Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Тарарин, Об аппроксимируемости групп автоморфизмов решеток группами автоморфизмов линейно упорядоченных множеств, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 3, 420–427

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5543>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 11:28:57

Об аппроксимируемости групп автоморфизмов решеток группами автоморфизмов линейно упорядоченных множеств

В. М. Тарарин

Получены критерии аппроксимируемости некоторых классов групп автоморфизмов решеток группами автоморфизмов линейно упорядоченных множеств.

Библиография: 3 названия.

В данной заметке приводятся критерии аппроксимируемости некоторых классов групп автоморфизмов решеток группами автоморфизмов линейно упорядоченных множеств (теоремы 1–3). Необходимые сведения по теории решеток содержатся в [1].

Группой автоморфизмов решетки L будем называть любую подгруппу G группы $A(L)$ всех автоморфизмов решетки L , рассматриваемую как группу, действующую на L , и часто обозначаемую через (G, L) .

Пусть (G_0, L_0) , (G_1, L_1) – группы автоморфизмов решеток. Пара отображений (τ, φ) называется гомоморфизмом группы (G_0, L_0) в группу (G_1, L_1) , если τ – (групповой) гомоморфизм группы G_0 в группу G_1 , φ – гомоморфизм решетки L_0 в решетку L_1 , и $\varphi(g(x)) = \tau(g)(\varphi(x))$ для всех $x \in L_0$, $g \in G_0$. Пара (τ, φ) задает изоморфизм или вложение, если τ и φ являются изоморфизмами.

Если (G, L) – группа автоморфизмов решетки, то конгруэнцию θ решетки L , устойчивую относительно действия элементов группы G (т.е. $x \equiv y(\theta)$ влечет $g(x) \equiv g(y)(\theta)$ для всех $x, y \in L$, $g \in G$), будем называть G -конгруэнцией. Пусть $G_\theta = \{g \in G \mid g(x) \equiv x(\theta) \text{ для всех } x \in L\}$ – стабилизатор конгруэнции θ в группе G . Тогда факторгруппа G/G_θ является группой автоморфизмов факторрешетки L/θ , если определить действие элементов $gG_\theta \in G/G_\theta$ на смежные классы $[x]\theta \in L/\theta$ по правилу: $gG_\theta([x]\theta) = [g(x)]\theta$. Группа автоморфизмов $(G/G_\theta, L/\theta)$ называется факторгруппой группы автоморфизмов (G, L) по G -конгруэнции θ , пара (τ, φ) отображений $\tau: G \rightarrow G/G_\theta$, $\tau(g) = gG_\theta$, и $\varphi: L \rightarrow L/\theta$, $\varphi(x) = [x]\theta$, является гомоморфизмом группы автоморфизмов (G, L) , называемым естественным. G -конгруэнцию θ решетки L будем называть спрямляющей, если факторрешетка L/θ – линейно упорядоченное множество.

Будем говорить, что группа (G, L) автоморфизмов решетки L аппроксимируется группами автоморфизмов линейно упорядоченных множеств (ЛУ множеств) или, кратко, θ -аппроксимируема, если для любых $x, y \in L$, $x \neq y$, существует гомоморфизм (τ, φ) группы автоморфизмов (G, L) в группу автоморфизмов ЛУ множества такой, что $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Очевидно, что группа (G, L) автоморфизмов решетки L

$\mathcal{o}$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда существует система $\{\theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ спрямляющих G -конгруэнций решетки L такая, что $\bigcap(\theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) = \varepsilon$ – тождественная конгруэнция.

