Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Отображение Альбанезе поверхности Фано вещественной трехмерной M -кубики, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 3, 381–389

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5540>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 08:28:27

УДК 512.7

Отображение Альбанезе поверхности Фано вещественной трехмерной M -кубики

В. А. Краснов

Рассматривается ограничение на множество вещественных точек отображения Альбанезе поверхности Фано вещественной трехмерной M -кубики. Доказываются некоторые топологические свойства этого отображения.

Библиография: 7 названий.

1. Формулировка результатов. Далее V – комплексное алгебраическое многообразие в комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}^4$, заданное уравнением

$$P(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4) = 0, \quad (1)$$

где P – однородный многочлен третьей степени с вещественными коэффициентами, а X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 – однородные координаты в $\mathbb{P}^4$. Мы будем предполагать, что многообразие V – неособое. Через $\mathbb{R}V$ будем обозначать множество вещественных решений уравнения (1); оно всегда непустое и состоит из одной или двух компонент связности. Через $F_X = F$ будем обозначать поверхность Фано кубики V , которая параметризует множество прямых на V . Эта поверхность содержится в многообразии Грассмана прямых в $\mathbb{P}^4$. Она будет также неособым многообразием (см. [1]), определенным над полем вещественных точек, так как многочлен P с вещественными коэффициентами. Поэтому определено множество вещественных точек $\mathbb{R}F$ комплексной поверхности Фано F , параметризующее множество прямых на $\mathbb{R}V$. Это множество также всегда непустое, так как на вещественной кубике всегда имеются вещественные прямые.

На комплексных алгебраических многообразиях V, F определена инволюция комплексного сопряжения τ . Пары $(V, \tau), (F, \tau)$ будем называть *Вещественными* (с большой буквы) алгебраическими многообразиями, а множества вещественных точек $\mathbb{R}V, \mathbb{R}F$ будем называть *вещественными* (с малой буквы) алгебраическими многообразиями. Заметим, что множества вещественных точек $\mathbb{R}V, \mathbb{R}F$ совпадают со множествами неподвижных точек инволюции τ : $\mathbb{R}V = V^\tau, \mathbb{R}F = F^\tau$. Поэтому имеют место неравенства Гарнака–Смита–Тома

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^*(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2) \leq \dim_{\mathbb{F}_2} H^*(V, \mathbb{F}_2), \quad (2)$$

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^*(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2) \leq \dim_{\mathbb{F}_2} H^*(F, \mathbb{F}_2), \quad (3)$$

где $H^*(-, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_q H^q(-, \mathbb{F}_2)$ и $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ – поле из двух элементов. Напомним, что каждое из многообразий (V, τ) , (F, τ) называется M -многообразием, если соответствующее ему неравенство (2) или (3) становится равенством. В заметке [2] доказана следующая

ТЕОРЕМА 1.1. *Поверхность Фано (F, τ) будет тогда и только тогда M -поверхностью, когда кубика (V, τ) является M -многообразием.*

С другой стороны возникал вопрос о том, как устроена топологическая поверхность $\mathbb{R}F$ в случае, когда Вещественная кубика (V, τ) является M -многообразием. Конечно, аналогичный вопрос можно задать для произвольной Вещественной кубики, но первоначально мы ограничились M -кубикой, так как этот случай наиболее интересен, а добиться ответа можно с меньшими трудностями. Статья [3] была посвящена ответу на данный вопрос.

Прежде чем сформулировать соответствующую теорему, введем следующие обозначения для топологических поверхностей. Через S_g^2 обозначается связная компактная ориентируемая поверхность без края рода g , т.е. топологическая поверхность, гомеоморфная сфере с g ручкам; в частности, S_1^2 – тор, он также обозначается через T^2 . Через ${}_gS^2$ обозначается связная компактная неориентируемая поверхность без края рода g , т.е. топологическая поверхность, гомеоморфная сфере с g пленками Мебиуса, в частности, ${}_1S^2$ – вещественная проективная плоскость, она также обозначается через $\mathbb{R}P^2$. Кроме этого, если S – топологическая поверхность, а n – натуральное число, то через nS обозначается несвязная сумма n экземпляров поверхности S .

