Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Синев, Стохастическая формула Бейкера–Хаусдорфа и ее применения к квантовым релаксационным процессам, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 3, 395–408

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5542>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 10:15:23

Стохастическая формула Бейкера–Хаусдорфа и ее применения к квантовым релаксационным процессам

А. М. Синев

В работе рассматривается стохастический аналог формулы Бейкера–Хаусдорфа для операторов, удовлетворяющих каноническим коммутационным соотношениям. Данная формула применяется для точного решения задачи о динамике квантовой системы, взаимодействующей с окружением.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Одним из методов описания динамики квантовой системы, взаимодействующей с окружением, является метод марковских управляющих уравнений [1], [2]. При достаточно общих предположениях эволюция состояния открытой квантовой системы ρ_t , описываемого неотрицательным оператором с единичным следом, удовлетворяет уравнению Линдблада [3]

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t), \quad \mathcal{L}(\rho_t) = \Phi^\dagger(\rho_t) - \Phi(I) \circ \rho_t - \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \rho_t], \quad (1)$$

где $\hat{H}$ – гамильтониан системы, описывающий обратимую динамику, $\Phi(\cdot)$ – некоторое вполне положительное отображение, описывающее диссипативные процессы в системе, $A \circ B = (AB + BA)/2$ – симметричное произведение Йордана, $\Phi^\dagger(\cdot)$ – вполне положительное отображение, двойственное $\Phi(\cdot)$ относительно следа; более точно,

$$\text{Tr } \Phi^\dagger(\rho)\sigma = \text{Tr } \rho\Phi(\sigma).$$

Конкретный вид отображения $\mathcal{L}$ задается исходя из физических реализаций того или иного типа окружения и его взаимодействия с системой [1], [2].

Для аналитического и численного решения марковских управляющих уравнений используется метод “квантовых траекторий” [4]. А именно, решение уравнения (1) ищется в виде математического ожидания комплексного операторозначного функционала

$$\rho_t = \mathbb{E} u_t \rho_0 u_t^*, \quad (2)$$

где ρ_0 – начальное состояние системы, а u_t – стохастический оператор эволюции состояния системы, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению Ито, сопоставляемому генератору $\mathcal{L}$ марковской эволюции таким образом,

чтобы состояние квантовой системы описывалось уравнением Линдблада

$$d\rho_t = \mathbb{E} du_t \rho_0 u_t^* + \mathbb{E} u_t \rho_0 du_t^* + \mathbb{E} du_t \rho_0 du_t^* = \mathcal{L}(\rho_t) dt, \\ du_t = (A dt + B dw_t) u_t,$$

где $A, B = \{B_k\}$ – операторные коэффициенты, описывающие динамические и диссипативные процессы взаимодействия квантовой системы и ее окружения, $w_t = \{w_t^{(k)}\}$ – независимые стандартные винеровские процессы.

Если отображение $\mathcal{L}(\cdot)$ квадратично относительно системных операторов, то дифференциальное уравнение для стохастической части u_t является уравнением первого порядка по системным операторам. Например, эволюция состояния квантового гармонического осциллятора с собственной частотой Ω при взаимодействии с окружением, имеющим температуру T , описывается уравнением [1]

$$\frac{d}{dt} \rho = -i[\Omega a^\dagger a, \rho] + \frac{\lambda(\nu + 1)}{2} (2a\rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a) + \frac{\lambda\nu}{2} (2a^\dagger \rho a - a a^\dagger \rho - \rho a a^\dagger) \\ - \frac{\lambda\kappa}{2} (2a^\dagger \rho a^\dagger - a^\dagger a^\dagger \rho - \rho a^\dagger a^\dagger) - \frac{\lambda\kappa^*}{2} (2a\rho a - a a \rho - \rho a a), \quad (3)$$

где $a^\dagger$ и a – операторы рождения и уничтожения, $\nu = \hbar\Omega/kT = \log(1 + 1/\nu)$, k – постоянная Больцмана, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ – интенсивность взаимодействия осциллятора с окружением, $\kappa \in \mathbb{C}$ – параметр, характеризующий сжатое состояние окружения. Данное уравнение факторизуется в том смысле, что $\rho_t = \mathbb{E} u_t \rho_0 u_t^*$, если u_t удовлетворяет уравнению

$$du_t = \left[-\left(\frac{\lambda(\nu + 1)}{2} + i\Omega \right) a^\dagger a dt - \frac{\lambda\nu}{2} a a^\dagger dt + \frac{\lambda\kappa}{2} a^\dagger a^\dagger dt + \frac{\lambda\kappa^*}{2} a a dt \right. \\ \left. + \sqrt{\lambda(\nu + 1 - |\kappa|)} a dX_t + \sqrt{\lambda(\nu - |\kappa|)} a^\dagger dY_t + \sqrt{\lambda\kappa} a^\dagger dZ_t - \sqrt{\lambda\kappa^*} a d\bar{Z}_t \right] u_t, \\ u_0 = I, \quad (4)$$

где X_t, Y_t, Z_t – независимые винеровские процессы. При решении стохастической части данного уравнения нужно уметь распутывать, как в классической формуле Бейкера–Хаусдорфа, слагаемые первого порядка относительно операторов a и $a^\dagger$, коммутирующих на единицу.

2. Стохастическая формула Бейкера–Хаусдорфа. Рассмотрим линейное стохастическое дифференциальное уравнение Ито с операторными коэффициентами

$$du_t = (c_t^0 + c_t^- a + c_t^+ a^\dagger) u_t dW_t, \quad u_0 = I. \quad (5)$$

Здесь W_t – n -мерный винеровский процесс с независимыми стандартными компонентами, c_t^0, c_t^-, c_t^+ – заданные n -мерные непрерывные комплексные функции времени. Для упрощения обозначений в дальнейшем изложении произведения типа $c_t^0 dW_t$ понимаются как скалярные произведения в $\mathbb{R}^n$:

$$c_t dW_t = \sum_{j=1}^n (c_t)_j (dW_t)_j,$$

а операторы рождения и уничтожения $a^\dagger$ и a

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a|0\rangle = |0\rangle, \quad a^\dagger|n-1\rangle = \sqrt{n}|n\rangle,$$

где

$$|n\rangle = (\underbrace{0, \dots, 0}_n, 1, 0, \dots),$$

удовлетворяют стандартному коммутационному соотношению.

С учетом формулы Ито решение уравнения (5) формально записывается в виде хронологически упорядоченной экспоненты

$$u_t = T \exp \left\{ \int_0^t (c_\tau^0 + c_\tau^- a + c_\tau^+ a^\dagger) dW_\tau - \frac{1}{2} \int_0^t (c_\tau^0 + c_\tau^- a + c_\tau^+ a^\dagger)^2 d\tau \right\}, \quad (6)$$

так как коэффициенты в (5) не коммутируют в различные моменты времени. Нашей задачей будет представить T – экспоненту в виде произведения нормально упорядоченных операторов, т.е. вывести стохастический аналог формулы Бейкера–Хаусдорфа.

