Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Шарапудинов, Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанного ряда по полиномам Лежандра, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 3, 452–471

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5541>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:04:27

Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанного ряда по полиномам Лежандра

И. И. Шарапудинов

Оценивается порядок приближений с весом функций и их производных средними смешанного ряда по многочленам Лежандра. Основным результатом являются оценки порядка приближения функции и ее производных средними Валле-Пуссена и их производными.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Через W^r мы обозначим класс r -раз непрерывно дифференцируемых функций, заданных на $[-1, 1]$, для которых r -я производная $f^{(r)}(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\|f^{(r)}\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(r)}(x)| \leq 1. \quad (1.1)$$

Если $f \in W^r$, то мы можем определить коэффициенты Фурье–Лежандра функции $f^{(r)}(x)$ следующим образом:

$$f_{r,k} = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f^{(r)}(t) P_k(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.2)$$

где $P_k(x)$ – полином Лежандра, нормированный условием $P_k(1) = 1$. Смешанный ряд по полиномам Лежандра имеет [1]–[4] следующий вид:

$$f(x) \sim D_{2r-1}(x) + \mathcal{F}_r(x), \quad (1.3)$$

в котором

$$D_{2r-1}(x) = \sum_{l=0}^{r-1} \frac{f^{(\nu)}(-1)}{\nu!} (x+1)^\nu + \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} f_{r,k} P_k(t) dt \quad (1.4)$$

– алгебраический полином степени $2r-1$, а функция $\mathcal{F}_r(x)$ определяется равенством

$$\mathcal{F}_r(x) = \frac{(-1)^r (1-x^2)^r}{2^r} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{f_{r,k}}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x), \quad (1.5)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00143 а).

где $k^{[0]} = 1$, $k^{[r]} = k(k-1) \cdots (k-r+1)$, $(r)_0 = 1$, $(r)_s = r(r+1) \cdots (r+s-1)$, $P_k^{\alpha, \beta}(x)$ – полином Якоби. Ряды вида (1.5) в литературе часто называют *трансплантационными*, имея ввиду, что при составлении ряда коэффициенты Фурье–Лежандра $f_{r,k}$ умножаются не на соответствующий полином Лежандра $P_k(x)$, как это делается при составлении ряда Фурье–Лежандра, а на некоторый полином из другой линейно независимой или ортонормированной системы. При составлении ряда (1.5) таким полиномом является

$$Q_{k+r}(x) = \frac{(-1)^r}{2^r k^{[r]}} (1-x^2)^r P_{k-r}^{r,r}(x).$$

Из результатов, полученных в [1]–[4], в частности, вытекает, что если $f \in W^r$, то ряд (1.5) сходится равномерно относительно $x \in [-1, 1]$ и имеет место равенство

$$f(x) = D_{2r-1}(x) + \mathcal{F}_r(x). \quad (1.6)$$

Сопоставляя равенства (1.6) и (1.5), нетрудно заметить, что $D_{2r-1}(x)$ представляет собой интерполяционный полином Эрмита, интерполирующий функцию $f(x)$ и ее производные $f^{(\nu)}(x)$ при $0 \leq \nu \leq r-1$ в узлах ± 1 , т.е.

$$D_{2r-1}(x) = \frac{(1-x^2)^r}{2^r} \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{1}{\nu!} \sum_{s=0}^{r-1-\nu} \frac{(r)_s}{2^s s!} \left[\frac{f^{(\nu)}(-1)}{(1+x)^{r-\nu-s}} + \frac{(-1)^\nu f^{(\nu)}(1)}{(1-x)^{r-\nu-s}} \right]. \quad (1.4A)$$

Смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам возникли недавно в связи с задачей одновременного приближения дифференцируемой функции и ее нескольких производных. Как отмечалось в [1]–[4], частичные суммы Фурье по классическим ортогональным полиномам (исключая суммы Фурье–Эрмита) не подходят для решения этой задачи. Что же касается частичных сумм

$$\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x) = D_{2r-1}(x) + \frac{(-1)^r (1-x^2)^r}{2^r} \sum_{k=r}^{n+r} \frac{f_{r,k}}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x) \quad (1.7)$$

смешанного ряда (1.6), то в работах [1]–[5] было показано, что они успешно могут быть использованы в задаче одновременного приближения функции f и ее производных $f^{(\nu)}(x)$, $0 \leq \nu \leq r-1$. В частности, если $f \in W^r$, то из результатов, полученных в [5], непосредственно вытекает оценка

$$\frac{|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)|}{(1-x^2)^{(r-\nu)/2-1/4}} \leq \frac{c(r)}{n^{r-\nu}} \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right) [(1-x^2)^{1/4} \ln(n\sqrt{1-x^2}+1) + 1]; \quad (1.8)$$

здесь и далее $c(r), c(r, a, b), \dots$ – положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров, $n \geq 2r$, $0 \leq \nu \leq r-1$, $\omega(g, \delta)$ – модуль непрерывности функции $g \in C[-1, 1]$. Как следствие этой оценки имеем

$$\sup_{f \in W^r} \sup_{-1 < x < 1} \frac{|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)|}{(1-x^2)^{(r-\nu)/2-1/4}} \leq c(r) n^{-r+\nu} \ln n. \quad (1.9)$$

В [5] было показано, что оценка (1.9) неулучшаема по порядку при $n \rightarrow \infty$.

С другой стороны, в известных работах С. А. Теляковского [6] и И. З. Гопенгауза [7] было показано, что если $f \in W^r$, то найдутся последовательность алгебраических полиномов $\{t_n(x) = t_n(f, x)\}_{n=2r-1}^\infty$ таких, что $\deg t_n = n$, и положительная постоянная $c(r)$, для которых справедливы следующие оценки:

$$\frac{|f^{(\nu)}(x) - t_n^{(\nu)}(x)|}{(1-x^2)^{(r-\nu)/2}} \leq \frac{c(r)}{n^{r-\nu}} \omega\left(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right), \quad x \in (-1, 1), \quad 0 \leq \nu \leq r. \quad (1.10)$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\sup_{f \in W^r} \sup_{-1 < x < 1} \frac{|f^{(\nu)}(x) - t_n^{(\nu)}(f, x)|}{(1-x^2)^{(r-\nu)/2}} \leq \frac{c(r)}{n^{r-\nu}}, \quad 0 \leq \nu \leq r-1. \quad (1.11)$$

Сопоставляя оценки (1.9) и (1.11), замечаем, что полиномы $t_n(x) = t_n(f, x)$ из теоремы Теляковского–Гопенгауза обеспечивают одновременные приближения функции $f \in W^r$ и ее производных, которые в $\ln n$ раз лучше по порядку при $n \rightarrow \infty$, чем приближения функции f и ее производных, доставляемые оператором $\mathcal{Y}_{n+2r} = \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)$ и его соответствующими производными. В настоящей работе мы покажем, что вместо полиномов $t_n(x) = t_n(f, x)$, реализующих оценку (1.11), можно взять средние типа Валле–Пуссена операторов $\mathcal{Y}_{k+2r} = \mathcal{Y}_{k+2r}(f, x)$, $n \leq k \leq n+m$. Точнее, положим $N = n + m + 2r$,

$$\mathcal{Y}_N(f, x) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m} \mathcal{Y}_{k+2r}(f, x); \quad (1.12)$$

тогда если $f \in W^r$, то при $0 < a \leq m/n \leq b$ имеют место оценки (следствие 5.1 настоящей работы)

$$\frac{|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_N^{(\nu)}(x)|}{(1-x^2)^{(r-\nu)/2}} \leq \frac{c(r, a, b)}{N^{r-\nu}} \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{N}\right), \quad x \in (-1, 1), \quad 0 \leq \nu \leq r \quad (1.13)$$

и, как следствие, отсюда выводим оценки ($N = n + m + 2r \rightarrow \infty$)

$$\sup_{f \in W^r} \sup_{-1 < x < 1} \frac{|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_N^{(\nu)}(f, x)|}{(1-x^2)^{(r-\nu)/2}} \leq \frac{c(r, a, b)}{N^{r-\nu}}, \quad 0 \leq \nu \leq r-1, \quad (1.14)$$

которые при фиксированных a и b имеют место равномерно относительно $a \leq m/n \leq b$. Оценки (1.14) в сочетании с обратными теоремами теории приближений дифференцируемых функций алгебраическими полиномами дают

$$\sup_{f \in W^r} \sup_{-1 < x < 1} \frac{|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_N^{(\nu)}(f, x)|}{(1-x^2)^{(r-\nu)/2}} \asymp \frac{1}{N^{r-\nu}}, \quad 0 \leq \nu \leq r-1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Возникает естественный вопрос о том, верна ли оценка Теляковского–Гопенгауза (1.10) для средних Валле–Пуссена (1.12)? Другими словами спрашивается: справедливы или нет следующие оценки:

$$\frac{|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_N^{(\nu)}(x)|}{(1-x^2)^{(r-\nu)/2}} \leq \frac{c(r, a, b)}{N^{r-\nu}} \omega\left(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{N}\right), \quad x \in (-1, 1), \quad 0 \leq \nu \leq r?$$

В настоящей работе мы не получим ответа на этот вопрос, а ограничимся доказательством оценок (1.13).