В статье [3] была доказана

ТЕОРЕМА 1.2. *Вещественная часть $\mathbb{R}F$ поверхности Фано (F, τ) неособой M -кубики (V, τ) может иметь только следующий топологический тип: ${}_5S^2 \sqcup 15T^2$.*

Зафиксируем точку $p_0 \in F$; тогда определено отображение Альбанезе $\alpha: F \rightarrow A$, где $A = (H^{1,0}(F))^*/H_1(F, \mathbb{Z})$ – многообразие Альбанезе поверхности F . Это отображение определяется равенством

$$\alpha(p) = \int_{p_0}^p \omega \mod H_1(F, \mathbb{Z}),$$

где $\omega \in H^{1,0}(F)$ – голоморфная 1-форма, а интеграл берется по кривой на поверхности F , соединяющей точку p_0 с точкой p . Такой интеграл определяет линейную форму на пространстве $H^{1,0}(F)$.

Заметим, что на многообразии Альбанезе определена антиголоморфная инволюция $t: A \rightarrow A$. Она индуцирована антилинейной инволюцией $t: H^{1,0}(F) \rightarrow H^{1,0}(F)$, определенной равенством $t(\omega) = \overline{\tau^*(\omega)}$, где $\omega \in H^{1,0}(F, \mathbb{C})$, а черта означает комплексное сопряжение. Таким образом, пара (A, t) образует Вещественное алгебраическое многообразие. Оно будет также M -многообразием, потому что поверхность Фано F является M -многообразием (см. [4]). Множество неподвижных точек A^t обозначается также через $\mathbb{R}A$ и называется множеством вещественных точек многообразия Альбанезе A . Так как $\dim H^{1,0}(F) = 5$ (см. [1]), то $\dim A = 5$, поэтому множество вещественных точек $\mathbb{R}A$ является несвязной суммой вещественных 5-мерных торов, число которых равно $2^5 = 32$ (см. [5]).

Если точка p_0 – вещественная, то отображение Альбанезе $\alpha: F \rightarrow A$ также вещественное (см. [5]), т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \downarrow \tau & & \downarrow t \\ F & \xrightarrow{\alpha} & A \end{array}$$

Поэтому получаем отображение Альбанезе вещественных точек $\alpha: \mathbb{R}F \rightarrow \mathbb{R}A$. Изучение этого отображения составляет главную задачу данной заметки. В связи с этой задачей доказывается

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть кубика (V, τ) является M -многообразием. Тогда индуцированное линейное отображение $\mathbb{F}_2$ -пространств гомологий

$$\alpha_*: H_*(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_*(\mathbb{R}A, \mathbb{F}_2)$$

имеет одномерное ядро, которое порождается элементом второго порядка группы гомологий $H_1(\mathbb{R}F, \mathbb{Z})$.

Из этой теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1.4. Пусть кубика (V, τ) является M -многообразием. Тогда справедливы утверждения:

- 1) отображение $\alpha: \mathbb{R}F \rightarrow \mathbb{R}A$ переводит разные компоненты связности топологической поверхности $\mathbb{R}F$ в разные торы группы Ли $\mathbb{R}A$;
- 2) образ каждой компоненты связности топологической поверхности $\mathbb{R}F$ при отображении $\alpha: \mathbb{R}F \rightarrow \mathbb{R}A$ не гомологичен нулю в соответствующем торе из группы Ли $\mathbb{R}A$.

Возникает вопрос, будут ли справедливы утверждения этого следствия, если рассматривать произвольную неособую кубику (V, τ) ? В этой заметке мы докажем справедливость первого утверждения. Таким образом будет доказана

ТЕОРЕМА 1.5. Отображение Альбанезе $\alpha: \mathbb{R}F \rightarrow \mathbb{R}A$ многообразия Фано трехмерной вещественной кубики переводит разные компоненты связности топологической поверхности $\mathbb{R}F$ в разные торы группы Ли $\mathbb{R}A$.