ТЕОРЕМА 1 (Стохастический аналог формулы Бейкера–Хаусдорфа). Пусть μ_t – решение системы уравнений Риккати

$$\mu_t + c_t^- \int_0^t \mu_\tau^2 d\tau = c_t^+ \quad (7)$$

на отрезке $[0, T]$. Тогда решение уравнения (5) в нормальной форме имеет вид

$$\begin{aligned} u_t = \exp \left\{ \int_0^t (c_\tau^0 + c_\tau^- z_\tau) dW_\tau - \frac{1}{2} \int_0^t (c_\tau^0 + c_\tau^- z_\tau)^2 d\tau \right\} \exp \left\{ a^\dagger z_t - \frac{(a^\dagger)^2}{2} \int_0^t \mu_\tau^2 d\tau \right\} \\ \times \exp \left\{ -a^\dagger a \int_0^t c_\tau^- \mu_\tau d\tau \right\} \exp \left\{ ax_t - \frac{a^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^2 d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где интеграл по dW_t понимается в смысле стохастического интеграла Ито,

$$\eta_t = c_t^- \exp \left\{ - \int_0^t c_\tau^- \mu_\tau d\tau \right\}, \quad (9)$$

и z_t, x_t – диффузионные процессы такие, что

$$\begin{aligned} dz_t &= -(c_t^0 \mu_t + c_t^- \mu_t z_t) dt + \mu_t dW_t, & z_0 &= 0, \\ dx_t &= -(c_t^0 \eta_t + c_t^- \eta_t z_t) dt + \eta_t dW_t, & x_0 &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как уравнение (5) является уравнением первого порядка по операторам a и $a^\dagger$, то, очевидно, что его решение можно искать в виде композиции экспонент операторов второго порядка по a и $a^\dagger$:

$$u_t = E_1 E_2 E_3 E_4, \quad (11)$$

$$E_1 = \exp \left\{ \int_0^t s_\tau dW_\tau - \frac{1}{2} \int_0^t s_\tau^2 d\tau \right\}, \quad (12)$$

$$E_2 = \exp \left\{ a^\dagger \int_0^t (\mu_\tau dW_\tau + k_\tau d\tau) - \frac{(a^\dagger)^2}{2} \int_0^t \mu_\tau^2 d\tau \right\}, \quad (13)$$

$$E_3 = \exp \left\{ a^\dagger a \int_0^t \psi_\tau d\tau \right\},$$

$$E_4 = \exp \left\{ a \int_0^t (\eta_\tau dW_\tau + h_\tau d\tau) - \frac{a^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^2 d\tau \right\}. \quad (14)$$

Подставляя (11) в (5), находим неизвестные n -мерные функции s_t , μ_t , η_t и скалярные функции k_t , ψ_t , h_t . Принимая во внимание многомерную формулу Ито (см., например, [5]):

$$\begin{aligned} df_t = & \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^l \frac{\partial f}{\partial z^i}(t, Z_t) \Phi_{ik}(t, \omega) dW_t^k \\ & + \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, Z_t) + \sum_{i=1}^l \frac{\partial f}{\partial z^i}(t, Z_t) \Psi^i(t, \omega) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^l \Phi_{ik}(t, \omega) \Phi_{jk}(t, \omega) \frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial z^j}(t, Z_t) \right] dt, \end{aligned}$$

для функции $f_t = f(t, Z_t)$ и l -мерного случайного процесса Z_t

$$dZ_t = \Phi(t, \omega) dW_t + \Psi(t, \omega) dt,$$

где W_t – n -мерный винеровский процесс, имеем в явном виде для du_t

$$\begin{aligned} du_t = & dE_1 E_2 E_3 E_4 + E_1 dE_2 E_3 E_4 + E_1 E_2 dE_3 E_4 + E_1 E_2 E_3 dE_4 \\ & + dE_1 dE_2 E_3 E_4 + dE_1 E_2 E_3 dE_4 + E_1 dE_2 E_3 dE_4, \end{aligned} \quad (15)$$

причем из коммутационных соотношений

$$\begin{aligned} \exp\{\alpha a^\dagger + \beta (a^\dagger)^2\} a &= (a - \alpha - 2\beta a^\dagger) \exp\{\alpha a^\dagger + \beta (a^\dagger)^2\}, \\ \exp\{\alpha a^\dagger a\} a &= a e^{-\alpha} \exp\{\alpha a^\dagger a\}, \end{aligned}$$

вытекают следующие выражения для слагаемых (15):

$$\begin{aligned} dE_1 E_2 E_3 E_4 &= s_t dW_t u_t, & E_1 dE_2 E_3 E_4 &= a^\dagger (\mu_t dW_t + k_t dt) u_t, \\ E_1 E_2 dE_3 E_4 &= a^\dagger P_t \psi_t dt u_t, & E_1 E_2 E_3 dE_4 &= P_t \exp \left\{ - \int_0^t \psi_\tau d\tau \right\} (\eta_t dW_t + h_t dt) u_t, \\ dE_1 dE_2 E_3 E_4 &= a^\dagger s_t \mu_t dt u_t, & dE_1 E_2 E_3 dE_4 &= P_t \exp \left\{ - \int_0^t \psi_\tau d\tau \right\} \eta_t s_t dt u_t, \\ E_1 dE_2 E_3 dE_4 &= a^\dagger P_t \exp \left\{ - \int_0^t \psi_\tau d\tau \right\} \mu_t \eta_t dt u_t. \end{aligned}$$

Здесь для упрощения записи использовано обозначение

$$P_t = a - \int_0^t (\mu_\tau dW_\tau + k_\tau d\tau) + a^\dagger \int_0^t \mu_\tau^2 d\tau.$$

Приравнивая коэффициенты в левой и правой частях (15) при соответствующих степенях операторов a и $a^\dagger$, имеем

- (i) $a dW_t: c_t^- = \eta_t \exp\{-\int_0^t \psi_\tau d\tau\};$
- (ii) $a dt: 0 = h_t + s_t \eta_t;$
- (iii) $a^\dagger a dt: 0 = \psi_t + c_t^- \mu_t;$
- (iv) $a^\dagger dW_t: c_t^+ = \mu_t + c_t^- \int_0^t \mu_\tau^2 d\tau;$
- (v) $a^\dagger dt: 0 = k_t + \mu_t s_t;$
- (vi) $dW_t: c_t^0 = s_t - c_t^- \int_0^t (\mu_\tau dW_\tau + k_\tau d\tau).$

Компоненты функции μ_t удовлетворяют системе уравнений Риккати (iv). После того, как найдено μ_t , определяются остальные функции. Для удобства введем одномерные диффузионные процессы в показателях экспонент (13), (14)

$$z_t = \int_0^t (\mu_\tau dW_\tau + k_\tau d\tau), \quad x_t = \int_0^t (\eta_\tau dW_\tau + h_\tau d\tau). \quad (16)$$

Тогда из (vi) следует $s_t = c_t^0 + c_t^- z_t$, а из (ii), (v) имеем

$$k_t = -c_t^0 \mu_t - c_t^- \mu_t z_t, \quad h_t = -c_t^0 \eta_t - c_t^- \eta_t z_t.$$

Таким образом, мы приходим к выражению (8) для u_t с диффузионными процессами z_t, x_t , определяемыми уравнениями (10).