2. Некоторые сведения о полиномах Якоби. Для удобства ссылок мы соберем здесь необходимые для дальнейшего свойства полиномов Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$, которые мы определим с помощью формулы Родрига

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{\kappa(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{ \kappa(x) \sigma^n(x) \}, \quad (2.1)$$

где α, β – произвольные действительные числа, $\kappa(x) = \kappa(x; \alpha, \beta) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $\sigma(x) = 1-x^2$. Если $\alpha, \beta > -1$, то полиномы Якоби образуют ортонормированную систему с весом $\kappa(x)$, т.е.

$$\int_{-1}^1 P_n^{\alpha,\beta}(x) P_m^{\alpha,\beta}(x) \kappa(x) dx = h_n^{\alpha,\beta} \delta_{nm}, \quad (2.2)$$

где

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}, \quad (2.3)$$

и имеет место

формула Кристоффеля-Дарбу

$$\begin{aligned} K_n^{\alpha,\beta}(x, y) &= \sum_{k=0}^n \frac{P_k^{\alpha,\beta}(x) P_k^{\alpha,\beta}(y)}{h_k^{\alpha,\beta}} \\ &= \frac{2^{-\alpha-\beta}}{2n+\alpha+\beta+2} \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \\ &\quad \times \frac{P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) P_n^{\alpha,\beta}(y) - P_n^{\alpha,\beta}(x) P_{n+1}^{\alpha,\beta}(y)}{x-y}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ниже нам понадобятся еще следующие свойства полиномов Якоби [8]:

производные

$$\frac{d}{dx} P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2} (n+\alpha+\beta+1) P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x), \quad (2.5)$$

$$\frac{d^r}{dx^r} P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_r}{2^r} P_{n-r}^{\alpha+r,\beta+r}(x), \quad (2.6)$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_\nu = a(a+1)\cdots(a+\nu-1)$, $a^{[0]} = 1$,

равенства

$$P_n^{\alpha,\beta}(t) = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+1)_k}{k! (\alpha+1)_k} \left(\frac{1-t}{2} \right)^k, \quad (2.7)$$

$$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m n^{[m]}} \frac{d^m}{dx^m} \{ (1-x)^{m+\alpha} (1+x)^{m+\beta} P_{n-m}^{m+\alpha, m+\beta}(x) \}, \quad (2.8)$$

$$P_n(x) = P_n^{0,0}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m n^{[m]}} \frac{d^m}{dx^m} \{ (1-x^2)^m P_{n-m}^{m,m}(x) \}, \quad (2.8A)$$

$$(1+x) P_n^{\alpha,\beta+1}(x) = \frac{2}{2n+\alpha+\beta+2} [(n+\beta+1) P_n^{\alpha,\beta}(x) + (n+1) P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)]; \quad (2.9)$$

симметрия

$$P_n^{\alpha,\beta}(-x) = (-1)^n P_n^{\beta,\alpha}(x); \quad (2.10)$$

веса оценка ($1 \leq x \leq 1$)

$$\sqrt{n} |P_n^{\alpha,\beta}(x)| \leq c(\alpha, \beta) \left(\sqrt{1-x} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\sqrt{1+x} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta-1/2}; \quad (2.11)$$

здесь и всюду в дальнейшем $c(\alpha)$, $c(\alpha, \beta)$, $c(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$ означают положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров, вообще говоря, различные в разных местах;

оценка интеграла, содержащего полином Якоби,

$$\int_0^1 (1-x)^\gamma |P_n^{\alpha,\beta}(x)| dx \asymp \begin{cases} n^{\alpha-2\gamma-2}, & 2\gamma < \alpha - 3/2, \\ n^{-1/2} \ln n, & 2\gamma = \alpha - 3/2, \\ n^{-1/2}, & 2\gamma > \alpha - 3/2; \end{cases} \quad (2.12)$$

рекуррентная формула

$$P_{-1}^{\alpha,\beta}(x) = 0, \quad P_0^{\alpha,\beta}(x) = 1, \quad P_1^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

$$\begin{aligned} & 2n(n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)P_n^{\alpha,\beta}(x) \\ &= (2n + \alpha + \beta - 1)\{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)x + \alpha^2 - \beta^2\}P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) \\ & \quad - 2(n + \alpha - 1)(n + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)P_{n-2}^{\alpha,\beta}(x), \quad n = 2, 3, 4, \dots; \end{aligned} \quad (2.13)$$

асимптотическая формула

$$P_n^{\alpha,\beta}(\cos \theta) = n^{-1/2} k(\theta) \left\{ \cos(\lambda\theta + \gamma) + \frac{r_n(\theta)}{n \sin \theta} \right\}, \quad (2.14)$$

где α, β – произвольные действительные числа,

$$\begin{aligned} k(\theta) &= \pi^{-1/2} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{-\beta-1/2}, \\ \lambda &= n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, \quad \gamma = -\left(\frac{\alpha + 1}{2} \right) \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

а для остаточного члена $r_n(\theta) = r_n(\theta; \alpha, \beta)$ имеет место оценка

$$|r_n(\theta)| \leq c(\alpha, \beta, \delta), \quad 0 < \frac{\delta}{n} \leq \theta \leq \pi - \frac{\delta}{n}. \quad (2.15)$$

3. Некоторые вспомогательные утверждения. Имеет место следующая

ЛЕММА 3.1. Пусть $\alpha > -1$; тогда

$$(x-t) \sum_{k=0}^{j-1} (k + \alpha + 1) P_k^{\alpha+1, \alpha}(x) P_k^{\alpha, \alpha+1}(t) = H + S_1 + S_2,$$

где

$$\begin{aligned} H &= \frac{j(j+2\alpha+1)}{2j+2\alpha+1} [P_j^{\alpha+1,\alpha}(x)P_{j-1}^{\alpha,\alpha+1}(t) - P_j^{\alpha,\alpha+1}(t)P_{j-1}^{\alpha+1,\alpha}(x)], \\ S_1 &= -\sum_{k=0}^{j-1} \frac{2(2\alpha+1)(k+\alpha+1)}{(2k+2\alpha+3)(2k+2\alpha+1)} P_k^{\alpha+1,\alpha}(x)P_k^{\alpha,\alpha+1}(t), \\ S_2 &= \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\alpha(\alpha+1)}{(2k+2\alpha+1)} [P_{k-1}^{\alpha+1,\alpha}(x)P_k^{\alpha,\alpha+1}(t) - P_{k-1}^{\alpha,\alpha+1}(t)P_k^{\alpha+1,\alpha}(x)]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем формулу (2.13) следующим образом ($k \geq 2$):

$$\begin{aligned} &\frac{2k(k+\alpha+\beta)}{2k+\alpha+\beta} P_k^{\alpha,\beta}(x) + \frac{2(k+\alpha-1)(k+\beta-1)}{2k+\alpha+\beta-2} P_{k-2}^{\alpha,\beta}(x) \\ &= (2k+\alpha+\beta-1) \left\{ x + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(2k+\alpha+\beta)(2k+\alpha+\beta-2)} \right\} P_{k-1}^{\alpha,\beta}(x), \end{aligned} \quad (3.1)$$

но поскольку $(k+\alpha-1)(k+\beta-1) = (k-1)(k-1+\alpha+\beta) + \alpha\beta$, то из (3.1) имеем

$$\begin{aligned} &\frac{2k(k+\alpha+\beta)}{2k+\alpha+\beta} P_k^{\alpha,\beta}(x) + \frac{2(k-1)(k-1+\alpha+\beta)}{2(k-1)+\alpha+\beta} P_{k-2}^{\alpha,\beta}(x) \\ &= (2k+\alpha+\beta-1) \left\{ x + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(2k+\alpha+\beta)(2k+\alpha+\beta-2)} \right\} P_{k-1}^{\alpha,\beta}(x) \\ &\quad - \frac{2\alpha\beta}{2k+\alpha+\beta-2} P_{k-2}^{\alpha,\beta}(x). \end{aligned}$$