2. Доказательство результатов. Группа когомологий $H^*(F, \mathbb{Z})$ – свободная (см. [2]) и выполняются равенства (см. [1])

$$\operatorname{rk} H^1(F, \mathbb{Z}) = \operatorname{rk} H^3(F, \mathbb{Z}) = 10, \quad \operatorname{rk} H^2(F, \mathbb{Z}) = 45.$$

В работе [1] выбирается специальный базис

$$\chi, \delta, \eta_1, \dots, \eta_8$$

группы $H^1(F, \mathbb{Z})$, для которого доказываются соотношения

$$\begin{aligned} (\chi \cup \delta \cup \eta_k \cup \eta_{k+4}, [F]) &= 1, & \text{при } 1 \leq k \leq 4; \\ (\chi \cup \delta \cup \eta_k \cup \eta_l, [F]) &= 0, & \text{при } l > k, \quad l \neq k + 4; \\ (\chi \cup \eta_k \cup \eta_l \cup \eta_m, [F]) &= 0, & \text{для всех } k, l, m; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\delta \cup \eta_k \cup \eta_l \cup \eta_m, [F]) &= 0, & \text{для всех } k, l, m; \\
(\eta_k \cup \eta_{k+4} \cup \eta_l \cup \eta_{l+4}, [F]) &= 1, & \text{при } 1 \leq k < l \leq 4; \\
(\eta_p \cup \eta_q \cup \eta_r \cup \eta_s, [F]) &= 0, & \text{для всех других } p, q, r, s.
\end{aligned}$$

Кроме того, в работе [1] доказывается, что класс когомологий

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\chi \cup \delta + \sum_1^4 \eta_k \cup \eta_{k+4} \right)$$

принадлежит группе $H^2(F, \mathbb{Z})$, т.е. является целым, причем этот класс имеет следующий геометрический смысл. Пусть l – произвольная общая прямая на V ; тогда множество прямых на V , пересекающих l , – неособая кривая D_l на F . Класс когомологий, двойственный классу гомологий $[D_l] \in H_2(F, \mathbb{Z})$, оказывается равен классу ω . Из этих утверждений вытекает (см. [2])

ЛЕММА 2.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *классы когомологий*

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \omega, & \omega_2 &= \eta_1 \cup \eta_5, & \omega_3 &= \eta_2 \cup \eta_6, & \omega_4 &= \eta_3 \cup \eta_7, & \omega_5 &= \eta_4 \cup \eta_8, \\
\omega_6 &= \chi \cup \eta_1, & \omega_7 &= \chi \cup \eta_2, & \dots, & \omega_{13} &= \chi \cup \eta_8, \\
\omega_{14} &= \delta \cup \eta_1, & \omega_{15} &= \delta \cup \eta_2, & \dots, & \omega_{21} &= \delta \cup \eta_8, \\
\omega_{22} &= \eta_1 \cup \eta_2, & \omega_{23} &= \eta_1 \cup \eta_3, & \omega_{24} &= \eta_1 \cup \eta_4, \\
\omega_{25} &= \eta_1 \cup \eta_6, & \omega_{26} &= \eta_1 \cup \eta_7, & \omega_{27} &= \eta_1 \cup \eta_8, \\
\omega_{28} &= \eta_2 \cup \eta_3, & \omega_{29} &= \eta_2 \cup \eta_4, & \omega_{30} &= \eta_2 \cup \eta_5, & \omega_{31} &= \eta_2 \cup \eta_7, & \omega_{32} &= \eta_2 \cup \eta_8, \\
& \vdots \\
\omega_{43} &= \eta_6 \cup \eta_7, & \omega_{44} &= \eta_6 \cup \eta_8, \\
\omega_{45} &= \eta_7 \cup \eta_8
\end{aligned}$$

образуют базис свободной группы $H^2(F, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{45}$;