3. Вычисление матрицы плотности системы. Для физических приложений необходимо найти семейство случайных операторов u_t и затем вычислить состояние ρ_t

$$\rho_t = E u_t \rho_0 u_t^*$$

для произвольного положительного оператора с единичным следом ρ_0 , описывающим начальное состояние системы.

Пусть u_t определяется формулой (8). Тогда

$$\begin{aligned} u_t \rho_0 u_t^* = & \exp\left\{\int_0^t (c_\tau^0 + c_\tau^- z_\tau) dW_\tau - \frac{1}{2} \int_0^t (c_\tau^0 + c_\tau^- z_\tau)^2 d\tau\right\} \\ & \times \exp\left\{\int_0^t (c_\tau^{0*} + c_\tau^{-*} z_\tau^*) dW_\tau - \frac{1}{2} \int_0^t (c_\tau^{0*} + c_\tau^{-*} z_\tau^*)^2 d\tau\right\} \\ & \times \exp\left\{a^\dagger z_t - \frac{(a^\dagger)^2}{2} \int_0^t \mu_\tau^2 d\tau\right\} \exp\left\{-a^\dagger a \int_0^t c_\tau^- \mu_\tau d\tau\right\} \\ & \times \exp\left\{a x_t - \frac{a^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^2 d\tau\right\} \rho_0 \exp\left\{a^\dagger x_t^* - \frac{(a^\dagger)^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^{*2} d\tau\right\} \\ & \times \exp\left\{-a^\dagger a \int_0^t c_\tau^{-*} \mu_\tau^* d\tau\right\} \exp\left\{a z_t^* - \frac{a^2}{2} \int_0^t \mu_\tau^{*2} d\tau\right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

При вычислении $E u_t \rho_0 u_t^*$ необходимо фиксировать порядок действия операторов a и $a^\dagger$ на ρ_0 . Рассмотрим нормальный символ $\phi_t(\bar{v}, w, \bar{w}, v)$ супероператора $u_t(\cdot) u_t^*$, действующего на $\rho_0 = |w\rangle\langle w|$, где

$$|w\rangle = \exp\left\{-\frac{|w|^2}{2}\right\} \left(1, w, \frac{w^2}{\sqrt{2!}}, \dots, \frac{w^n}{\sqrt{n!}}, \dots\right)$$

– нормированный когерентный вектор из l_2 , $w \in \mathbb{C}$. Имеем

$$\begin{aligned}
 \phi_t &\stackrel{\text{def}}{=} \exp\{|v|^2\} \exp\{|w|^2\} \langle v|u_t|w \rangle \langle w|u_t^*|v \rangle \\
 &= \exp\left\{\int_0^t (c_\tau^0 + c_\tau^- z_\tau) dW_\tau - \frac{1}{2} \int_0^t (c_\tau^0 + c_\tau^- z_\tau)^2 d\tau\right\} \\
 &\quad \times \exp\left\{\int_0^t (c_\tau^{0*} + c_\tau^{-*} z_\tau^*) dW_\tau - \frac{1}{2} \int_0^t (c_\tau^{0*} + c_\tau^{-*} z_\tau^*)^2 d\tau\right\} \\
 &\quad \times \exp\left\{\bar{v}z_t - \frac{\bar{v}^2}{2} \int_0^t \mu_\tau^2 d\tau\right\} \exp\left\{\bar{v}w \left(\exp\left\{-\int_0^t c_\tau^- \mu_\tau d\tau\right\} - 1\right)\right\} \\
 &\quad \times \exp\left\{wx_t - \frac{w^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^2 d\tau\right\} \exp\left\{\bar{w}x_t^* - \frac{\bar{w}^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^{*2} d\tau\right\} \\
 &\quad \times \exp\left\{\bar{w}v \left(\exp\left\{-\int_0^t c_\tau^{-*} \mu_\tau^* d\tau\right\} - 1\right)\right\} \exp\left\{vz_t^* - \frac{v^2}{2} \int_0^t \mu_\tau^{*2} d\tau\right\}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Так как множество когерентных векторов всюду плотно в l_2 , по ϕ_t однозначно восстанавливается вид супероператора $u_t(\cdot)u_t^*$, действующего на произвольное состояние ρ_0 :

$$\phi_t(\bar{v}, w, \bar{w}, v) \rightarrow \phi_t(\overrightarrow{a_2^\dagger}, \overrightarrow{a_1}, \overleftarrow{a_1^\dagger}, \overleftarrow{a_2}), \quad (19)$$

где индексами и стрелками обозначен порядок и расположение операторов относительно ρ_0 . Например, стрелка и индекс $\overrightarrow{a_2^\dagger}$ означают, что оператор $a^\dagger$ действует на ρ_0 слева вторым. Также здесь была использована известная формула нормального упорядочивания

$$\exp\{-\lambda a^\dagger a\} = : \exp\{a^\dagger a(e^{-\lambda} - 1)\} :. \quad (20)$$

ЛЕММА 1. Процесс ϕ_t (18) эквивалентен процессу

$$\begin{aligned}
 \psi_t &= \exp\left\{\int_0^t (c_\tau^0 + c_\tau^- \zeta_\tau)(c_\tau^{0*} + c_\tau^{-*} \zeta_\tau^*) d\tau\right\} \exp\left\{\bar{v}\zeta_t - \frac{\bar{v}^2}{2} \int_0^t \mu_\tau^2 d\tau\right\} \\
 &\quad \times \exp\left\{v\zeta_t^* - \frac{v^2}{2} \int_0^t \mu_\tau^{*2} d\tau\right\} \exp\left\{\bar{v}w \left(\exp\left\{-\int_0^t c_\tau^- \mu_\tau d\tau\right\} - 1\right)\right\} \\
 &\quad \times \exp\left\{\bar{w}v \left(\exp\left\{-\int_0^t c_\tau^{-*} \mu_\tau^* d\tau\right\} - 1\right)\right\} \\
 &\quad \times \exp\left\{w\xi_t - \frac{w^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^2 d\tau\right\} \exp\left\{\bar{w}\xi_t^* - \frac{\bar{w}^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^{*2} d\tau\right\} \quad (21)
 \end{aligned}$$