Заменяя α на $\alpha+1$, а β на α , получим

$$\begin{aligned} &\frac{2k(k+2\alpha+1)}{2k+2\alpha+1} P_k^{\alpha+1,\alpha}(x) + \frac{2(k-1)(k+2\alpha)}{2(k-1)+2\alpha+1} P_{k-2}^{\alpha+1,\alpha}(x) \\ &= 2(k+\alpha) \left\{ x + \frac{2\alpha+1}{(2k+2\alpha+1)(2k+2\alpha-1)} \right\} P_{k-1}^{\alpha+1,\alpha}(x) \\ &\quad - \frac{2\alpha(\alpha+1)}{2k+2\alpha-1} P_{k-2}^{\alpha+1,\alpha}(x). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} &\frac{2k(k+2\alpha+1)}{2k+2\alpha+1} P_k^{\alpha,\alpha+1}(t) + \frac{2(k-1)(k+2\alpha)}{2(k-1)+2\alpha+1} P_{k-2}^{\alpha,\alpha+1}(t) \\ &= 2(k+\alpha) \left\{ t - \frac{2\alpha+1}{(2k+2\alpha+1)(2k+2\alpha-1)} \right\} P_{k-1}^{\alpha,\alpha+1}(t) \\ &\quad - \frac{2\alpha(\alpha+1)}{2k+2\alpha-1} P_{k-2}^{\alpha,\alpha+1}(t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Теперь вычтем (3.3), умноженный на $P_{k-1}^{\alpha+1,\alpha}(x)$, из (3.2), умноженного на $P_{k-1}^{\alpha,\alpha+1}(t)$; тогда при $k \geq 2$ получим

$$\begin{aligned} & \frac{2k(k+2\alpha+1)}{2k+2\alpha+1} [P_k^{\alpha+1,\alpha}(x)P_{k-1}^{\alpha,\alpha+1}(t) - P_k^{\alpha,\alpha+1}(t)P_{k-1}^{\alpha+1,\alpha}(x)] \\ & - \frac{2(k-1)(k+2\alpha)}{2(k-1)+2\alpha+1} [P_{k-1}^{\alpha+1,\alpha}(x)P_{k-2}^{\alpha,\alpha+1}(t) - P_{k-1}^{\alpha,\alpha+1}(t)P_{k-2}^{\alpha+1,\alpha}(x)] \\ & = 2(k+\alpha) \left\{ (x-t) + \frac{2(2\alpha+1)}{(2k+2\alpha+1)(2k+2\alpha-1)} \right\} P_{k-1}^{\alpha+1,\alpha}(x)P_{k-1}^{\alpha,\alpha+1}(t) \\ & + \frac{2\alpha(\alpha+1)}{2k+2\alpha-1} [P_{k-1}^{\alpha+1,\alpha}(x)P_{k-2}^{\alpha,\alpha+1}(t) - P_{k-1}^{\alpha,\alpha+1}(t)P_{k-2}^{\alpha+1,\alpha}(x)]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Кроме того, при $k=1$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{2(2\alpha+2)}{2\alpha+3} [P_1^{\alpha+1,\alpha}(x)P_0^{\alpha,\alpha+1}(t) - P_1^{\alpha,\alpha+1}(t)P_0^{\alpha+1,\alpha}(x)] \\ & = 2(1+\alpha) \left\{ x-t + \frac{2}{2\alpha+3} \right\} P_0^{\alpha+1,\alpha}(x)P_0^{\alpha,\alpha+1}(t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Суммируя правые и левые части равенства (3.4) от $k=2$ до $k=j$ и учитывая при $k=1$ равенство (3.5), убеждаемся в справедливости леммы 3.1.

ЛЕММА 3.2. *Имеет место разложение $(x \neq t)$*

$$\begin{aligned} K_k^{\alpha,\alpha}(x,t) = & -\frac{(k+\alpha+1)(1-x)(1+t)}{2^{2\alpha+1}(x-t)} P_k^{\alpha+1,\alpha}(x)P_k^{\alpha,\alpha+1}(t) \\ & + \frac{h_k^1}{x-t} P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(x)P_k^{\alpha,\alpha}(t) + \frac{h_k^2}{x-t} P_k^{\alpha,\alpha}(x)P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(t) + \frac{h_k^3}{x-t} P_k^{\alpha,\alpha}(x)P_k^{\alpha,\alpha}(t) \\ & + \frac{h_k^4}{x-t} P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(x)P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(t) + \delta_k \frac{(1-x)(1-t)}{x-t} P_k^{\alpha+1,\alpha}(x)P_k^{\alpha,\alpha+1}(t) \\ & - \frac{(k+2+\alpha)P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(x)P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(t) - (k+1+\alpha)P_k^{\alpha,\alpha}(x)P_k^{\alpha,\alpha}(t)}{2^{2\alpha+1}(x-t)}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $h_k^i = O(1)$, $\delta_k = O(1)$, $k \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формулы Стирлинга имеем

$$\frac{2^{-2\alpha}\Gamma(k+2)\Gamma(k+2\alpha+2)}{(2k+2\alpha+2)\Gamma^2(k+\alpha+1)} = 2^{-2\alpha-1}(k+\alpha+1) + r_k,$$

где $r_k = O(1)$, поэтому, полагая

$$R_k = r_k \frac{P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(x)P_k^{\alpha,\alpha}(t) - P_k^{\alpha,\alpha}(x)P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(t)}{x-t}, \quad x \neq t, \quad (3.7)$$

из (2.4) находим

$$\begin{aligned}
 K_k^{\alpha,\alpha}(x, t) &= \frac{k + \alpha + 1}{2^{2\alpha+1}} \frac{P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(x)P_k^{\alpha,\alpha}(t) - P_k^{\alpha,\alpha}(x)P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(t)}{x - t} + R_k \\
 &= \frac{k + \alpha + 1}{2^{2\alpha+1}} \left[\frac{P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(x)P_k^{\alpha,\alpha}(t) - P_k^{\alpha,\alpha}(x)P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(t)}{x - t} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(x)P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(t) - P_k^{\alpha,\alpha}(x)P_k^{\alpha,\alpha}(t)}{x - t} \right] \\
 &= -\frac{k + \alpha + 1}{2^{2\alpha+1}} \frac{P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(x)P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(t) - P_k^{\alpha,\alpha}(x)P_k^{\alpha,\alpha}(t)}{x - t} + R_k \\
 &= \frac{k + \alpha + 1}{2^{2\alpha+1}} \frac{[P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(x) - P_k^{\alpha,\alpha}(x)][P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(t) + P_k^{\alpha,\alpha}(t)]}{x - t} \\
 &\quad - \frac{(k + 2 + \alpha)P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(x)P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(t) - (k + 1 + \alpha)P_k^{\alpha,\alpha}(x)P_k^{\alpha,\alpha}(t)}{2^{2\alpha+1}(x - t)} \\
 &\quad + \frac{P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(x)P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(t)}{2^{2\alpha+1}(x - t)} + R_k.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 &[P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(x) - P_k^{\alpha,\alpha}(x)][P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(t) + P_k^{\alpha,\alpha}(t)] \\
 &= \left[P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(x) - \frac{k + \alpha + 1}{k + 1} P_k^{\alpha,\alpha}(x) + \frac{\alpha}{k + 1} P_k^{\alpha,\alpha}(x) \right] \\
 &\quad \times \left[P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(t) + \frac{k + \alpha + 1}{k + 1} P_k^{\alpha,\alpha}(t) - \frac{\alpha}{k + 1} P_k^{\alpha,\alpha}(t) \right] \\
 &= \left[P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(x) - \frac{k + \alpha + 1}{k + 1} P_k^{\alpha,\alpha}(x) \right] \left[P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(t) + \frac{k + \alpha + 1}{k + 1} P_k^{\alpha,\alpha}(t) \right] \\
 &\quad - \frac{\alpha}{k + 1} P_k^{\alpha,\alpha}(x) \left[P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(x) - \frac{k + \alpha + 1}{k + 1} P_k^{\alpha,\alpha}(x) \right] \\
 &\quad + \frac{\alpha}{k + 1} P_k^{\alpha,\alpha}(x) [P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(t) + P_k^{\alpha,\alpha}(t)].
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Кроме того, воспользовавшись равенствами (2.9) и (2.10), можем записать

$$\begin{aligned}
 &\left[P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(x) - \frac{k + \alpha + 1}{k + 1} P_k^{\alpha,\alpha}(x) \right] \left[P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(t) + \frac{k + \alpha + 1}{k + 1} P_k^{\alpha,\alpha}(t) \right] \\
 &= -\left(\frac{k + \alpha + 1}{k + 1} \right)^2 (1 - x)(1 + t) P_k^{\alpha+1,\alpha}(x) P_k^{\alpha,\alpha+1}(t) \\
 &= -(1 - x)(1 + t) P_k^{\alpha+1,\alpha}(x) P_k^{\alpha,\alpha+1}(t) + s_k (1 - x)(1 + t) P_k^{\alpha+1,\alpha}(x) P_k^{\alpha,\alpha+1}(t),
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $s_k = O(1/(k+1))$. Сопоставляя (3.7)–(3.10), приходим к утверждению леммы 3.2.