2) *классы когомологий*

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \chi \cup \delta \cup \eta_1, & \alpha_2 &= \chi \cup \delta \cup \eta_5, & \alpha_3 &= \chi \cup \eta_1 \cup \eta_5, & \alpha_4 &= \delta \cup \eta_1 \cup \eta_5, \\
\alpha_5 &= \eta_2 \cup \eta_1 \cup \eta_5, & \alpha_6 &= \eta_3 \cup \eta_1 \cup \eta_5, & \alpha_7 &= \eta_4 \cup \eta_1 \cup \eta_5, & \alpha_8 &= \eta_6 \cup \eta_1 \cup \eta_5, \\
\alpha_9 &= \eta_7 \cup \eta_1 \cup \eta_5, & \alpha_{10} &= \eta_8 \cup \eta_1 \cup \eta_5
\end{aligned}$$

образуют базис свободной группы $H^3(F, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{10}$;

3) *класс когомологий $\chi \cup \delta \cup \eta_1 \cup \eta_5$ образует базис свободной группы $H^4(F, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.*

Далее мы будем рассматривать когомологии с коэффициентами в поле $\mathbb{F}_2$. Редукцию элемента ω по модулю 2 обозначим через Ω , а через

$$h: \Lambda^k H^1(F, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^k(F, \mathbb{F}_2)$$

будем обозначать гомоморфизм заданный $\cup$ -произведением. Из леммы 2.1 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *имеет место разложение в прямую сумму*

$$H^2(F, \mathbb{F}_2) = h(\Lambda^2 H^1(F, \mathbb{F}_2)) \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \Omega;$$

2) *гомоморфизм*

$$h: \Lambda^k H^1(F, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^k(F, \mathbb{F}_2)$$

при $k = 3, 4$ является эпиморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из первого утверждения леммы 2.1 вытекает разложение в непрямую сумму

$$H^2(F, \mathbb{F}_2) = h(\Lambda^2 H^1(F, \mathbb{F}_2)) + \mathbb{F}_2 \cdot \Omega.$$

Так как размерности пространств $H^2(F, \mathbb{F}_2)$, $\Lambda^2 H^1(F, \mathbb{F}_2)$ совпадают, элемент Ω не будет принадлежать пространству $h(\Lambda^2 H^1(F, \mathbb{F}_2))$, если гомоморфизм

$$h: \Lambda^2 H^1(F, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(F, \mathbb{F}_2)$$

имеет ненулевое ядро. Заметим теперь, что выполняются равенства

$$h\left(\chi \wedge \delta + \sum_1^4 \eta_k \wedge \eta_{k+4} \bmod 2\right) = \chi \cup \delta + \sum_1^4 \eta_k \cup \eta_{k+4} \bmod 2 = 2\omega \bmod 2 = 0.$$

Первое утверждение предложения доказано, а второе утверждение вытекает из второго и третьего утверждений леммы. Предложение доказано.

Далее мы будем применять один аналог неравенства Гарнака–Смита–Тома для отображений (см. подробности в [4]). Если дан вещественный морфизм Вещественных алгебраических многообразий $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau)$, причем (Y, τ) является M -многообразием, то выполняется неравенство

$$\dim_{\mathbb{F}_2} \text{Coker}[H^*(\mathbb{R}Y, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{f^*} H^*(\mathbb{R}X, \mathbb{F}_2)] \leq \dim_{\mathbb{F}_2} \text{Coker}[H^*(Y, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{f^*} H^*(X, \mathbb{F}_2)].$$

Следовательно, в нашей ситуации выполняется неравенство

$$\dim_{\mathbb{F}_2} \text{Coker}[H^*(\mathbb{R}A, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\alpha^*} H^*(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2)] \leq \dim_{\mathbb{F}_2} \text{Coker}[H^*(A, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\alpha^*} H^*(F, \mathbb{F}_2)]. \quad (4)$$

Так как гомоморфизм

$$\alpha^*: H^1(\mathbb{R}A, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2)$$

является изоморфизмом, из предложения 2.2 вытекает, что правая часть неравенства (4) равна 1. Заметим теперь, что левая часть неравенства (4) равна

$$\dim_{\mathbb{F}_2} \text{Ker}[H_*(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\alpha_*} H_*(\mathbb{R}A, \mathbb{F}_2)].$$

Следовательно, неравенство (4) можно переписать следующим образом:

$$\dim_{\mathbb{F}_2} \text{Ker}[H_*(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\alpha_*} H_*(\mathbb{R}A, \mathbb{F}_2)] \leq 1. \quad (5)$$

