi} h - A h^{3/2} \right) = \frac{1}{2\pi} (h \bar{\Delta} T_0 + T_0 \bar{\Delta} h - \theta_0(\tau) \bar{\Delta} \tau) - A \Delta h^{3/2} + O(\varepsilon^2).$$

Здесь $\theta_0 = \theta(\tau, 0)$,

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} h &= -2\pi \varepsilon \frac{\partial I_1}{\partial \tau} (h_*, \tau_*) = \varepsilon \theta_0 - \varepsilon h \frac{\partial T_0}{\partial \tau} + O(\varepsilon^2), \\ \bar{\Delta} \tau &= 2\pi \varepsilon \frac{\partial I_1}{\partial h} (h_*, \tau_*) = \varepsilon (T_0 - 3\pi A (h + \varepsilon\theta_{1,0})^{1/2}) + O(\varepsilon^2), \\ \bar{\Delta} T_0 &= \varepsilon T_0 \frac{\partial T_0}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

Следовательно, получаем

$$\Delta I_1 = \frac{3}{2} A \varepsilon \theta_0 (h + \varepsilon\theta_{1,0})^{1/2} - A (h + \varepsilon\theta_0)^{3/2} + A h^{3/2} + O(\varepsilon^2). \quad (2.19)$$

Здесь $A = A(\tau)$. Для ΔJ_1 имеем

$$\begin{aligned} \Delta J_1 &= \frac{3}{4} A \varepsilon (\theta_0 - 2\theta_{1,0}) [(h + \varepsilon\theta_0)^{1/2} - h^{1/2}] \\ &\quad + \frac{3}{2} A \varepsilon \theta_0 (h + \varepsilon\theta_{1,0})^{1/2} + [-A (h + \varepsilon\theta_0)^{3/2} + A h^{3/2}] + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Это выражение справедливо на каждом обороте, начиная с оборота с номером один. Для этих оборотов $h + \varepsilon\theta_0$ не может быть меньше, чем $\text{const} \cdot \varepsilon$. На нулевом обороте (на котором происходит переход через сепаратрису) аналогичным образом можно получить выражение для изменения J . В зависимости от способа перехода через сепаратрису получаем выражение (2.9) или (2.10).

В этих формулах имеют место два источника погрешности. Первый источник – это погрешность из-за того, что мы должны с точностью $O(h)$ заменить θ_0 на θ_c , где $\theta_c = \theta_0(\tau_c)$, $\theta_{1,0}$ на θ_{1c} , где $\theta_{1c} = \theta_{1,0}(\tau_c)$, и A на A_c , где $A_c = A(\tau_c)$. Второй источник погрешности – это приближенное вычисление значения гамильтониана $\mathcal{E}$ в начале каждого оборота. На обороте с номером n в выражении (2.20) имеем $h = h_0 + \varepsilon\theta_c n + O(\varepsilon h) + O(h^2)$.

Рассмотрим формулу (2.20) и оценим полную погрешность, вызванную описанными причинами. Для формул (2.9), (2.10) рассуждения аналогичны.