относительно абсолютно непрерывной замены вероятностной меры диффузионных процессов $m_{z, z^*, x, x^*} \rightarrow m_{\zeta, \zeta^*, \xi, \xi^*}$, где

$$\begin{aligned}
 d\zeta_t &= c_t^{0*} \mu_t dt + c_t^{-*} \mu_t \zeta_t^* dt + \mu_t dW_t, & \zeta_0 &= 0, \\
 d\xi_t &= c_t^{0*} \eta_t dt + c_t^{-*} \eta_t \xi_t^* dt + \eta_t dW_t, & \xi_0 &= 0.
 \end{aligned} \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сдвиг процессов в формуле (18)

$$\{z_t, z_t^*, x_t, x_t^*\} \rightarrow \{\zeta_t, \zeta_t^*, \xi_t, \xi_t^*\},$$

определяемый уравнениями

$$\begin{aligned} d\zeta_t &= -c_t^0 \mu_t dt - c_t^- \mu_t \zeta_t dt + \mu_t dW_t + f_\zeta dt, \\ d\xi_t &= -c_t^0 \eta_t - c_t^- \eta_t \zeta_t dt + \eta_t dW_t + f_\xi dt, \end{aligned}$$

которые отличаются от dz_t , dx_t (10) на слагаемое $f dt$. Его определим следующим образом:

$$f = \begin{pmatrix} f_\zeta \\ f_{\zeta^*} \\ f_\xi \\ f_{\xi^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_t \\ \mu_t^* \\ \eta_t \\ \eta_t^* \end{pmatrix} (c_t^0 + c_t^- \zeta_t + c_t^{0*} + c_t^{-*} \zeta_t^*) = \begin{pmatrix} \mu_t(c_t^0 + c_t^- \zeta_t) + \mu_t(c_t^{0*} + c_t^{-*} \zeta_t^*) \\ \mu_t^*(c_t^0 + c_t^- \zeta_t) + \mu_t^*(c_t^{0*} + c_t^{-*} \zeta_t^*) \\ \eta_t(c_t^0 + c_t^- \zeta_t) + \eta_t(c_t^{0*} + c_t^{-*} \zeta_t^*) \\ \eta_t^*(c_t^0 + c_t^- \zeta_t) + \eta_t^*(c_t^{0*} + c_t^{-*} \zeta_t^*) \end{pmatrix}.$$

Матрица размера $4 \times n$ в предпоследнем равенстве – это матрица коэффициентов при dW_t в дифференциальных уравнениях, определяющих процессы, а второй множитель (столбец) содержит функции, которые интегрируются по винеровским мерам в экспонентах (18). По теореме Гирсанова меры $m_{\zeta, \zeta^*, \xi, \xi^*}$ и m_{z, z^*, x, x^*} абсолютно непрерывны друг относительно друга, а производная Радона–Никодима $dm_{\zeta, \zeta^*, \xi, \xi^*} / dm_{z, z^*, x, x^*}$ имеет вид (см. [5], [6])

$$\begin{aligned} \frac{dm_{\zeta, \zeta^*, \xi, \xi^*}}{dm_{z, z^*, x, x^*}}(z_t, z_t^*, x_t, x_t^*) &= \exp \left\{ \int_0^t (c_\tau^0 + c_\tau^- z_\tau + c_\tau^{0*} + c_\tau^{-*} z_\tau^*) dW_\tau \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t (c_\tau^0 + c_\tau^- z_\tau + c_\tau^{0*} + c_\tau^{-*} z_\tau^*)^2 d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, (18) переходит в

$$\begin{aligned} \psi_t &= \exp \left\{ \int_0^t (c_\tau^0 + c_\tau^- \zeta_\tau)(c_\tau^{0*} + c_\tau^{-*} \zeta_\tau^*) d\tau \right\} \exp \left\{ \bar{v} \zeta_t - \frac{\bar{v}^2}{2} \int_0^t \mu_\tau^2 d\tau \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ v \zeta_t^* - \frac{v^2}{2} \int_0^t \mu_\tau^{*2} d\tau \right\} \exp \left\{ \bar{v} w \left(\exp \left\{ - \int_0^t c_\tau^- \mu_\tau d\tau \right\} - 1 \right) \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ \bar{w} v \left(\exp \left\{ - \int_0^t c_\tau^{-*} \mu_\tau^* d\tau \right\} - 1 \right) \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ w \xi_t - \frac{w^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^2 d\tau \right\} \exp \left\{ \bar{w} \xi_t^* - \frac{\bar{w}^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^{*2} d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} d\zeta_t &= c_t^{0*} \mu_t dt + c_t^{-*} \mu_t \zeta_t^* dt + \mu_t dW_t, & \zeta_0 &= 0, \\ d\xi_t &= c_t^0 \eta_t dt + c_t^- \eta_t \zeta_t^* dt + \eta_t dW_t, & \xi_0 &= 0. \end{aligned}$$

Вычислим математическое ожидание $E\psi_t$. Введем процесс

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_t^{\alpha, \beta} = \exp \left\{ \int_0^t (c_\tau^0 c_\tau^{-*} \zeta_\tau^* + c_\tau^{0*} c_\tau^- \zeta_\tau + |c_\tau^-|^2 \zeta_\tau \zeta_\tau^*) d\tau \right\} \\ &\quad \times \exp \{ \alpha \bar{v} \zeta_t \} \exp \{ \beta v \zeta_t^* \} \exp \{ w \xi_t \} \exp \{ \bar{w} \xi_t^* \}, \end{aligned}$$

зависящий от параметров α и β . При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\psi_t = & \exp\left\{\int_0^t |c_\tau^0|^2 d\tau\right\} \exp\left\{-\frac{\bar{v}^2}{2} \int_0^t \mu_\tau^2 d\tau\right\} \exp\left\{-\frac{v^2}{2} \int_0^t \mu_\tau^{*2} d\tau\right\} \\ & \times \exp\left\{-\frac{w^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^2 d\tau\right\} \exp\left\{-\frac{\bar{w}^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^{*2} d\tau\right\} \\ & \times \exp\left\{\bar{v}w\left(\exp\left\{-\int_0^t c_\tau^- \mu_\tau d\tau\right\} - 1\right)\right\} \\ & \times \exp\left\{\bar{w}v\left(\exp\left\{-\int_0^t c_\tau^{-*} \mu_\tau^* d\tau\right\} - 1\right)\right\} \mathbf{E}\left\{\varphi_t^{\alpha,\beta}\big|_{\substack{\alpha=1 \\ \beta=1}}\right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотрим вывод дифференциального уравнения для $\mathbf{E}\{\varphi_t^{\alpha,\beta}\}$. Заметим, что

$$\mathbf{E}\{\zeta_t \varphi\} = \frac{1}{\bar{v}} \frac{\partial \mathbf{E}\{\varphi\}}{\partial \alpha}, \quad \mathbf{E}\{\zeta_t^* \varphi\} = \frac{1}{v} \frac{\partial \mathbf{E}\{\varphi\}}{\partial \beta}, \quad \mathbf{E}\{\zeta_t \zeta_t^* \varphi\} = \frac{1}{|v|^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}\{\varphi\}}{\partial \alpha \partial \beta};$$