Пусть $\{(G_\lambda, L_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ – произвольное семейство групп автоморфизмов решеток. Положим: $\overline{G} = \overline{\Pi}(G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ – декартово произведение групп G_λ ; $\overline{L} = \Pi(L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ – прямое произведение решеток L_λ . Тогда группа $\overline{G}$ является группой автоморфизмов решетки $\overline{L}$, если определить действие элементов $g \in \overline{G}$ на элементы $x \in \overline{L}$ покомпонентно: $(g(x))(\lambda) = g(\lambda)(x(\lambda))$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Полученную группу будем называть *l -произведением групп автоморфизмов решеток*. Очевидно, что $\mathcal{o}$ -аппроксимируемость группы (G, L) автоморфизмов решетки L равносильна вложенности группы (G, L) в l -произведение групп автоморфизмов ЛУ множеств.

Отметим, что прямое произведение решеток, являющихся ЛУ множествами, – дистрибутивная решетка, а также, что класс дистрибутивных решеток замкнут относительно взятия подрешеток, гомоморфных образов и прямых произведений [1; гл. V], в частности, если группа (G, L) автоморфизмов решетки L $\mathcal{o}$ -аппроксимируема, то L – дистрибутивная решетка.

Если (G, L) – группа автоморфизмов решетки L , то пару (H, K) , где K – подрешетка решетки L и H – ограничение на множество K некоторой подгруппы $H_1 \subseteq G$ такой, что множество K замкнуто относительно действия элементов из H_1 , будем называть *подгруппой* группы (G, L) .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Класс $\mathcal{o}$ -аппроксимируемых групп автоморфизмов решеток замкнут относительно взятия подгрупп и l -произведений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ очевидно.

Напомним [2], что множество G , являющееся одновременно группой и частично упорядоченным множеством (ЧУ множеством), называется *упорядоченной группой*, если из $x \leq y$ следует $txz \leq tyz$ для всех $x, y, t, z \in G$. Если частичный порядок упорядоченной группы G является решеткой, то G называется *решеточно упорядоченной группой* или, кратко, *l -группой*. Подгруппа H l -группы G называется *l -подгруппой*, если H – подрешетка решетки G , и *выпуклой*, если из $x \leq y \leq z$, $x, z \in H$, $y \in G$ следует $y \in H$. Нормальная выпуклая l -подгруппа H l -группы G называется *l -идеалом* группы G . Если (G, X) – группа автоморфизмов ЧУ множества (в частности, решетки) X , то группу G можно превратить в упорядоченную группу, определив на G *поточечный порядок*: $g \leq f$ тогда и только тогда, когда $g(x) \leq f(x)$ для всех $x \in X$. Группа $A(X)$ всех автоморфизмов ЛУ множества X является l -группой относительно поточечного порядка [2].

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 1 [2]. *Множество G/H левых смежных классов l -группы G по выпуклой l -подгруппе H является решеткой относительно индуцированного порядка: $aH \leq bH$, если и только если $a_1 \leq b_1$ для некоторых $a_1 \in aH$, $b_1 \in bH$, причем, $aH \wedge bH = (a \wedge b)H$, $aH \vee bH = (a \vee b)H$ для любых $a, b \in G$, и отображение $a \rightarrow aH$ является гомоморфизмом решетки G в решетку G/H .*

Группа G подстановок множества X называется *транзитивной*, если для любых $x, y \in X$ существует $g \in G$ такой, что $g(x) = y$. Через G_a будем обозначать *стабилизатор точки* $a \in X$ в группе G , т.е. $G_a = \{g \in G \mid g(a) = a\}$.

ТЕОРЕМА 1. *Транзитивная группа (G, L) автоморфизмов решетки L o -аппроксимируема тогда и только тогда, когда существует подгруппа G^* группы $A(L)$ всех автоморфизмов решетки L такая, что $G \subseteq G^*$, G^* – l -группа относительно поточечного порядка и решеточные операции группы G^* и решетки L связаны соотношениями*

$$(g \wedge f)(x) = g(x) \wedge f(x), \quad (g \vee f)(x) = g(x) \vee f(x) \quad (1)$$

для всех $x \in L$, $g, f \in G^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если транзитивная группа (G, L) автоморфизмов решетки L o -аппроксимируема, то можно считать, что (G, L) вложена в l -произведение

$$(\bar{G}, \bar{L}) = (\bar{\Pi}(G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda), \Pi(L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)),$$