Заменяем A на A_c и θ_0 на θ_c . Погрешность от такой замены $O(h)$. Следовательно, для (2.20) получаем суммарную погрешность $O(\varepsilon \hat{h}^{3/2})$, что дает $O(\varepsilon^2)$ при $\hat{h} \sim \varepsilon^{2/3}$. Теперь подставим приближенную формулу для значения гамильтониана и заменим $\theta_{1,0} \rightarrow \theta_{1c}$ в скобках. Заметим, что на первом обороте $h_0 + \varepsilon \theta_{1c}$ может быть мало. Предположим, что $h_0 + \varepsilon \theta_{1c}$ мало как $O(\varepsilon^2)$; тогда это просто еще один член погрешности, член того же порядка малости, что и погрешность замены $\varepsilon \theta_{1,0} \rightarrow \varepsilon \theta_{1c}$. Поэтому можно рассматривать второй член в (2.20) как погрешность ε^2 . Пусть теперь $h_0 + \varepsilon \theta_{1c}$ больше, чем $\text{const} \cdot \varepsilon^2$. Воспользуемся формулой Тейлора и получим погрешность $O(\varepsilon h^{3/2}) = O(\varepsilon^2)$ для каждого оборота с номером два и выше и $O(\varepsilon^2)$ для первого оборота. Рассмотрим третий член в (2.20): $A[h^{3/2} - (h + \varepsilon \theta_0)^{3/2}]$. Заменяем $A \rightarrow A_c$. Это дает погрешность $O(\varepsilon \hat{h}^{3/2}) = O(\varepsilon^2)$. Вместо $h + \varepsilon \theta_0$ можно использовать истинное значение гамильтониана после оборота. Это дает погрешность $O(\varepsilon \hat{h}^{3/2}) = O(\varepsilon^2)$. Суммирование этих членов по всем оборотам дает $h_0^{3/2} - h_{\text{final}}^{3/2}$, где h_{final} – конечное значение гамильтониана. Подставляя $h_{\text{final}} = h_0 + \varepsilon \theta_c N + O(h_{\text{final}}^2)$, зарабатываем погрешность $O(\hat{h}^{5/2}) = O(\varepsilon^{5/3})$. Это означает, что в третьем члене можно формально сделать замену $h_n \rightarrow h_0 + \varepsilon \theta_c n$. Такая замена дает суммарную погрешность $O(\varepsilon^{5/3})$. Суммируя по оборотам выражение, полученное путем описанных выше преобразований, получаем формулу (2.14).

3. Приложение

ФОРМУЛА ДЛЯ ФУНКЦИИ u В РЕЖИМЕ С ОТРАЖЕНИЯМИ. Каноническая замена переменных с производящей функцией W преобразует гамильтониан системы согласно формуле

$$H = E + \frac{\partial W}{\partial t}.$$

В случае перехода к переменным “действие-угол” (I, Φ) в системе с гамильтонианом, медленно зависящим от времени, получаем

$$H = E + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \tau} = H_0(I, \tau) + \varepsilon H_1(I, \Phi, \tau).$$

Выпишем выражение для H_1 :

$$H_1 = \frac{\partial W}{\partial \tau}, \quad W = \int_{y_0}^y p(h(I, \tau), \tau, x) dx, \quad p^2 = n^2(y, \tau) - E^2,$$

где $E = h(I, \tau) = H_0(I, \tau)$.

Заметим, что начало отсчета фазы Φ выбрано на прямой $\{y = y_0, p > 0\}$. Рассмотрим случай, когда (I, Φ) лежит на участке фазовой кривой до отражения от стенки. Тогда

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \tau} \right) dx.$$

Здесь

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \sqrt{n^2(y, \tau) - h^2} = \frac{h}{p} \frac{\partial E}{\partial \tau}.$$

Производная $\partial h / \partial \tau$ вычисляется при постоянном значении I ; следовательно,

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = - \frac{\partial I / \partial \tau}{\partial I / \partial h}.$$

Вычислим $\partial I/\partial h$:

$$\frac{\partial I}{\partial h} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial p}{\partial h} dy = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{-h}{p} dy = \frac{T}{2\pi}.$$

Найдем производную $\partial I/\partial \tau$:

$$\frac{\partial I}{\partial \tau} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial p}{\partial \tau} dy + \frac{d' \sqrt{\eta^2 - E^2}}{\pi} = -\frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial E}{\partial \tau} dt + \frac{d' \sqrt{\eta^2 - E^2}}{\pi},$$

где $\eta = n(d(\tau), \tau)$. Тогда для $\partial W/\partial \tau$ имеем

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \int_0^t \left(\left\langle \frac{\partial E}{\partial \tau} \right\rangle - \frac{\partial E}{\partial \tau} \right) dt - \frac{d' \sqrt{\eta^2 - E^2}}{\pi} \Phi, \quad \Phi \in (0, \psi),$$

где $\Phi = 2\pi t/T$, и ψ – значение фазы стенки. Угловые скобки обозначают усреднение по фазе.