в соответствии с определением (22) процессов ζ_t , ξ_t имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}\{\varphi\}}{\partial t} = & \frac{|c_t^-|^2}{|v|^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}\{\varphi\}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{c_t^{0*} c_t^-}{\bar{v}} \frac{\partial \mathbf{E}\{\varphi\}}{\partial \alpha} + \frac{c_t^0 c_t^{-*}}{v} \frac{\partial \mathbf{E}\{\varphi\}}{\partial \beta} \\ & + \alpha \bar{v} \mu_t \left(c_t^{0*} \mathbf{E}\{\varphi\} + \frac{c_t^-}{v} \frac{\partial \mathbf{E}\{\varphi\}}{\partial \beta} \right) + \frac{\alpha^2}{2} \bar{v}^2 \mu_t^2 \mathbf{E}\{\varphi\} + w^2 \frac{\eta_t^2}{2} \mathbf{E}\{\varphi\} \\ & + w \eta_t \left(c_t^{0*} \mathbf{E}\{\varphi\} + \frac{c_t^-}{v} \frac{\partial \mathbf{E}\{\varphi\}}{\partial \beta} \right) + \beta v \mu_t^* \left(c_t^0 \mathbf{E}\{\varphi\} + \frac{c_t^-}{\bar{v}} \frac{\partial \mathbf{E}\{\varphi\}}{\partial \alpha} \right) \\ & + \frac{\beta^2}{2} v^2 \mu_t^{*2} \mathbf{E}\{\varphi\} + \bar{w} \eta_t^* \left(c_t^0 \mathbf{E}\{\varphi\} + \frac{c_t^-}{\bar{v}} \frac{\partial \mathbf{E}\{\varphi\}}{\partial \alpha} \right) + \bar{w}^2 \frac{\eta_t^{*2}}{2} \mathbf{E}\{\varphi\} \\ & + \alpha \beta |v|^2 |\mu_t|^2 \mathbf{E}\{\varphi\} + \alpha \bar{v} w \mu_t \eta_t \mathbf{E}\{\varphi\} + \alpha \bar{v} \bar{w} \mu_t \eta_t^* \mathbf{E}\{\varphi\} \\ & + \beta w v \mu_t^* \eta_t \mathbf{E}\{\varphi\} + \beta \bar{w} v \mu_t^* \eta_t^* \mathbf{E}\{\varphi\} + |w|^2 |\eta_t|^2 \mathbf{E}\{\varphi\}. \end{aligned}$$

Так как в окончательной формуле (24) параметры α и β полагаются равными единице, нас будет интересовать частное решение этого уравнения.

Следующие алгебраические преобразования были проведены в системе аналитических вычислений Mathematica. Сделаем подстановку

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\varphi\} = & \exp\left\{\frac{\alpha^2}{2} \bar{v}^2 \int_0^t \mu_\tau^2 d\tau\right\} \exp\left\{\frac{\beta^2}{2} v^2 \int_0^t \mu_\tau^{*2} d\tau\right\} \exp\left\{w \int_0^t \eta_\tau c_\tau^{0*} d\tau\right\} \\ & \times \exp\left\{\frac{w^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^2 d\tau\right\} \exp\left\{\bar{w} \int_0^t \eta_\tau^* c_\tau^0 d\tau\right\} \\ & \times \exp\left\{\frac{\bar{w}^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^{*2} d\tau\right\} \exp\left\{|w|^2 \int_0^t |\eta_\tau|^2 d\tau\right\} g_t. \end{aligned} \quad (25)$$

Принимая во внимание уравнение Риккати (7), получаем

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{|c_t^-|^2}{|v|^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{c_t^{0*} c_t^-}{\bar{v}} \frac{\partial g}{\partial \alpha} + \frac{c_t^0 c_t^{-*}}{v} \frac{\partial g}{\partial \beta} + \alpha \bar{v} c_t^+ c_t^{0*} g + \alpha \frac{\bar{v}}{v} \frac{\partial g}{\partial \beta} c_t^+ c_t^{-*}$$

$$\begin{aligned}
& + \beta v c_t^{+*} c_t^0 g + \beta \frac{v}{\bar{v}} \frac{\partial g}{\partial \alpha} c_t^{+*} c_t^- + \alpha \beta |v|^2 |c_t^+|^2 g + \frac{w}{v} \frac{\partial g}{\partial \beta} c_t^{-*} \eta_t + \beta w v c_t^{+*} \eta_t g \\
& + \frac{\bar{w}}{v} \frac{\partial g}{\partial \alpha} c_t^- \eta_t^* + \alpha \bar{w} \bar{v} c_t^+ \eta_t^* g + \alpha \bar{w} w \mu_t \eta_t g + \beta v \bar{w} \mu_t^* \eta_t^* g.
\end{aligned}$$

Так как $\int_0^t \mu_\tau \eta_\tau d\tau = 1 - \exp\{-\int_0^t c_\tau^- \mu_\tau d\tau\}$ (9), подстановка

$$g = \exp\left\{\alpha \bar{v} w \int_0^t \mu_\tau \eta_\tau d\tau\right\} \exp\left\{\beta v \bar{w} \int_0^t \mu_\tau^* \eta_\tau^* d\tau\right\} r_t \quad (26)$$

приводит нас к уравнению

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial t} = & \frac{|c_t^-|^2}{|v|^2} \frac{\partial^2 r}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{c_t^{0*} c_t^-}{\bar{v}} \frac{\partial r}{\partial \alpha} + \frac{c_t^0 c_t^{-*}}{v} \frac{\partial r}{\partial \beta} + w c_t^{0*} c_t^- r + \bar{w} c_t^0 c_t^{-*} r + |w|^2 |c_t^-|^2 r \\
& - |w|^2 |\eta_t|^2 r + \frac{\bar{w}}{v} \frac{\partial r}{\partial \alpha} |c_t^-|^2 + \frac{w}{v} \frac{\partial r}{\partial \beta} |c_t^-|^2 + \alpha \bar{v} c_t^+ c_t^{0*} r + \alpha \bar{w} \bar{v} c_t^+ c_t^{-*} r \\
& + \alpha \frac{\bar{v}}{v} \frac{\partial r}{\partial \beta} c_t^+ c_t^{-*} + \beta v c_t^{+*} c_t^0 r + \beta w v c_t^{+*} c_t^- r + \beta \frac{v}{\bar{v}} \frac{\partial r}{\partial \alpha} c_t^{+*} c_t^- + \alpha \beta |v|^2 |c_t^+|^2 r \\
& - w c_t^{0*} \eta_t r - \bar{w} c_t^0 \eta_t^* r.
\end{aligned}$$