Положим

$$V_{n+m}^{\alpha}(x, t) = \frac{1}{m + 1} \sum_{k=n}^{n+m} K_k^{\alpha,\alpha}(x, t). \tag{3.11}$$

ЛЕММА 3.3. *Имеет место следующее представление:*

$$V_{n+m}^{\alpha}(x, t) = \sum_{\nu=0}^6 S^{\nu}(x, t), \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} S^0(x, t) &= -\frac{(1-x)(1+t)}{2^{2\alpha+1}(x-t)(m+1)} \sum_{k=n}^{n+m} (k+\alpha+1) P_k^{\alpha+1, \alpha}(x) P_k^{\alpha, \alpha+1}(t), \\ S^1(x, t) &= \frac{1}{(x-t)(m+1)} \sum_{k=n}^{n+m} h_k^1 P_{k+1}^{\alpha, \alpha}(x) P_k^{\alpha, \alpha}(t), \\ S^2(x, t) &= \frac{1}{(x-t)(m+1)} \sum_{k=n}^{n+m} h_k^2 P_k^{\alpha, \alpha}(x) P_{k+1}^{\alpha, \alpha}(t), \\ S^3(x, t) &= \frac{1}{(x-t)(m+1)} \sum_{k=n}^{n+m} h_k^3 P_k^{\alpha, \alpha}(x) P_k^{\alpha, \alpha}(t), \\ S^4(x, t) &= \frac{1}{(x-t)(m+1)} \sum_{k=n}^{n+m} h_k^4 P_{k+1}^{\alpha, \alpha}(x) P_{k+1}^{\alpha, \alpha}(t), \\ S^5(x, t) &= \frac{(1-x)(1+t)}{(x-t)(m+1)} \sum_{k=n}^{n+m} \delta_k P_k^{\alpha+1, \alpha}(x) P_k^{\alpha, \alpha+1}(t), \\ S^6(x, t) &= -\frac{(n+m+\alpha+2) P_{n+m+1}^{\alpha, \alpha}(x) P_{n+m+1}^{\alpha, \alpha}(t) - (n+\alpha+1) P_n^{\alpha, \alpha}(x) P_n^{\alpha, \alpha}(t)}{2^{2\alpha+1}(m+1)(x-t)}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где h_k^i и δ_k имеют тот же смысл, что и в лемме 3.2.

Утверждение этой леммы непосредственно следует из леммы 3.2.

ЛЕММА 3.4. *Имеет место равенство*

$$S^0(x, t) = \sum_{\nu=1}^5 S_{\nu}^0(x, t), \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} S_1^0(x, t) &= \frac{(1-x)^2(1+t)}{2^{2\alpha+1}(m+1)(x-t)^2} \\ &\quad \times [(n+m+2+2\alpha) P_{n+m}^{\alpha+2, \alpha}(x) P_{n+m}^{\alpha, \alpha+1}(t) \\ &\quad - (n+1+2\alpha) P_{n-1}^{\alpha+2, \alpha}(x) P_{n-1}^{\alpha, \alpha+1}(t)], \\ S_2^0(x, t) &= -\frac{(1-x)(1-t)(1+t)}{2^{2\alpha+1}(m+1)(x-t)^2} \\ &\quad \times [(n+m+2+2\alpha) P_{n+m}^{\alpha+1, \alpha+1}(t) P_{n+m}^{\alpha+1, \alpha}(x) \\ &\quad - (n+1+2\alpha) P_{n-1}^{\alpha+1, \alpha+1}(t) P_{n-1}^{\alpha+1, \alpha}(x)], \\ S_3^0(x, t) &= -\frac{(1-x)(1+t)}{2^{2\alpha+1}(m+1)(x-t)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[\frac{n+m+2+2\alpha}{2(n+m+1)+2\alpha+1} P_{n+m}^{\alpha+1,\alpha}(x) P_{n+m}^{\alpha,\alpha+1}(t) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{n+1+2\alpha}{2n+2\alpha+1} P_{n-1}^{\alpha+1,\alpha}(x) P_{n-1}^{\alpha,\alpha+1}(t) \right], \\
 S_4^0(x, t) &= \frac{(1-x)(1+t)}{2^{2\alpha}(m+1)(x-t)^2} \sum_{k=n}^{n+m} \frac{(2\alpha+1)(k+\alpha+1)}{(2k+2\alpha+3)(2k+2\alpha+1)} P_k^{\alpha+1,\alpha}(x) P_k^{\alpha,\alpha+1}(t), \\
 S_5^0(x, t) &= \frac{(1-x)(1+t)}{2^{2\alpha+1}(m+1)(x-t)^2} \\
 & \quad \times \sum_{k=n}^{n+m} \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k+2\alpha+1} [P_{k-1}^{\alpha+1,\alpha}(x) P_k^{\alpha,\alpha+1}(t) - P_k^{\alpha+1,\alpha}(x) P_{k-1}^{\alpha,\alpha+1}(t)].
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3.1 имеем

$$\begin{aligned}
 (x-t) \sum_{k=n}^{n+m} (k+\alpha+1) P_k^{\alpha,\alpha+1}(t) P_k^{\alpha+1,\alpha}(x) \\
 &= \frac{(n+m+1)(n+m+2\alpha+2)}{2(n+m+1)+2\alpha+1} [P_{n+m+1}^{\alpha+1,\alpha}(x) P_{n+m}^{\alpha,\alpha+1}(t) - P_{n+m+1}^{\alpha,\alpha+1}(t) P_{n+m}^{\alpha+1,\alpha}(x)] \\
 & \quad - \frac{n(n+1+2\alpha)}{2n+2\alpha+1} [P_n^{\alpha+1,\alpha}(x) P_{n-1}^{\alpha,\alpha+1}(t) - P_n^{\alpha,\alpha+1}(t) P_{n-1}^{\alpha+1,\alpha}(x)] \\
 & \quad - \sum_{k=n}^{n+m} \frac{2(2\alpha+1)(k+\alpha+1)}{(2k+2\alpha+3)(2k+2\alpha+1)} P_k^{\alpha+1,\alpha}(x) P_k^{\alpha,\alpha+1}(t) \\
 & \quad + \sum_{k=n}^{n+m} \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k+2\alpha+1} [P_{k-1}^{\alpha+1,\alpha}(x) P_k^{\alpha,\alpha+1}(t) - P_{k-1}^{\alpha,\alpha+1}(t) P_k^{\alpha+1,\alpha}(x)]. \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу (2.9) и (2.10)

$$\begin{aligned}
 & \frac{j(j+\alpha+\beta+1)}{2j+\alpha+\beta+1} [P_j^{\alpha+1,\beta}(x) P_{j-1}^{\alpha,\beta+1}(t) - P_j^{\alpha,\beta+1}(t) P_{j-1}^{\alpha+1,\beta}(x)] \\
 &= \frac{1}{2} (j+\alpha+\beta+1) [(1-t) P_{j-1}^{\alpha+1,\beta+1}(t) P_{j-1}^{\alpha+1,\beta}(x) - (1-x) P_{j-1}^{\alpha+2,\beta}(x) P_{j-1}^{\alpha,\beta+1}(t)] \\
 & \quad + \frac{j+\alpha+\beta+1}{2j+\alpha+\beta+1} P_{j-1}^{\alpha+1,\beta}(x) P_{j-1}^{\alpha,\beta+1}(t). \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Из (3.15) и (3.16) находим

$$\begin{aligned}
 (x-t) \sum_{k=n}^{n+m} (k+\alpha+1) P_k^{\alpha,\alpha+1}(t) P_k^{\alpha+1,\alpha}(x) \\
 &= \frac{n+m+2+2\alpha}{2(x-t)} [(1-t) P_{n+m}^{\alpha+1,\alpha+1}(t) P_{n+m}^{\alpha+1,\alpha}(x) - (1-x) P_{n+m}^{\alpha+2,\alpha}(x) P_{n+m}^{\alpha,\alpha+1}(t)] \\
 & \quad - \frac{n+1+2\alpha}{2(x-t)} [(1-t) P_{n-1}^{\alpha+1,\alpha+1}(t) P_{n-1}^{\alpha+1,\alpha}(x) - (1-x) P_{n-1}^{\alpha+2,\alpha}(x) P_{n-1}^{\alpha,\alpha+1}(t)] \\
 & \quad + \frac{n+m+2\alpha+2}{(2(n+m+1)+2\alpha+1)(x-t)} P_{n+m}^{\alpha+1,\alpha}(x) P_{n+n}^{\alpha,\alpha+1}(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{n+2\alpha+1}{(2n+2\alpha+1)(x-t)} P_{n-1}^{\alpha+1,\alpha}(x) P_{n-1}^{\alpha,\alpha+1}(t) \\
& - \sum_{k=n}^{n+m} \frac{2(2\alpha+1)(k+\alpha+1)}{(2k+2\alpha+3)(2k+2\alpha+1)} P_k^{\alpha+1,\alpha}(x) P_k^{\alpha,\alpha+1}(t) \\
& + \sum_{k=n}^{n+m} \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k+2\alpha+1} [P_{k-1}^{\alpha+1,\alpha}(x) P_k^{\alpha,\alpha+1}(t) - P_{k-1}^{\alpha,\alpha+1}(t) P_k^{\alpha+1,\alpha}(x)]. \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Сопоставляя (3.13) и (3.17), убеждаемся в справедливости леммы 3.4.