Если (I, Φ) лежит на участке фазовой кривой после отражения, то нужно добавить к $\partial W/\partial \tau$ член $2d' \sqrt{\eta^2 - E^2}$:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \int_0^t \left(\left\langle \frac{\partial E}{\partial \tau} \right\rangle - \frac{\partial E}{\partial \tau} \right) dt - \frac{d' \sqrt{\eta^2 - E^2}}{\pi} (\Phi - 2\pi), \quad \Phi \in (\psi, 2\pi).$$

При замене переменных от “действия” к “улучшенному действию” по формуле $J = I + \varepsilon u$ функция u выбирается так, чтобы исключить зависимость гамильтониана от фазы Φ до членов порядка $O(\varepsilon^2)$ [5]. Значение функции u в точке $\Phi = 0$ (см. [5]) дается выражением

$$u = -\frac{1}{\omega} \langle H_1 \rangle,$$

где $\omega = \partial H_0/\partial I = 2\pi/T$. Вычисляя $\langle \partial W/\partial \tau \rangle$, находим

$$u = \frac{1}{2\pi} \oint (T/2 - t) \frac{\partial E}{\partial \tau} dt + \frac{T d' \sqrt{\eta^2 - E^2}}{2\pi^2} (\psi - \pi).$$

Авторы благодарны А. А. Васильеву за сделанные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. А. Кравцов, Ю. И. Орлов, *Геометрическая оптика неоднородных сред*, Наука, М., 1980.
- [2] В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, Эдиториал УРСС, М., 2002.
- [3] И. В. Горельшев, А. И. Нейштадт, “Об адиабатической теории возмущений для систем с упругими отражениями”, *ПММ*, **70**:1 (2006), 4–17.
- [4] А. В. Тимофеев, “К вопросу о постоянстве адиабатического инварианта при изменении характера движения”, *ЖЭТФ*, **75**:4 (1978), 1303–1308.
- [5] А. И. Нейштадт, “Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису”, *Физика плазмы*, **12**:8 (1986), 992–1000.
- [6] J. R. Cary, D. F. Escande, J. L. Tennyson, “Adiabatic-invariant change due to separatrix crossing”, *Phys. Rev. A*, **34**:5 (1986), 4256–4275.

- [7] А. И. Нейштадт, “Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису в системах с двумя степенями свободы”, *ПММ*, **51**:5 (1987), 750–757.
- [8] I. V. Gorelyshev, A. I. Neishtadt, “Jump in adiabatic invariant at a transition between modes of motion for systems with impacts”, *Nonlinearity*, **21** (2008), 661–676.
- [9] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, УРСС, М., 2006.
- [10] И. М. Лифшиц, А. А. Слущкин, В. М. Набутовский, “Об особенностях движения заряженных квазичастиц в переменном и неоднородном электромагнитном поле”, *ЖЭТФ*, **41**:3 (1961), 939–948.
- [11] В. И. Арнольд, “Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике”, *УМН*, **18**:6 (1963), 91–192.
- [12] A. I. Neishtadt, A. A. Vasiliev, “Phase change between separatrix crossings in slow-fast Hamiltonian systems”, *Nonlinearity*, **18**:3 (2005), 1393–1406.
- [13] J. R. Cary, R. T. Skodje, “Phase change between separatrix crossings”, *Phys. D*, **36**:3 (1989), 287–316.

И. В. Горелышев

Институт космических исследований РАН

E-mail: igor_gor@iki.rssi.ru

Поступило

17.12.2007

Исправленный вариант

04.02.2008

А. И. Нейштадт

Институт космических исследований РАН

Loughborough University, UK

E-mail: aneishta@iki.rssi.ru, a.neishtadt@lboro.ac.uk