Собирая (26), (25) и учитывая подстановку

$$\begin{aligned}
r_t = & \exp\left\{-|w|^2 \int_0^t |\eta_\tau|^2 d\tau\right\} \exp\left\{-w \int_0^t c_\tau^{0*} \eta_\tau d\tau\right\} \exp\left\{-\bar{w} \int_0^t c_\tau^0 \eta_\tau^* d\tau\right\} \\
& \times \exp\left\{w \int_0^t c_\tau^{0*} c_\tau^- d\tau\right\} \exp\left\{\bar{w} \int_0^t c_\tau^0 c_\tau^{-*} d\tau\right\} \exp\left\{|w|^2 \int_0^t |c_\tau^-|^2 d\tau\right\} s_t,
\end{aligned}$$

мы видим, что члены в $E\psi_t$ (24), содержащие μ_t , η_t , сокращаются, и

$$\begin{aligned}
E\psi_t = & \exp\left\{\int_0^t |c_\tau^0|^2 d\tau\right\} \exp\left\{w \int_0^t c_\tau^{0*} c_\tau^- d\tau\right\} \\
& \times \exp\left\{\bar{w} \int_0^t c_\tau^0 c_\tau^{-*} d\tau\right\} \exp\left\{|w|^2 \int_0^t |c_\tau^-|^2 d\tau\right\} s_t^{\alpha, \beta} \Big|_{\beta=1}^{\alpha=1} \rho_0, \quad (27) \\
\frac{\partial s}{\partial t} = & \frac{|c_t^-|^2}{|v|^2} \frac{\partial^2 s}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{c_t^{0*} c_t^-}{\bar{v}} \frac{\partial s}{\partial \alpha} + \frac{c_t^0 c_t^{-*}}{v} \frac{\partial s}{\partial \beta} + \frac{\bar{w}}{v} \frac{\partial s}{\partial \alpha} |c_t^-|^2 + \frac{w}{v} \frac{\partial s}{\partial \beta} |c_t^-|^2 \\
& + \alpha \bar{v} c_t^+ c_t^{0*} s + \alpha \bar{w} \bar{v} c_t^+ c_t^{-*} s + \alpha \frac{\bar{v}}{v} \frac{\partial s}{\partial \beta} c_t^+ c_t^{-*} + \beta v c_t^{+*} c_t^0 s \\
& + \beta w v c_t^{+*} c_t^- s + \beta \frac{v}{\bar{v}} \frac{\partial s}{\partial \alpha} c_t^{+*} c_t^- + \alpha \beta |v|^2 |c_t^+|^2 s.
\end{aligned}$$

Последнее уравнение дает явный вид $E\psi_t$, s_t представляется в виде

$$\begin{aligned}
s_t^{\alpha, \beta} = & \exp\{\alpha \beta |v|^2 f_1 + \alpha^2 \bar{v}^2 f_2 + \beta^2 v^2 f_2^* + \alpha \bar{v} f_3 + \beta v f_3^* \\
& + \alpha \bar{w} \bar{v} f_4 + \beta v w f_4^* + \alpha \bar{v} w f_5 + \beta v \bar{w} f_5^* \\
& + w^2 f_6 + \bar{w}^2 f_6^* + w f_7 + \bar{w} f_7^* + |w|^2 f_8 + f_9\}, \quad (28)
\end{aligned}$$

а неизвестные функции времени f_i с начальным условием $f_i(0) = 0$ находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{f}_1 = |c_t^-|^2 f_1^2 + |c_t^+|^2 + 2c_t^+ c_t^{-*} f_2^* + 2c_t^{+*} c_t^- f_2 + 4|c_t^-|^2 |f_2|^2, \\ \dot{f}_2 = c_t^+ c_t^{-*} f_1 + 2|c_t^-|^2 f_1 f_2, \\ \dot{f}_3 = |c_t^-|^2 f_1 f_3 + (2|c_t^-|^2 f_2 + c_t^+ c_t^{-*}) f_3^* + c_t^0 c_t^{-*} f_1 + 2c_t^{0*} c_t^- f_2 + c_t^+ c_t^{0*}, \\ \dot{f}_4 = (1 + f_5^*)(c_t^+ c_t^{-*} + 2|c_t^-|^2 f_2) + |c_t^-|^2 f_1 f_4, \\ \dot{f}_5 = |c_t^-|^2 f_1(1 + f_5) + (c_t^+ c_t^{-*} + 2|c_t^-|^2 f_2) f_4^*, \\ \dot{f}_6 = |c_t^-|^2 (1 + f_5) f_4^*, \\ \dot{f}_7 = f_4^* (|c_t^-|^2 f_3 + c_t^0 c_t^{-*}) + f_5 (|c_t^-|^2 f_3^* + c_t^{0*} c_t^-) + |c_t^-|^2 f_3^*, \\ \dot{f}_8 = |c_t^-|^2 (|f_4|^2 + f_5 + f_5^* + |f_5|^2), \\ \dot{f}_9 = c_t^{0*} c_t^- f_3 + c_t^0 c_t^{-*} f_3^* + |c_t^-|^2 |f_3|^2 + |c_t^-|^2 f_1. \end{cases} \quad (29)$$

Восстанавливая супероператор $\text{Eu}_t(\cdot)u_t^*$, действующий на ρ_0 в соответствии с определением (19)

$$\{\bar{v}, w, \bar{w}, v\} \rightarrow \{\bar{a}_2^\dagger, \bar{a}_1, \overleftarrow{a}_1^\dagger, \overleftarrow{a}_2\},$$

мы получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Математическое ожидание $\rho_t = \text{Eu}_t \rho_0 u_t^*$, где ρ_0 – положительный оператор с единичным следом, и u_t – решение уравнения (5), имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_t = \exp \Big\{ & \bar{a}_2^\dagger \overleftarrow{a}_2 f_1 + (\bar{a}_2^\dagger)^2 f_2 + (\overleftarrow{a}_2)^2 f_2^* + \bar{a}_2^\dagger f_3 + \overleftarrow{a}_2 f_3^* + \bar{a}_2^\dagger \overleftarrow{a}_1^\dagger f_4 \\ & + \overleftarrow{a}_2 \bar{a}_1 f_4^* + \bar{a}_2^\dagger \bar{a}_1 f_5 + \overleftarrow{a}_2 \overleftarrow{a}_1^\dagger f_5^* + (\bar{a}_1)^2 f_6 + (\overleftarrow{a}_1^\dagger)^2 f_6^* \\ & + \bar{a}_1 \left(f_7 + \int_0^t c_\tau^{0*} c_\tau^- d\tau \right) + \overleftarrow{a}_1^\dagger \left(f_7^* + \int_0^t c_\tau^0 c_\tau^{-*} d\tau \right) \\ & + \bar{a}_1 \overleftarrow{a}_1^\dagger \left(f_8 + \int_0^t |c_\tau^-|^2 d\tau \right) + f_9 + \int_0^t |c_\tau^0|^2 d\tau \Big\} \rho_0 \end{aligned} \quad (30)$$

с функциями f_i , удовлетворяющими системе уравнений (29).