Введем следующий интеграл:

$$J_{n+m}^{\alpha}(x) = \int_{-1}^1 |V_{n+m}^{\alpha}(x, t)|(1-t^2)^{\alpha/2} dt, \quad (3.18)$$

где $V_{n+m}^{\alpha}(x, t)$ определяется равенством (3.11), и исследуем его поведение при $\alpha \geq 0$, $0 < a \leq m/n \leq b$, $-1 \leq x \leq 1$. С этой целью мы рассмотрим два случая:

- 1) $x \in [0, 1 - 4/n^2]$;
- 2) $x \in [1 - 4/n^2, 1]$.

Случай же $x \in [-1, 0]$ сводится к случаю $x \in [0, 1]$ в силу равенства $J_{n+m}^{\alpha}(-x) = J_{n+m}^{\alpha}(x)$, вытекающего из (2.10), (3.11) и (3.18). Итак, пусть сначала $x \in [0, 1 - 4/n^2]$. Положим

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \left[-1, -\frac{1}{2}\right], & \Delta_2 &= \left[-\frac{1}{2}, x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right], \\
\Delta_3 &= \left[x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right], & \Delta_4 &= \left[x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, 1\right]
\end{aligned}$$

и представим интеграл (3.18) по следующей схеме:

$$\int_{-1}^1 = \int_{\Delta_1} + \int_{\Delta_2} + \int_{\Delta_3} + \int_{\Delta_4} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \quad (3.19)$$

Оценим интегралы $\int_{\Delta_i}$, $1 \leq i \leq 4$. Для оценки интегралов $\int_{\Delta_i}$, $i = 1, 2, 4$, воспользуемся леммами 3.3 и 3.4. Имеем ($i \neq 3$)

$$\begin{aligned}
I_i &= \int_{\Delta_i} |V_{n+n}^{\alpha}(x, t)|(1-t^2)^{\alpha/2} dt \\
&\leq \sum_{\nu=1}^6 \int_{\Delta_i} |S^{\nu}(x, t)|(1-t^2)^{\alpha/2} dt + \sum_{\mu=1}^5 \int_{\Delta_i} |S_{\mu}^0(x, t)|(1-t^2)^{\alpha/2} dt. \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Если $t \in \Delta_1$, $1 - 4/n^2 \geq x \geq 0$, то $x - t \geq 1/2$. Поэтому в силу (2.10) и (2.11) имеем ($h_k^{\nu} = O(1)$, $\delta_k = O(1)$)

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta_1} |S^{\nu}(x, t)|(1-t^2)^{\alpha/2} dt &\leq \frac{c(\alpha)}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m+1} \frac{(1-x)^{-\alpha/2-1/4}}{\sqrt{k}} \int_{\Delta_1} |P_k^{\alpha,\alpha}(t)|(1+t)^{\alpha/2} dt \\
&\leq \frac{c(\alpha)(1-x^2)^{-\alpha/2-1/4}}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m+1} k^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq c(\alpha, a, b)n^{-1}(1-x^2)^{-\alpha/2-1/4} \\ &\leq c(\alpha, a, b)(1-x^2)^{-\alpha/2}, \quad 1 \leq \nu \leq 4, \end{aligned} \quad (3.21)$$

и по аналогичной причине

$$\int_{\Delta_1} |S^\nu(x, t)|(1-t^2)^{\alpha/2} dt \leq c(\alpha, a, b)(1-x^2)^{-\alpha/2}, \quad \nu = 5, 6. \quad (3.22)$$

Далее, применяя те же рассуждения и имея ввиду лемму 3.4, получаем

$$\int_{\Delta_1} |S_\mu^0(x, t)|(1-t^2)^{\alpha/2} dt \leq c(\alpha, a, b)(1-x^2)^{-\alpha/2}, \quad 1 \leq \mu \leq 5. \quad (3.23)$$

Сопоставляя (3.20)–(3.23), находим $(0 \leq x \leq 1 - 4/n^2)$

$$I_1 \leq c(\alpha, a, b)(1-x^2)^{-\alpha/2}. \quad (3.24)$$

Перейдем к оценке I_2 . С этой целью заметим, что при $1 \leq \nu \leq 4$ (см. (2.11))

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_2} |S^\nu(x, t)|(1-t^2)^{\alpha/2} dt &\leq \frac{c(\alpha)}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m} \frac{(1-x)^{-\alpha/2-1/4}}{k} \int_{\Delta_2} \frac{(1-t)^{-1/4}}{x-t} dt \\ &\leq \frac{c(\alpha, a, b)}{n} (1-x)^{-\alpha/2-1/4} \int_{\Delta_2} (x-t)^{-5/4} dt \\ &\leq \frac{c(\alpha, a, b)}{n} (1-x)^{-\alpha/2-1/4} \left(\frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \right)^{1/4} \\ &= \frac{c(\alpha, a, b)}{n^{3/4}} (1-x)^{-\alpha/2-3/8} \leq c(\alpha, a, b)(1-x)^{-\alpha/2}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_2} |S^5(x, t)|(1-t^2)^{\alpha/2} dt &\leq c(\alpha) \frac{(1-x)^{-\alpha/2+1/4}}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k} \int_{\Delta_2} \frac{(1-t)^{-1/4}}{x-t} dt \\ &\leq \frac{c(\alpha, a, b)}{n} (1-x)^{-\alpha/2+1/4} \left(\frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \right)^{1/4} \\ &\leq \frac{c(\alpha, a, b)}{n^{3/4}} (1-x)^{-\alpha/2+1/8} \leq c(\alpha, a, b)(1-x)^{-\alpha/2}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\int_{\Delta_2} |S^6(x, t)|(1-t^2)^{\alpha/2} dt \leq c(\alpha, a, b)(1-x)^{-\alpha/2}. \quad (3.27)$$

Далее,

$$\begin{aligned} &\int_{\Delta_2} |S_1^0(x, t)|(1-t^2)^{\alpha/2} dt \\ &\leq c(\alpha, a, b)(1-x)^{-\alpha/2-5/4} \frac{(1-x)^2}{m+1} \int_{\Delta_2} \frac{(1-t)^{-1/4}}{(x-t)^2} dt \\ &\leq \frac{c(\alpha, a, b)}{n} (1-x)^{-\alpha/2+3/4} \int_{\Delta_2} \frac{(1-t)^{-1/4}}{(x-t)^2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{c(\alpha, a, b)}{n} (1-x)^{-\alpha/2+1/2} \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \\
&\leq c(\alpha, a, b) (1-x^2)^{-\alpha/2},
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Delta_2} |S_2^0(x, t)| (1-t^2)^{\alpha/2} dt \\
&\leq c(\alpha, a, b) (1-x)^{-\alpha/2+1/4} \frac{1}{n} \int_{\Delta_2} \frac{(1-t)^{1/4}}{(x-t)^2} dt \\
&= c(\alpha, a, b) (1-x)^{-\alpha/2+1/4} \frac{1}{n} \int_{\Delta_2} \frac{(1-x+x-t)^{1/4}}{(x-t)^2} dt \\
&\leq c(\alpha, a, b) \frac{1}{n} (1-x)^{-\alpha/2+1/4} \left(\int_{\Delta_2} \frac{(1-x)^{1/4} dt}{(x-t)^2} + \int_{\Delta_2} (x-t)^{-2+1/4} dt \right) \\
&\leq c(\alpha, a, b) \frac{1}{n} (1-x)^{-\alpha/2+1/4} \left(\frac{(1-x)^{1/4} n}{\sqrt{1-x^2}} + \left(\frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \right)^{3/4} \right) \\
&\leq c(\alpha, a, b) (1-x^2)^{-\alpha/2},
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Delta_2} |S_3^0(x, t)| (1-t^2)^{\alpha/2} dt \\
&\leq c(\alpha, a, b) (1-x)^{-\alpha/2+1/4} \frac{1}{n^2} \int_{\Delta_2} \frac{(1-t)^{-1/4}}{(x-t)^2} dt \\
&\leq c(\alpha, a, b) (1-x)^{-\alpha/2+1/4} \frac{1}{n^2} \int_{\Delta_2} \frac{(1-x)^{-1/4}}{(x-t)^2} dt \\
&\leq c(\alpha, a, b) \frac{1}{n^2} (1-x)^{-\alpha/2} \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \leq c(\alpha, a, b) (1-x^2)^{-\alpha/2};
\end{aligned} \tag{3.30}$$