Группа $H_*(\mathbb{R}F, \mathbb{Z})$ имеет единственный элемент второго порядка $c \in H_1({}_5S^2, \mathbb{Z})$. Образ этого класса гомологий при гомоморфизме редукции

$$H_1(\mathbb{R}F, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2)$$

будем также обозначать через $c \in H_1(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2)$. Тогда выполняется равенство $\alpha_*(c) = 0$, так как группа $H_1(\mathbb{R}A, \mathbb{Z})$ свободная. Следовательно, неравенство (5), на самом деле, является равенством и теорема 1.3 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1.5. Здесь мы будем применять эквивариантные когомологии пространств с инволюцией (см. определение и свойства таких когомологий в [4], [6]).

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^2(A, G; \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\alpha^*} & H^2(F, G; \mathbb{F}_2) \\ \downarrow \beta & & \downarrow \beta \\ H^0(\mathbb{R}A, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\alpha^*} & H^0(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2) \end{array} \quad (6)$$

где $G = \{1, \tau\}$ – группа второго порядка, $H^2(\cdot, G; \mathbb{F}_2)$ – эквивариантные когомологии, а гомоморфизм β устроен следующим образом. Если (X, τ) – Вещественное алгебраическое многообразие, то выполняется равенство (см. [4])

$$H^q(\mathbb{R}X, G; \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{k=0}^q H^k(\mathbb{R}X, \mathbb{F}_2).$$

Гомоморфизм

$$\beta: H^q(X, G; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^0(\mathbb{R}X, \mathbb{F}_2)$$

равен композиции гомоморфизма ограничения

$$H^q(X, G; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(\mathbb{R}X, G; \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{k=0}^q H^k(\mathbb{R}X, \mathbb{F}_2)$$

и проекции

$$\bigoplus_{k=0}^q H^k(\mathbb{R}X, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^0(\mathbb{R}X, \mathbb{F}_2).$$

Если (X, τ) – проективная неособая поверхность, то гомоморфизм

$$\beta: H^2(X, G; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^0(\mathbb{R}X, \mathbb{F}_2)$$

является эпиморфизмом (см. [6]). Поэтому правый гомоморфизм β в диаграмме (6) будет эпиморфизмом. Если бы верхний гомоморфизм α^* в диаграмме (6) был также эпиморфизмом, то из этой диаграммы вытекала бы эпиморфность нижнего гомоморфизма α^* . Но, к сожалению, верхний гомоморфизм α^* в диаграмме (6) не является эпиморфизмом. Чтобы он был эпиморфизмом, мы заменим пространство $H^2(F, G; \mathbb{F}_2)$ на факторпространство

$$\tilde{H}^2(F, G; \mathbb{F}_2) = H^2(F, G; \mathbb{F}_2) / \mathbb{F}_2 \cdot \Omega,$$

где $\Omega \in H^2(F, G; \mathbb{F}_2)$ – редукция эквивариантного класса когомологий

$$[D_l, G]^* \in H^2(F, G; \mathbb{Z}_-),$$

который получается из эквивариантного дивизора (D_l, τ) , если взять Вещественную прямую (l, τ) . Заметим, что пучок $\mathbb{Z}_-$ равен постоянному пучку $\mathbb{Z}$, на котором инволюция τ действует умножением на -1 .

При гомоморфизме ограничения

$$H^2(F, G; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(\mathbb{R}F, G; \mathbb{F}_2) = H^0(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2) \oplus H^1(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2) \oplus H^2(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2)$$

класс когомологий $\Omega = [D_l, G]^* \bmod 2$ переходит в сумму (см. [6])

$$[\mathbb{R}D_l]^* + ([\mathbb{R}D_l]^*)^2 \in H^1(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2) \oplus H^2(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2),$$

где $[\mathbb{R}D_l]^* \in H^1(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2)$ – класс когомологий, двойственный классу гомологий $[\mathbb{R}D_l] \in H_1(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2)$. Поэтому выполняется равенство $\beta(\Omega) = 0$. Следовательно, определена коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^2(A, G; \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\alpha^*} & \tilde{H}^2(F, G; \mathbb{F}_2) \\ \downarrow \beta & & \downarrow \beta \\ H^0(\mathbb{R}A, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\alpha^*} & H^0(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2), \end{array} \quad (7)$$

которая получается из коммутативной диаграммы (6). Правый гомоморфизм β в диаграмме (7) является эпиморфизмом, а мы будем доказывать, что верхний гомоморфизм α^* теперь станет эпиморфизмом.