4. Пример квантового релаксационного процесса. В качестве нетривиального примера приложения стохастической формулы Бейкера–Хаусдорфа рассмотрим уравнение типа (1), описывающее эволюцию свободного квантового осциллятора, взаимодействующего с термостатом при конечной температуре:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_t}{dt} = i[\rho_t, \omega a^\dagger a] + \frac{\lambda(\nu + 1)}{2} (2a\rho_t a^\dagger - a^\dagger a\rho_t - \rho_t a^\dagger a) \\ + \frac{\lambda\nu}{2} (2a^\dagger \rho_t a - a a^\dagger \rho_t - \rho_t a a^\dagger), \quad \rho(t = 0) = \rho_0. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь $\hat{H} = \hbar\omega a^\dagger a$ – гамильтониан свободного осциллятора с собственной частотой ω , а генератор линбладовского типа

$$\mathcal{L}(\rho) = \frac{\lambda(\nu + 1)}{2} (2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) + \frac{\lambda\nu}{2} (2a^\dagger \rho a - a a^\dagger \rho - \rho a a^\dagger) \quad (32)$$

хорошо известный в квантовой оптике ([1], [7]), описывает взаимодействие системы с окружением при ненулевой температуре T , где $\lambda > 0$ характеризует интенсивность обмена энергией между системой и термостатом, а $\nu > 0$ выражается через его температуру

$$\nu = \frac{1}{\exp\{\hbar\omega/kT\} - 1}.$$

Состояние Гиббса

$$\rho_\nu = (1 - c_\nu) \sum_n c_\nu^n |n\rangle\langle n|, \quad c_\nu = \frac{\nu}{\nu + 1}, \quad (33)$$

является стационарной точкой для данного генератора, т.е. $\mathcal{L}(\rho_\nu) = 0$, так как константа c_ν удовлетворяет уравнению

$$(\nu + 1)\{(n + 1)c - n\} + \nu\{c^{-1}n - (n + 1)\} = 0 \quad \forall n.$$

Рассмотрим сходимость ρ_t при $t \rightarrow \infty$ к стационарному состоянию. Как отмечалось во введении, представим решение уравнения (31) в виде

$$\rho_t = \mathbb{E} u_t \rho_0 u_t^*,$$

так, что u_t удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} du_t = & \left(-i\omega a^\dagger a dt - \frac{\lambda(\nu + 1)}{2} a^\dagger a dt - \frac{\lambda\nu}{2} aa^\dagger dt \right. \\ & \left. + \sqrt{\lambda(\nu + 1)} a dX_t + \sqrt{\lambda\nu} a^\dagger dY_t \right) u_t, \quad u_0 = I. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь X_t, Y_t – стандартные независимые винеровские процессы. Подстановка

$$\varphi_t \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left\{\frac{\lambda\nu}{2}t\right\} \exp\left\{a^\dagger a \left(i\omega + \frac{\lambda(2\nu + 1)}{2}\right)t\right\} u_t$$

приводит к уравнению

$$\begin{aligned} d\varphi_t &= (q_t a dX_t + \sigma_t a^\dagger dY_t) \varphi_t, \quad \varphi_0 = I, \\ q_t &= \sqrt{\lambda(\nu + 1)} \exp\left\{-\left(i\omega + \frac{\lambda(2\nu + 1)}{2}\right)t\right\}, \quad \sigma_t = \sqrt{\lambda\nu} \exp\left\{\left(i\omega + \frac{\lambda(2\nu + 1)}{2}\right)t\right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

В соответствии с обозначениями в уравнении (5) имеем

$$c_t^- = \begin{pmatrix} q_t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_t^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_t \end{pmatrix}, \quad c_t^0 = 0, \quad dW_t = \begin{pmatrix} dX_t \\ dY_t \end{pmatrix}.$$

Система уравнений Риккати (7) распадается на два независимых уравнения

$$\mu_t^x + q_t \int_0^t ((\mu_\tau^x)^2 + (\mu_\tau^y)^2) d\tau = 0, \quad \sigma_t = \mu_t^y. \quad (36)$$

Тогда согласно теореме 1 решение уравнения (34) имеет вид

$$\begin{aligned} u_t = & \exp\left\{-\frac{\lambda\nu}{2}t\right\} \exp\left\{-a^\dagger a \left(i\omega + \frac{\lambda(2\nu+1)}{2}\right)t\right\} \\ & \times \exp\left\{\int_0^t q_\tau z_\tau dX_\tau - \frac{1}{2} \int_0^t q_\tau^2 z_\tau^2 d\tau\right\} \exp\left\{a^\dagger z_t + \frac{(a^\dagger)^2}{2} \frac{\mu_t^x}{q_t}\right\} \\ & \times \exp\left\{-a^\dagger a \int_0^t q_\tau^- \mu_\tau^x d\tau\right\} \exp\left\{ax_t - \frac{a^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^2 d\tau\right\}, \end{aligned}$$

где $\eta_t = q_t \exp\{-\int_0^t q_\tau \mu_\tau^x d\tau\}$,

$$\begin{aligned} dz_t &= -q_t \mu_t^x z_t dt + \mu_t^x dX_t + \sigma_t dY_t, & z_0 &= 0, \\ dx_t &= -q_t \eta_t z_t dt + \eta_t dX_t, & x_0 &= 0. \end{aligned}$$

Далее, из теоремы 2 для функций f_i с нулевым начальным условием следует

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 &= |q_t|^2 f_1^2 + |\sigma_t|^2, \\ f_2 &\equiv 0, \quad f_3 \equiv 0, \quad f_4 \equiv 0, \quad f_6 \equiv 0, \quad f_7 \equiv 0, \\ \dot{f}_5 &= |q_t|^2 f_1(1 + f_5), \quad \dot{f}_8 = |q_t|^2(2f_5 + f_5^2), \quad \dot{f}_9 = |q_t|^2 f_1. \end{aligned} \quad (37)$$

Решение уравнения Риккати (37) с коэффициентами q_t и σ_t (35) записывается в явном виде

$$f_1(t) = \frac{\nu(1 - \exp\{-\lambda t\})}{\nu + 1 - \nu \exp\{-\lambda t\}} \exp\{\lambda(2\nu + 1)t\}. \quad (38)$$