аналогично,

$$\int_{\Delta_2} |S_\nu^0(x, t)| (1-t^2)^{\alpha/2} dt \leq c(\alpha, a, b) (1-x^2)^{-\alpha/2}, \quad \nu \in \{4, 5\}. \tag{3.31}$$

Собирая оценки (3.25)–(3.31) и сопоставляя их с (3.20), имеем

$$I_2 \leq c(\alpha, a, b) (1-x^2)^{-\alpha/2}. \tag{3.32}$$

Перейдем к оценке I_4 . С этой целью положим

$$\begin{aligned}
x_0 &= x + \frac{1}{n} (1-x^2)^{1/2}, & \theta &= \arccos t, & \varphi &= \arccos x, \\
\varphi_0 &= \arccos \left(1 - \frac{4}{n^2} \right), & x_1 &= x \cos \frac{1}{n} + (1-x^2)^{1/2} \sin \frac{1}{n} = \cos \left(\varphi - \frac{1}{n} \right).
\end{aligned}$$

Поскольку $0 \leq x \leq 1 - 4/n^2$, $x_1 \leq x_0$ и $2 \leq n\varphi_0 \leq n\varphi$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n} \int_{x_0}^1 \frac{(1-x)^{-1/4} (1-t)^{-1/4}}{t-x} dt \\
&\leq \frac{c}{n} (1-x^2)^{-1/4} \int_{x_1}^1 \frac{(1-t^2)^{-1/4}}{t-x} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{c}{n} (\sin \varphi)^{-1/2} \int_0^{\varphi^{-1/n}} \frac{(\sin \theta)^{1/2} d\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} \leq \frac{c}{n\sqrt{\varphi}} \int_0^{\varphi^{-1/n}} \frac{\theta^{1/2} d\theta}{(\varphi + \theta)(\varphi - \theta)} \\
 &\leq \frac{c}{n\varphi} \int_0^{\varphi^{-1/n}} \frac{(\theta/\varphi)^{1/2} d(\theta/\varphi)}{1 - \theta/\varphi} \\
 &= \frac{c}{n\varphi} \int_0^{1-1/(n\varphi)} \frac{\sqrt{\tau} d\tau}{1 - \tau} \leq c \int_0^{1-1/(n\varphi)} \sqrt{\tau} d\tau \leq c.
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Воспользовавшись оценкой (2.11) из (3.33) при $1 \leq \nu \leq 4$, выводим

$$\begin{aligned}
 \int_{\Delta_4} |S^\nu(x, t)|(1 - t^2)^{\alpha/2} dt &\leq \frac{c(\alpha, a, b)}{n} \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k} \int_{\Delta_4} \frac{(1 - x)^{-\alpha/2-1/4}(1 - t)^{-1/4}}{t - x} dt \\
 &\leq c(\alpha, a, b)(1 - x^2)^{-\alpha/2}
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

и, аналогично,

$$\int_{\Delta_4} |S^\nu(x, t)|(1 - t^2)^{\alpha/2} dt \leq c(\alpha, a, b)(1 - x^2)^{-\alpha/2}, \quad \nu \in \{5, 6\}. \tag{3.35}$$

Далее, так как

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n} \int_{x_0}^1 \frac{(1 - t)^{-1/4} dt}{(t - x)^2} &\leq \frac{c}{n} \int_{x_1}^1 \frac{(1 - t^2)^{-1/4} dt}{(t - x)^2} = \frac{c}{n} \int_0^{\varphi^{-1/n}} \frac{(\sin \theta)^{1/2} d\theta}{(\cos \theta - \cos \varphi)^2} \\
 &\leq \frac{c(\varphi - 1/n)^{1/2}}{n\varphi^2} \int_0^{\varphi^{-1/n}} \frac{d\theta}{(\theta - \varphi)^2} \leq \frac{c}{n} \varphi^{-3/2} \left[\frac{1}{1/n} - \frac{1}{\varphi} \right] \\
 &\leq c\varphi^{-3/2} \leq c(1 - x^2)^{-3/4},
 \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
 \int_{\Delta_4} |S_1^0(x, t)|(1 - t^2)^{\alpha/2} dt &\leq \frac{c(\alpha, a, b)}{n} (1 - x)^2 \int_{\Delta_4} \frac{(1 - x)^{-\alpha/2-5/4}(1 - t)^{-1/4} dt}{(t - x)^2} \\
 &\leq \frac{c(\alpha, a, b)}{n} (1 - x^2)^{-\alpha/2+3/4} \int_{\Delta_4} \frac{(1 - t)^{-1/4} dt}{(t - x)^2} \\
 &\leq c(\alpha, a, b)(1 - x^2)^{-\alpha/2}.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Аналогично,

$$\int_{\Delta_4} |S_3^0(x, t)|(1 - t^2)^{\alpha/2} dt \leq \frac{c(\alpha, a, b)}{n} (1 - x)^{-\alpha/2-1/2} \leq c(\alpha, a, b)(1 - x^2)^{-\alpha/2}, \tag{3.37}$$

$$\int_{\Delta_4} |S_4^0(x, t)|(1 - t^2)^{\alpha/2} dt \leq \frac{c(\alpha, a, b)}{n} (1 - x)^{-\alpha/2-1/2} \leq c(\alpha, a, b)(1 - x^2)^{-\alpha/2}, \tag{3.38}$$

$$\int_{\Delta_4} |S_5^0(x, t)|(1 - t^2)^{\alpha/2} dt \leq \frac{c(\alpha, a, b)}{n} (1 - x)^{-\alpha/2-1/2} \leq c(\alpha, a, b)(1 - x^2)^{-\alpha/2}. \tag{3.39}$$

Далее,

$$\int_{\Delta_4} |S_2^0(x, t)|(1 - t^2)^{\alpha/2} dt \leq \frac{c(\alpha, a, b)}{n} (1 - x^2)^{-\alpha/2+1/4} \int_{\Delta_4} \frac{(1 - t)^{1/4} dt}{(t - x)^2}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{c(\alpha, a, b)}{n} (1-x^2)^{-\alpha/2+1/4} \int_{\Delta_4} \frac{(1-x)^{1/4} dt}{(t-x)^2} \\
&\leq \frac{c(\alpha, a, b)}{n} (1-x^2)^{-\alpha/2+1/2} \int_{\Delta_4} \frac{dt}{(t-x)^2} \\
&\leq \frac{c(\alpha, a, b)}{n} (1-x^2)^{-\alpha/2+1/2} \frac{n}{(1-x^2)^{1/2}} \leq c(\alpha, a, b) (1-x^2)^{-\alpha/2}. \quad (3.40)
\end{aligned}$$

Собирая оценки (3.34), (3.35)–(3.40) и сопоставляя их с (3.20), получаем

$$I_4 \leq c(\alpha, a, b) (1-x^2)^{-\alpha/2}. \quad (3.41)$$

Осталось оценить интеграл I_3 (см. (3.19)). В силу (3.11), (2.4) и (2.11) имеем

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{m+1} \int_{\Delta_3} (1-t^2)^{\alpha/2} \left| \sum_{k=n}^{n+m} K_k^{\alpha, \alpha}(x, t) \right| \\
&\leq \frac{1}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{j=0}^k \{h_j^{\alpha, \alpha}\}^{-1} |P_j^{\alpha, \alpha}(x)| \int_{\Delta_3} (1-t^2)^{\alpha/2} |P_j^{\alpha, \alpha}(t)| dt \\
&\leq \frac{c(\alpha)}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{j=0}^k (1-x)^{-\alpha/2-1/4} \int_{\Delta_3} (1-t)^{-1/4} dt \\
&\leq c(\alpha, a, b) (1-x)^{-\alpha/2-1/4} n \int_{\Delta_3} (1-t)^{-1/4} dt \\
&\leq c(\alpha, a, b) (1-x)^{-\alpha/2-1/4} n (1-x_0)^{-1/4} \frac{(1-x^2)^{1/2}}{n} \\
&\leq c(\alpha, a, b) (1-x)^{-\alpha/2} \left(1-x - \frac{(1-x^2)^{1/2}}{n} \right)^{-1/4} (1-x)^{1/4} \\
&= c(\alpha, a, b) (1-x)^{-\alpha/2} \left(1 - \frac{(1+x)^{1/2}}{n(1-x)^{1/2}} \right)^{-1/4} \\
&\leq c(\alpha, a, b) (1-x)^{-\alpha/2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{-1/4} \leq c(\alpha, a, b) (1-x^2)^{-\alpha/2}. \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Оценки (3.24), (3.32), (3.41) и (3.42) с учетом равенства (3.19) и (3.18) дают

$$J_{n+m}^{\alpha} \leq c(\alpha, a, b) (1-x^2)^{-\alpha/2}, \quad (3.43)$$

где $0 \leq x \leq 1 - 4/n^2$, $a \leq m/n \leq b$, $\alpha \geq 0$.

