Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юдин, О положительных значениях сферических гармоник и тригонометрических полиномов, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 3, 476–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm554>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:51:32

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

В. А. Юдин

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $xy = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$, $|x| = \sqrt{xx}$. Через $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ обозначим единичную сферу, а через

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{S^{n-1}} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad p \geq 1,$$

норму функции в пространстве $L_p(S^{n-1})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00787.

Если $f(x)$ принадлежит множеству H_k^n -однородных гармонических многочленов порядка k , то сужение $f(x)$ на S^{n-1} называется [1] *сферической гармоникой* $Y_k(x)$ *порядка* k . Каждой гармонике $Y_k(x)$ поставим в соответствие ее множество положительности $P(Y_k) = \{x \in S^{n-1}; Y_k(x) \geq 0\}$. Задачи односторонней аппроксимации [2] привели к вопросу нахождения Y_k с наименьшей мерой $P(Y_k)$; он содержателен лишь для четных k и $n \geq 3$. При $n = 3$ в [3] предпринята попытка нахождения точного решения. Как и ожидалось, среди всех $Y_2(x)$ наилучшая гармоника оказалась зональной $2x_3^2 - x_1^2 - x_2^2$, но уже при $k = 4$ построен пример, показывающий, что наилучшая гармоника незональна. В настоящей работе дадим порядковые оценки:

$$\text{meas } P(Y_k) \gg \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad n = 3, \quad \text{meas } P(Y_k) \gg \frac{1}{k}, \quad n = 4,$$

где под обозначением $A \ll B$ понимается неравенство $A \leq cB$ с некоторой константой c , не зависящей от A и B .

Рассмотрим аналогичный вопрос на многомерном торе $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$ для тригонометрических полиномов. Выделим два типа центрально-симметрических (относительно o) семейств поверхностей Γ , обладающих свойством: для любого действительно-значного тригонометрического полинома

$$f(x) = \sum_{\nu \in \Gamma} \hat{f}_\nu e(\nu x), \quad f_\nu = \bar{f}_{-\nu}, \quad e(\nu x) = e^{2\pi i \nu x},$$

$$\text{meas } P(f) = \text{meas}\{x \in \mathbb{T}^n: f(x) \geq 0\} \gg 1.$$

I. *Сферический случай.* Оценки снизу меры $P(Y_k)$ будем получать с помощью неравенства разных метрик

$$\|Y_k\|_\infty \leq C(n, k) \|Y_k\|_1. \quad (1)$$

Пусть $P'(Y_k) = S^{n-1} \setminus P(Y_k)$; поскольку среднее значение $Y_k(x)$ на S^{n-1} равно нулю, то

$$\|Y_k\|_1 = \int_{P(Y_k)} Y_k(x) dx - \int_{P'(Y_k)} Y_k(x) dx = 2 \int_{P(Y_k)} Y_k(x) dx.$$

Оценивая, найдем

$$\|Y_k\|_1 \leq 2 \|Y_k\|_\infty \cdot \text{meas } P(Y_k) \leq 2C(n, k) \|Y_k\|_1 \cdot \text{meas } P(Y_k),$$

откуда $\text{meas } P(Y_k) \geq (2C(n, k))^{-1}$. Таким образом, наилучшая константа в неравенстве (1) дает оценку снизу меры $P(Y_k)$.

ТЕОРЕМА 1. Для любой сферической гармоники $Y_k(x)$

$$\|Y_k\|_\infty \ll k^{1/2} \|Y_k\|_1 \quad \text{при } n = 3, \quad \|Y_k\|_\infty \ll k \|Y_k\|_1 \quad \text{при } n = 4. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку сферические гармоники разных порядков ортогональны на S^{n-1} , из формулы Лапласа [1, с. 484] найдем

$$Y_k(x) = \frac{(n+2k-2)\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{4\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{S^{n-1}} Y_k(y) [C_k(xy) - C_{k-2}(xy)] dy, \quad (3)$$