Для эквивариантных когомологий $H^*(X, G; \mathbb{F}_2)$ Вещественного алгебраического многообразия (X, τ) определены две спектральные последовательности (см. [4]), вторая из которых имеет вид

$$II_2^{p,q}(X) = H^p(G, H^q(X, \mathbb{F}_2)) \rightarrow H^{p+q}(X, G; \mathbb{F}_2).$$

Эта спектральная последовательность для многообразия (A, τ) вырождается (см. [4]), поэтому выполняются равенства

$$\begin{aligned} II_\infty^{2,0}(A) &= H^2(G, H^0(A, \mathbb{F}_2)), & II_\infty^{1,1}(A) &= H^1(G, H^1(A, \mathbb{F}_2)), \\ II_\infty^{0,2}(A) &= H^0(G, H^2(A, \mathbb{F}_2)). \end{aligned}$$

Для многообразия (F, τ) вторая спектральная последовательность может не вырождаться, но все дифференциалы $d_2^{p,q}$ равны нулю (см. [7]). Поэтому выполняются аналогичные равенства

$$\begin{aligned} II_\infty^{2,0}(F) &= H^2(G, H^0(F, \mathbb{F}_2)), & II_\infty^{1,1}(F) &= H^1(G, H^1(F, \mathbb{F}_2)), \\ II_\infty^{0,2}(F) &= H^0(G, H^2(F, \mathbb{F}_2)). \end{aligned}$$

Так как гомоморфизм

$$\alpha^*: H^k(A, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^k(F, \mathbb{F}_2)$$

является изоморфизмом при $k = 0, 1$, то гомоморфизмы

$$\alpha^*: II_\infty^{2,0}(A) \rightarrow II_\infty^{2,0}(F), \quad \alpha^*: II_\infty^{1,1}(A) \rightarrow II_\infty^{1,1}(F)$$

также будут изоморфизмами. Исследуем теперь гомоморфизм

$$\alpha^*: II_{\infty}^{0,2}(A) \rightarrow II_{\infty}^{0,2}(F). \quad (8)$$

Так как выполняются равенства

$$II_{\infty}^{0,2}(-) = H^0(G, H^2(-, \mathbb{F}_2)) = H^2(-, \mathbb{F}_2)^G,$$

где справа стоит пространство G -инвариантов, то гомоморфизм (8) совпадает с гомоморфизмом

$$\alpha^*: H^2(A, \mathbb{F}_2)^G \rightarrow H^2(F, \mathbb{F}_2)^G.$$

Применим равенство

$$H^2(A, \mathbb{F}_2) = \Lambda^2 H^1(A, \mathbb{F}_2)$$

и первое утверждение из предложения 2.2. Тогда получим, что если отождествить пространства $H^1(A, \mathbb{F}_2)$, $H^1(F, \mathbb{F}_2)$ с помощью изоморфизма α^* , то гомоморфизм (8) совпадет с гомоморфизмом

$$h: (\Lambda^2 H^1(F, \mathbb{F}_2))^G \rightarrow (h(\Lambda^2 H^1(F, \mathbb{F}_2)))^G \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \Omega.$$

Покажем теперь, что гомоморфизм

$$h: (\Lambda^2 H^1(F, \mathbb{F}_2))^G \rightarrow (h(\Lambda^2 H^1(F, \mathbb{F}_2)))^G$$

является эпиморфизмом. Для этого элемент

$$\chi \wedge \delta + \sum_1^4 \eta_k \wedge \eta_{k+4} \bmod 2 \in \Lambda^2 H^1(F, \mathbb{F}_2)$$