Пусть теперь $1 - 4/n^2 \leq x \leq 1$. В этом случае интеграл (3.18) мы разобьем по следующей схеме:

$$J_{n+m}^{\alpha}(x) = \int_{-1}^1 = \int_{-1}^{-1/2} + \int_{-1/2}^{1-8/n^2} + \int_{1-8/n^2}^1 = L_1 + L_2 + L_3. \quad (3.44)$$

Интегралы L_1 и L_2 оцениваются совершенно аналогично тому, как это было сделано при оценке интегралов I_1 и I_2 . Это дает

$$L_{\nu} \leq c(\alpha, a, b) n^{\alpha}, \quad \nu = 1, 2. \quad (3.45)$$

Для L_3 из (2.8) имеем

$$\begin{aligned} L_3 &\leq \frac{1}{m+1} \int_{1-8/n^2}^1 (1-t^2)^{\alpha/2} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{l=0}^k \{h_l^{\alpha,\alpha}\}^{-1} |P_l^{\alpha,\alpha}(x) P_l^{\alpha,\alpha}(t)| dt \\ &\leq \frac{c(\alpha, a, b)}{n} \int_{1-8/n^2}^1 (1-t^2)^{\alpha/2} \sum_{k=n}^{n+m} \sum_{l=0}^k (l+1)^{2\alpha+1} \\ &\leq \frac{c(\alpha, a, b)}{n} n^{-\alpha-2} n^{2\alpha+3} = c(\alpha, a, b) n^\alpha. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Из (3.44)–(3.46) находим

$$J_{n+m}^\alpha \leq c(\alpha, a, b) n^\alpha, \quad 1 - \frac{4}{n^2} \leq x \leq 1, \quad a \leq \frac{m}{n} \leq b. \quad (3.47)$$

Объединяя оценки (3.43) и (3.47) и учитывая равенство $J_{n+m}^\alpha(-x) = J_{n+m}^\alpha(x)$, приходим к следующему результату

ЛЕММА 3.5. Пусть $\alpha \geq 0$, $0 < a \leq b$, $a \leq m/n \leq b$. Тогда имеет место следующая оценка:

$$J_{n+m}^\alpha \leq c(\alpha, a, b) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha}, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (3.48)$$

4. Некоторые свойства оператора $\mathcal{Y}_{n+2r} = \mathcal{Y}_{n+2r}(f)$. Операторы $\mathcal{Y}_{n+2r} = \mathcal{Y}_{n+2r}(f) = \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)$ (см. (1.7)) были введены в работе [1], в которой исследованы аппроксимативные свойства этих операторов на некоторых классах функций с переменной гладкостью. Дальнейшее исследование свойств (в том числе и аппроксимативных) было продолжено в работах [2]–[5]. В частности, имеет место равенство

$$\mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x) = \mathcal{Y}_{n+\nu+2(r-\nu)}(f^{(\nu)}, x), \quad 0 \leq \nu \leq r-1. \quad (4.1)$$

Заметим, что левая часть равенства (4.1) имеет смысл для произвольного $\nu \geq 0$, в том числе для $\nu = r$, в то время, как правая часть при $\nu = r$ не определена (при определении операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ предполагалось, что $r \geq 1$). Мы доопределим оператор $\mathcal{Y}_{n+2r}(g)$, полагая для $r = 0$

$$\mathcal{Y}_{n+2r}(g, x) = S_n(g, x) = \sum_{k=0}^n g_k P_k(x) \left(g_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 g(t) P_k(t) dt \right) \quad (4.2)$$

– частичная сумма Фурье–Лежандра функции $g = g(x)$ порядка n . Если мы обратимся к равенству (1.7) и дифференцируем его r раз, то в силу (2.8А) получим

$$\mathcal{Y}_{n+2r}^{(r)}(f, x) = D_{2r-1}^{(r)}(f, x) + \sum_{k=r}^{n+r} f_{r,k} P_k(x). \quad (4.3)$$

С другой стороны, в силу (1.4) имеем

$$D_{2r-1}(f, x) = \sum_{l=0}^{r-1} \frac{f^{(l)}(-1)}{l!} (x+1)^\nu + \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} f_{r,k} P_k(t) dt. \quad (4.4)$$

Из (4.4) непосредственно находим

$$D_{2r-1}^{(r)}(f, x) = \sum_{k=0}^{r-1} f_{r,k} P_k(x). \quad (4.5)$$

Объединяя (4.3) и (4.5) и учитывая (4.2), имеем

$$\mathcal{Y}_{n+2r}^{(r)}(f, x) = S_{n+r}(f^{(r)}, x). \quad (4.6)$$

Далее, если мы в определении (4.2) n и g заменим, соответственно, на $n+r$ и $f^{(r)}$, то получим

$$\mathcal{Y}_{n+r+2 \cdot 0}(f^{(r)}, x) = S_{n+r}(f^{(r)}, x). \quad (4.7)$$

Из (4.6) и (4.7), в свою очередь, имеем

$$\mathcal{Y}_{n+2r}^{(r)}(f, x) = \mathcal{Y}_{n+r+2 \cdot 0}(f^{(r)}, x). \quad (4.8)$$

Объединяя же (4.1) и (4.8), можем записать

$$\mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x) = \mathcal{Y}_{n+\nu+2(r-\nu)}(f^{(\nu)}, x), \quad 0 \leq \nu \leq r. \quad (4.9)$$

5. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+m+2r} = \mathcal{Y}_{n+m+2r}(f)$ на классах W^r . Перейдем к изучению аппроксимативных свойств операторов $\mathcal{Y}_{n+m+2r} = \mathcal{Y}_{n+m+2r}(f)$, определенных равенством (1.12). (С учетом определения (4.2) равенство (1.12) имеет смысл также и при $r = 0$.) Если $f \in W^r$, то, как уже отмечалось, найдется последовательность алгебраических полиномов $\{t_n(x)\}_{n=2r-1}^{\infty}$, удовлетворяющих неравенству (1.10). При $\nu = 0$ это неравенство приобретает следующий вид:

$$(1-x^2)^{-r/2} |f(x) - t_n(x)| \leq cn^{-r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right), \quad x \in [-1, 1]. \quad (5.1)$$

Отсюда следует, что если $f \in W^r$, то мы можем определить следующую величину:

$$E_n^r(f) = \inf_{p_n} \max_{-1 \leq x \leq 1} (1-x^2)^{-r/2} |f(x) - p_n(x)|, \quad (5.2)$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам $p_n(x)$ степени n , для которых $f^{(\nu)}(\pm 1) = p_n^{(\nu)}(\pm 1)$ при $\nu = 0, 1, \dots, r-1$. Через $p_n^r(f, x)$ обозначим тот из полиномов $p_n(x)$, для которого

$$E_n^r(f) = \max_{-1 \leq x \leq 1} (1-x^2)^{-r/2} |f(x) - p_n^r(f, x)|. \quad (5.3)$$

Из (5.1) следует, что

$$E_n^r(f) \leq cn^{-r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right). \quad (5.4)$$

С другой стороны, из равенств (1.6) и (1.7) следует, что для произвольного алгебраического полинома $p_l(x)$ степени $l \leq k+2r$ имеет место равенство

$$\mathcal{Y}_{k+2r}(p_l, x) = p_l(x). \quad (5.5)$$

В частности, если $f \in W^r$, то для полинома $p_{n+2r}^r(f) = p_{n+2r}^r(f, x)$ из (5.5) при $k \geq n$ имеем

$$f(x) - \mathcal{Y}_{k+2r}(f, x) = f(x) - p_{n+2r}^r(f, x) + \mathcal{Y}_{k+2r}(p_{n+2r}^r(f) - f, x). \quad (5.6)$$