где $C_k(t)$ – многочлены Гегенбауэра [1], [4]. Оценивая правую часть (3), получим

$$\|Y_k\|_\infty \ll k \|Y_k\|_1 \cdot \max_{x, y \in S^{n-1}} |C_k(xy) - C_{k-2}(xy)| = k \|Y_k\|_1 \cdot \max_{-1 \leq t \leq 1} |C_k(t) - C_{k-2}(t)|.$$

При $n = 3$ многочлены Гегенбауэра являются [4] многочленами Лежандра. При $n = 3$ известно [4, с. 180], что для них справедливо неравенство

$$\max_{-1 \leq t \leq 1} |C_k(t) - C_{k-2}(t)| \ll \frac{1}{\sqrt{k}},$$

поэтому

$$\|Y_k\|_\infty \ll k\|Y_k\|_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \ll \sqrt{k}\|Y_k\|_1.$$

Первая часть доказана. Рассмотрим вторую часть теоремы. При $n = 4$ многочлены Гегенбауэра $\{C_k(t)\}$ суть многочлены Чебышева второго рода

$$C_k(t) = \frac{\sin(k+1)\varphi}{\sin \varphi}, \quad t = \cos \varphi.$$

Поэтому из тождества

$$C_k(t) - C_{k-2}(t) = \frac{\sin(k+1)\varphi - \sin(k-1)\varphi}{\sin \varphi} = 2 \cos k\varphi$$

вытекает неравенство

$$\max_{-1 \leq t \leq 1} |C_k(t) - C_{k-2}(t)| \leq 2,$$

откуда

$$\|Y_k\|_\infty \ll k\|Y_k\|_1.$$

Теорема доказана.

Отметим, что если в качестве Y_k рассмотреть зональную гармонику, то из оценок, проведенных в [1, с. 485], при любой размерности n вытекает неравенство $C(n, k) \gg k^{(n-2)/2}$. Таким образом, константы в (2) точны по порядку.

Известно еще одно соображение для получения оценок снизу меры $P(Y_k)$. Пусть $f(x) \in H_k^n$ и совокупность ортогональных матриц $\{T_j\}_1^q$, $\det T_j = 1$ обладает свойством

$$\frac{1}{q} \sum_{j=1}^q f(T_j x) \equiv \frac{1}{\text{meas } S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} f(u) du = 0, \quad x \in S^{n-1}. \quad (4)$$

Тогда из этого тождества нетрудно вывести неравенство

$$\text{meas } S^{n-1} \leq q \cdot \text{meas}\{x \in S^{n-1} : f(x) \geq 0\} = q \cdot \text{meas } P(Y_k).$$

Однако информация о минимальном количестве матриц со свойством (4) для больших четных k практически отсутствует.

II. Тригонометрический случай.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a^{(1)}, \dots, a^{(N)}$ — нормальные вектора граней многогранника

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : |a^{(j)} x| \leq R_j, \quad j = 1, \dots, N\}, \quad N \geq n,$$

с границей Γ . Тогда для любых положительных чисел $\{R_j\}_1^N$

$$\text{meas } P(f) \geq 2^{-N}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$(U_j f)(x) = \frac{1}{2} \left\{ f\left(x + \frac{a^{(j)}}{4R_j}\right) + f\left(x - \frac{a^{(j)}}{4R_j}\right) \right\},$$

$$(Uf)(x) = \left(\prod_{j=1}^N U_j \right) f(x).$$

Для любой гармоники $e(\nu x)$, $\nu \in \mathbb{Z}^n$, имеем

$$Ue(\nu x) = e(\nu x) \prod_{j=1}^N \cos \frac{a^{(j)} \nu \pi}{2R_j}.$$

Так как для любой целой точки $\nu \in \Gamma$ произведение обращается в нуль, то $(Uf)(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{T}^n$. С другой стороны, $(Uf)(x)$ есть линейная комбинация самое большее M , $M \leq 2^N$, сдвигов полинома $f(x)$:

$$(Uf)(x) = \sum_{j=1}^M c_j f(x - x_j),$$

с положительными коэффициентами c_j . Следовательно,

$$1 = \text{meas } \mathbb{T}^n = \text{meas}\{x \in \mathbb{T}^n : (Uf)(x) \equiv 0\} \leq \text{meas}\{x \in \mathbb{T}^n : (Uf)(x) \geq 0\}.$$