Остальные функции выражаются через f_1 :

$$\begin{aligned} f_5(t) &= \exp\left\{\int_0^t |q_\tau|^2 f_1(\tau) d\tau\right\} - 1, \\ f_8(t) &= \int_0^t |q_\tau|^2 \left(\exp\left\{2 \int_0^\tau |q_s|^2 f_1(s) ds\right\} - 1\right) d\tau, \quad f_9(t) = \int_0^t |q_\tau|^2 f_1(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \rho_t = \mathbf{E} u_t \rho_0 u_t^* &= \exp\left\{-\lambda\nu t\right\} \exp\left\{\int_0^t |q_\tau|^2 f_1(\tau) d\tau\right\} \exp\left\{-a^\dagger a \left(i\omega + \frac{\lambda(2\nu+1)}{2}\right)t\right\} \\ &\times \exp\left\{\overrightarrow{a_2}^\dagger \overleftarrow{a_2} f_1(t)\right\} \exp\left\{(\overrightarrow{a_2}^\dagger \overrightarrow{a_1} + \overleftarrow{a_1}^\dagger \overleftarrow{a_2}) \left(\exp\left\{\int_0^t |q_\tau|^2 f_1(\tau) d\tau\right\} - 1\right)\right\} \\ &\times \exp\left\{\overrightarrow{a_1} \overleftarrow{a_1}^\dagger \int_0^t |q_\tau|^2 \exp\left\{2 \int_0^\tau |q_s|^2 f_1(s) ds\right\} d\tau\right\} \\ &\times \rho_0 \exp\left\{a^\dagger a \left(i\omega - \frac{\lambda(2\nu+1)}{2}\right)t\right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Далее, переставив оператор числа частиц $a^\dagger a$: $a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$ с операторами $a^\dagger$ и a , и воспользовавшись формулой упорядочивания (20), окончательно запишем

$$\begin{aligned} \rho_t = & \exp\{-\lambda\nu t\} \exp\left\{\int_0^t |q_\tau|^2 f_1(\tau) d\tau\right\} \exp\left\{\overrightarrow{a}_3^\dagger \overleftarrow{a}_3 f_1(t) \exp\left\{-\lambda(2\nu+1)t\right\}\right\} \\ & \times \exp\left\{(\overrightarrow{a}^\dagger a_2 + \overleftarrow{a}^\dagger a_2)\left(\int_0^t |q_\tau|^2 f_1(\tau) d\tau - \frac{\lambda(2\nu+1)}{2}t\right)\right\} \\ & \times \exp\left\{i\omega(\overleftarrow{a}^\dagger a_2 - \overrightarrow{a}^\dagger a_2)t\right\} \\ & \times \exp\left\{\overrightarrow{a}_1 \overleftarrow{a}_1^\dagger \int_0^t \left(|q_\tau| \exp\left\{\int_0^\tau |q_s|^2 f_1(s) ds\right\}\right)^2 d\tau\right\} \rho_0. \end{aligned} \quad (40)$$

Заметим теперь, что коэффициент при операторе $\overrightarrow{a}^\dagger a_2 + \overleftarrow{a}^\dagger a_2$ (индекс 2 относится к произведению – оператору числа частиц) удовлетворяет соотношению

$$\int_0^t |q_\tau|^2 f_1(\tau) d\tau - \frac{\lambda(2\nu+1)}{2}t = -\frac{\lambda t}{2} - \ln\{1 + \nu - \nu \exp\{-\lambda t\}\} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty.$$

Следовательно, при $\lambda t \gg 1$ оператор

$$\exp\left\{(\overrightarrow{a}^\dagger a_2 + \overleftarrow{a}^\dagger a_2)\left(\int_0^t |q_\tau|^2 f_1(\tau) d\tau - \frac{\lambda(2\nu+1)}{2}t\right)\right\}$$

превращает любое состояние в вакуумное. Также имеем

$$\begin{aligned} & f_1(t) \exp\left\{-\lambda(2\nu+1)t\right\} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\nu}{\nu+1}, \\ \exp\{-\lambda\nu t\} \exp\left\{\int_0^t |q_\tau|^2 f_1(\tau) d\tau\right\} &= \frac{1}{\nu+1 - \nu \exp\{-\lambda t\}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu+1}, \end{aligned}$$

и состояние осциллятора становится стационарным гиббсовским (33):

$$\rho_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \rho_\infty = \frac{1}{\nu+1} \exp\left\{\overrightarrow{a}^\dagger \overleftarrow{a} \frac{\nu}{\nu+1}\right\} |0\rangle\langle 0| = \frac{1}{\nu+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^n |n\rangle\langle n| = \rho_\nu.$$

5. Заключение. Кратко остановимся на основных результатах данной статьи. Получено точное решение стохастического дифференциального уравнения первого порядка относительно операторов с коммутатором равным единице (теорема 1), так что детерминированные комплексные функции времени при дифференциале n -мерного винеровского процесса не коммутируют в различные моменты времени. Таким образом, выведен стохастический аналог классической формулы Бейкера–Хаусдорфа. Основываясь на теореме 2 можно точно рассчитать эволюцию состояния системы, задаваемую генератором, квадратичным относительно системных операторов, для произвольного начального состояния (например, для системы, взаимодействующей со сжатым термостатом (3)). Кроме того, аналогичный метод применим для вычислений немарковской эволюции состояния системы [8].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] C. W. Gardiner, P. Zoller, *Quantum Noise*, A handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics, Springer Ser. Synergetics, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [2] H. J. Carmichael, *An Open System Approach to Quantum Optics*, Lecture Notes in Phys. Monogr. Ser., **18**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [3] G. Lindblad, “On generators of quantum dynamical semigroups”, *Comm. Math. Phys.*, **48**:2 (1976), 119–130.
- [4] R. Schack, T. A. Brun, “A C++ library using quantum trajectories to solve quantum master equations”, *Comp. Phys. Comm.*, **102**:1 (1997), 210–228; [arXiv: quant-ph/9608004](#).
- [5] А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений*, Теория вероятн. и матем. стат., Наука, М., 1979.
- [6] И. В. Гирсанов, “О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры”, *ТВП*, **5**:3 (1960), 314–330.
- [7] B.-G. Englert, G. Morigi, “Five Lectures On Dissipative Master Equations”, *Coherent Evolution in Noisy Environments* (Dresden, 2001), Lecture Notes in Phys., **611**, 2002, 55–106.
- [8] W. T. Strunz, Ting Yu, “Convolutionless Non-Markovian master equations and quantum trajectories: Brownian motion revisited”, art. 052115, *Phys. Rev. A*, **69**:5 (2004).

А. М. Синев

Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана

E-mail: sansin@mail.ru

Поступило

14.05.2008