обозначим через θ и рассмотрим короткую точную последовательность G -модулей

$$0 \rightarrow \mathbb{F}_2 \cdot \theta \rightarrow \Lambda^2 H^1(F, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{h} h(\Lambda^2 H^1(F, \mathbb{F}_2)) \rightarrow 0.$$

Из нее получаем точную последовательность $\mathbb{F}_2$ -пространств

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{F}_2 \cdot \theta &\rightarrow (\Lambda^2 H^1(F, \mathbb{F}_2))^G \xrightarrow{h} (h(\Lambda^2 H^1(F, \mathbb{F}_2)))^G \rightarrow \mathbb{F}_2 \cdot \theta \\ &\rightarrow (\Lambda^2 H^1(F, \mathbb{F}_2))^G / (1 + \tau^*) \Lambda^2 H^1(F, \mathbb{F}_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Нам нужно показать, что последний гомоморфизм в точной последовательности (9) не равен нулю. Отождествим пространство когомологий $H^1(F, \mathbb{F}_2)$ с пространством $H^1(A, \mathbb{F}_2)$ с помощью изоморфизма α^* . Тогда пространство $\Lambda^2 H^1(F, \mathbb{F}_2)$ совпадет с пространством $H^2(A, \mathbb{F}_2) = \Lambda^2 H^1(A, \mathbb{F}_2)$. Следовательно, можно считать, что элемент θ принадлежит пространству $H^2(A, \mathbb{F}_2)$, а нужно показать, что он не принадлежит подпространству $(1 + t^*)H^2(A, \mathbb{F}_2)$. На многообразии Альбанезе определен тета-дивизор Θ , который равен образу отображения $\alpha_2: F \times F \rightarrow A$, где $\alpha_2(p_1, p_2) = \alpha(p_1) - \alpha(p_2)$. Тогда выполняется равенство (см. [1]) $\theta = [\Theta]^* \bmod 2$. С другой стороны, в работе [7] показано (см. [7; лемма 2.2]), что класс гомологий $[\Theta] \in H_8(A, \mathbb{Z})$ не принадлежит группе $(1 + t_*)H_8(A, \mathbb{Z})$. Поэтому элемент θ не принадлежит подпространству $(1 + t^*)H^2(A, \mathbb{F}_2)$.

Таким образом, мы показали, что гомоморфизм (8) имеет одномерное коядро, порожденное элементом $\Omega = [D_l]^* \bmod 2$. Заметим теперь, что при гомоморфизме забывания вещественной структуры

$$H^2(F, G; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(F, \mathbb{F}_2)$$

эквивариантный класс когомологий $\Omega = [D_l, G]^* \bmod 2$ отображается в класс когомологий $\Omega = [D_l]^* \bmod 2$. Следовательно, наш анализ отображения вторых спектральных последовательностей показывает, что гомоморфизм

$$\alpha^*: H^2(A, G; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(F, G; \mathbb{F}_2)$$

имеет одномерное коядро, порожденное элементом Ω . Это означает, что верхний гомоморфизм α^* в коммутативной диаграмме (7) является эпиморфизмом, что и требовалось показать. Теорема 1.5 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Н. Clemens, P. A. Griffiths, “The intermediate Jacobian of the cubic threefold”, *Ann. of Math.* (2), **95**:2 (1972), 281–356.
- [2] В. А. Краснов, “О поверхности Фано вещественной трехмерной M -кубики”, *Матем. заметки*, **78**:5 (2005), 710–717.
- [3] В. А. Краснов, “Топологический тип поверхности Фано вещественной трехмерной M -кубики”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 61–94.
- [4] В. А. Краснов, “Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47**:2 (1983), 268–297.
- [5] В. А. Краснов, “Отображение Альбанезе для вещественных алгебраических многообразий”, *Матем. заметки*, **32**:3 (1982), 365–374.
- [6] В. А. Краснов, “Об эквивариантных когомологиях Гротендика вещественного алгебраического многообразия и их приложениях”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:3 (1994), 36–52.
- [7] В. А. Краснов, “Топологическая классификация поверхностей Фано трехмерных кубик”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:5 (2007), 3–36.

В. А. Краснов

Ярославский государственный университет

E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило

29.08.2007