Мера множества из $\mathbb{T}^n$ не зависит от его сдвига; значит,

$$1 \leq \sum_{j=1}^M \text{meas}\{x \in \mathbb{T}^n : f(x - x^{(j)}) \geq 0\} = M \cdot \text{meas } P(f),$$

откуда вытекает (5). Теорема доказана.

В частности, если Γ – граница параллелепипеда с центром в нуле, то равномерно относительно его размеров из (5) найдем

$$\text{meas } P(f) \geq 2^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Через

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad p \geq 1,$$

обозначим норму тригонометрического полинома в пространстве $L_p(\mathbb{T}^n)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть Γ – граница строго выпуклой центрально-симметрической области $\mathcal{D}$ из $\mathbb{R}^2$. Тогда

$$\text{meas } P(f) \gg 1. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P'(f) = \mathbb{T}^n \setminus P(f)$. Поскольку среднее значение $f(x)$ на $\mathbb{T}^n$ равно нулю, то

$$\|f\|_1 = \int_{P(f)} f(x) dx - \int_{P'(f)} f(x) dx = 2 \int_{P(f)} f(x) dx.$$

По неравенству Коши–Буняковского

$$\|f\|_1 \leq 2(\text{meas } P(f))^{1/2} \|f\|_2. \quad (7)$$

В теории двойных тригонометрических рядов Фурье установлено [5], [6], что для любого тригонометрического полинома, имеющего спектр на строго выпуклой кривой (или более общо на их конечном объединении), справедливо неравенство $\|f\|_4 \ll \|f\|_2$, из которого следует уже очевидный вывод: все нормы $\|f\|_p$, $1 \leq p \leq 4$, эквивалентны; в частности, $\|f\|_2 \ll \|f\|_1$. Оценивая с его помощью правую часть (7), получим

$$\|f\|_1 \ll (\text{meas } P(f))^{1/2} \|f\|_1,$$

откуда вытекает (6). Теорема доказана.

Применим теорему к двум хорошо известным в многомерном анализе Фурье случаям:

$$\Gamma_N = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = N\}, \quad \Gamma_N = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1 x_2| = N\}.$$

Рассматриваем лишь те значения N , при которых на окружности и “гиперболическом кресте” имеются целые точки. Из (6) находим, что равномерно по N

$$\text{meas } P(f) \gg 1.$$

Отметим, что оценки, подобные (6), можно получать для любых тригонометрических полиномов, как только имеется неравенство $\|f\|_p \ll \|f\|_1$ с некоторым показателем $p > 1$. Таким свойством обладают, например, лакунарные тригонометрические полиномы. Однако наличие подобных неравенств для

$$f(x) = \sum_{\nu_1^2 + \dots + \nu_n^2 = N} f_{\nu} e(\nu x)$$

в пространствах размерности $n \geq 3$ является старым нерешенным вопросом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
2. Armitage D., Gardiner S. *Advances in multivariate approximation*. Berlin: Wiley-VCH, 1999.
3. Андреев Н. Н., Юдин В. А. Положительные значения гармонических многочленов Тр. МИАН.
4. Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физ.-мат. лит., 1962.
5. Cooke R. // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1971. V. 30. P. 547–550.
6. Алимов И. А., Ильин В. А., Никишин Е. М. // *УМН*. 1976. Т. 31. № 6. С. 28–83; // *УМН*. 1977. Т. 32. № 1. С. 107–130.

Московский энергетический институт
E-mail: yudin@vayudin.mccme.ru

Поступило
18.09.2002