Отсюда для операторов $\mathcal{V}_{n+m+2r}(f) = \mathcal{V}_{n+m+2r}(f, x)$, определенных равенством (1.10), имеем

$$f(x) - \mathcal{V}_{n+m+2r}(f, x) = f(x) - p_{n+2r}^r(f, x) + \mathcal{V}_{n+m+2r}(p_{n+2r}^r(f) - f, x). \quad (5.7)$$

Обозначим через C_0^r пространство функций $g = g(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[-1, 1]$ r раз, для которых $f(\pm 1) = 0$ при $0 \leq \nu \leq r - 1$, $r > 1$. Кроме того, пусть $C_0^0 = C[-1, 1]$. Тогда если $g \in C_0^r$, то коэффициенты $g_{r,k}$, определенные равенством (1.2), после r -кратного интегрирования по частям с учетом (2.6) приобретают следующий вид:

$$g_{r,j} = \frac{2j+1}{2} \int_{-1}^1 g^{(r)}(t) P_j(t) dt = (-1)^r \frac{2j+1}{2} \frac{(j+1)_r}{2^r} \int_{-1}^1 g(t) P_{j-r}^{r,r}(t) dt,$$

поэтому в силу (1.7) и (4.2) имеем ($r \geq 0$)

$$\mathcal{Y}_{k+2r}(g, x) = (1-x^2)^r \int_{-1}^1 g(t) \sum_{j=r}^{k+r} \frac{(2j+1)(j+1)_r}{2^{2r+1} j^{[r]}} P_{j-r}^{r,r}(t) P_{j-r}^{r,r}(x) dt. \quad (5.8)$$

Теперь обратимся к равенству (2.4), из которого выводим

$$\sum_{j=r}^{k+r} \frac{(2j+1)(j+1)_r}{2^{2r+1} j^{[r]}} P_{j-r}^{r,r}(t) P_{j-r}^{r,r}(x) = K_k^{r,r}(x, t). \quad (5.9)$$

Из (5.8) и (5.9) имеем ($r \geq 0$)

$$\mathcal{Y}_{k+2r}(g, x) = (1-x^2)^r \int_{-1}^1 g(t) K_k^{r,r}(x, t) dt. \quad (5.10)$$

Сопоставляя (5.10) с (1.10) и (3.11), замечаем, что

$$\mathcal{V}_{n+m+2r}(g, x) = (1-x^2)^r \int_{-1}^1 g(t) V_{n+m}^r(x, t) dt. \quad (5.11)$$

Далее заметим, что $g(x) = f(x) - p_{n+2r}^r(f, x) \in C_0^r$, поэтому из (5.11) имеем

$$\mathcal{V}_{n+m+2r}(f - p_{n+2r}^r(f), x) = (1-x^2)^r \int_{-1}^1 (f(t) - p_{n+2r}^r(f, t)) V_{n+m}^r(x, t) dt. \quad (5.12)$$

Равенства (5.7) и (5.12), взятые вместе, дают

$$f(x) - \mathcal{V}_{n+m+2r}(f, x) = f(x) - p_{n+2r}^r(f, x) - (1-x^2)^r \int_{-1}^1 (f(t) - p_{n+2r}^r(f, t)) V_{n+m}^r(x, t) dt.$$

Отсюда и из (5.3) имеем

$$\frac{|f(x) - \mathcal{V}_{n+m+2r}(f, x)|}{(1-x^2)^{r/2}} \leq E_{n+2r}^r(f) + (1-x^2)^{r/2} E_{n+2r}^r(f) \int_{-1}^1 (1-t^2)^{r/2} |V_{n+m}^r(x, t)| dt.$$

Если мы сравним это неравенство с (3.18), то получим

$$\frac{|f(x) - \mathcal{V}_{n+m+2r}(f, x)|}{(1-x^2)^{r/2}} \leq (1 + (1-x^2)^{r/2} J_{n+m}^r(x)) E_{n+2r}^r(f). \quad (5.13)$$

Далее, в силу (1.12) и (4.9) имеем

$$\mathcal{V}_{n+m+2r}^{(\nu)}(f, x) = \mathcal{V}_{n+\nu+m+2(r-\nu)}(f^{(\nu)}, x), \quad 0 \leq \nu \leq r. \quad (5.14)$$

Из (5.13) и (5.14), в свою очередь, имеем ($0 \leq \nu \leq r$)

$$\frac{|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{V}_{n+m+2r}^{(\nu)}(f, x)|}{(1-x^2)^{(r-\nu)/2}} \leq (1 + (1-x^2)^{(r-\nu)/2} J_{n+\nu+m}^{r-\nu}(x)) E_{n+2r-\nu}^{r-\nu}(f^{(\nu)}). \quad (5.15)$$

Обратимся теперь к лемме 3.5 при $\alpha = r - \nu$. Тогда если $0 < a \leq m/n \leq b$, $r \geq 0$, то

$$(1-x^2)^{(r-\nu)/2} J_{n+\nu+m}^{r-\nu}(x) \leq c(r, a, b), \quad 0 \leq \nu \leq r, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (5.16)$$

Сопоставляя (5.15) и (5.16), приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть a и b такие фиксированные числа, что $0 < a \leq b$, $f \in W^r$. Тогда для произвольных n и m , удовлетворяющих условию $a \leq m/n \leq b$, имеют место следующие оценки:

$$\frac{|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{V}_{n+m+2r}^{(\nu)}(f, x)|}{(1-x^2)^{(r-\nu)/2}} \leq c(r, a, b) E_{n+2r-\nu}^{r-\nu}(f^{(\nu)}), \quad 0 \leq \nu \leq r, \quad -1 < x < 1. \quad (5.17)$$

Из теоремы 5.1, в свою очередь, вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть a и b такие фиксированные числа, что $0 < a \leq b$, $f \in W^r$, $N = n + m + 2r$, $p_N(x) = \mathcal{V}_{n+m+2r}(f, x)$. Тогда равномерно относительно $a \leq m/n \leq b$ имеют место следующие оценки:

$$\frac{|f^{(\nu)}(x) - p_N^{(\nu)}(x)|}{(1-x^2)^{(r-\nu)/2}} \leq \frac{c(r, a, b)}{N^{r-\nu}} \omega\left(f^{(\nu)}, \frac{1}{N}\right), \quad 0 \leq \nu \leq r, \quad -1 < x < 1. \quad (5.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию следствия 5.1 $f \in W^r$, поэтому $f^{(\nu)} \in W^{r-\nu}$ и, следовательно, в силу (5.17) для $p_N(x) = \mathcal{V}_{n+m+2r}(f, x)$ имеем

$$\frac{|f^{(\nu)}(x) - p_N^{(\nu)}(x)|}{(1-x^2)^{(r-\nu)/2}} \leq c(r, a, b) E_{n+2r-\nu}^{r-\nu}(f^{(\nu)}), \quad 0 \leq \nu \leq r, \quad -1 < x < 1. \quad (5.19)$$

С другой стороны, из (5.4) (взяв $r - \nu$ вместо r) имеем

$$\begin{aligned} E_{n+2r-\nu}^{r-\nu}(f^{(\nu)}) &\leq c(r)(n+2r-\nu)^{-r+\nu} \omega\left((f^{(\nu)})^{(r-\nu)}, \frac{1}{n+2r-\nu}\right) \\ &= c(r)(n+2r-\nu)^{-r+\nu} \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n+2r-\nu}\right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Если теперь $a \leq m/n \leq b$, то

$$(n + 2r - \nu)^{-r+\nu} \leq c(r, a, b)N^{-r+\nu}, \quad (5.21)$$

$$\omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n + 2r - \nu}\right) \leq c(r, a, b)\omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{N}\right). \quad (5.22)$$

Сопоставляя (5.19)–(5.22), убеждаемся в справедливости оценки (5.18). Следствие 5.1 доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. И. Шарапудинов, “Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье–Лежандра”, *Матем. сб.*, **191**:5 (2000), 143–160.
- [2] И. И. Шарапудинов, “Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства”, *Матем. сб.*, **194**:3 (2003), 115–148.
- [3] И. И. Шарапудинов, “Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{U}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов”, *Матем. заметки*, **72**:5, 765–795.
- [4] И. И. Шарапудинов, *Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения*, ДНЦ РАН, Махачкала, 2004.
- [5] И. И. Шарапудинов, “Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r ”, *Матем. сб.*, **197**:3 (2006), 135–154.
- [6] С. А. Теляковский, “Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами”, *Матем. сб.*, **70**:2 (1966), 252–265.
- [7] И. З. Гопенгауз, “К теореме А. Ф. Тимана о приближении функций многочленами на конечном отрезке”, *Матем. заметки*, **1**:2 (1967), 163–172.
- [8] Г. Сеге, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962.

И. И. Шарапудинов

Дагестанский научный центр РАН

E-mail: sharapud@iwt.ru

Поступило

04.04.2007