где $G_\lambda = A(L_\lambda)$ – группа всех автоморфизмов ЛУ множества L_λ , $\lambda \in \Lambda$. Так как G_λ являются l -группами относительно поточечного порядка, то $\bar{G}$ также является l -группой относительно поточечного порядка множества $\bar{L}$, притом, для $f, g \in \bar{G}$ решеточные операции в $\bar{G}$ определяются формулами

$$(f \wedge g)(\lambda) = f(\lambda) \wedge g(\lambda) \quad \text{и} \quad (f \vee g)(\lambda) = f(\lambda) \vee g(\lambda)$$

в G_λ для всех $\lambda \in \Lambda$. Очевидно, что решеточные операции решеток $\bar{G}$ и $\bar{L}$ связаны соотношениями (1).

Пусть G_1 – l -подгруппа группы $\bar{G}$, порожденная группой G . В силу соотношений (1) множество L замкнуто относительно действия элементов группы G_1 . Обозначим через G^* ограничение группы G_1 на множество L и покажем, что G^* относительно поточечного порядка множества L является l -группой. Мы можем считать, что G^* является факторгруппой группы G_1 по нормальной подгруппе $H = \{g \in G_1 \mid g(x) = x \text{ для всех } x \in L\}$. Несложные рассуждения показывают, что H – l -идеал группы G_1 , откуда в силу леммы 1 вытекает, что $G^* = G_1/H$ является l -группой относительно порядка $\leq_1$: $gH \leq_1 fH$, если $g_1 \leq f_1$ для некоторых $g_1 \in gH$, $f_1 \in fH$, индуцированного порядком группы G_1 . Пусть $gH \leq_1 fH$. Тогда $g \leq fh$ для некоторого $h \in H$ при поточечном порядке группы G_1 , откуда имеем $g(x) \leq fh(x)$ для всех $x \in \bar{L}$ и, следовательно, $gH(x) \leq fH(x)$ для всех $x \in L$, и поэтому $gH \leq fH$ при поточечном порядке группы G^* . Если $gH \leq fH$, $g, f \in G_1$, при поточечном порядке группы G^* , то $g(x) \leq f(x)$ для всех $x \in L$, откуда получаем соотношения $g \leq f \wedge g = f(e \wedge f^{-1}g)$, $e \wedge f^{-1}g \in H$ при поточечном порядке группы G_1 и, следовательно, по лемме 1 имеем $gH \leq_1 fH$. Таким образом, индуцированный и поточечный порядки совпадают и G^* – l -группа относительно поточечного порядка. Несложно заметить, что в силу леммы 1 ввиду выполнимости соотношений (1) для группы G_1 решеточные операции группы G^* и решетки L связаны соотношениями (1).

Обратно, пусть (G, L) – транзитивная группа автоморфизмов решетки L , $G^* \subseteq A(L)$, $G \subseteq G^*$, G^* – l -группа относительно поточечного порядка множества L и выполнены соотношения (1). Сначала покажем, что если H – выпуклая l -подгруппа группы G^* , содержащая стабилизатор G_a^* точки $a \in L$, то отношение $\theta(H)$: $x \equiv g(\theta(H))$, если и только если $x, y \in gH(a)$ для некоторого элемента $g \in G^*$, является

G^* -конгруэнцией решетки L . Отношение $\theta(H)$, очевидно, рефлексивно и симметрично. Несложные рассуждения показывают, что из соотношения $G_a^* \subseteq H$ вытекает транзитивность отношения $\theta(H)$ и, следовательно, $\theta(H)$ – отношение эквивалентности. Пусть $x \equiv y(\theta(H))$ и $u \equiv v(\theta(H))$. В силу транзитивности группы G $x = gh_1(a)$, $y = gh_2(a)$, $u = fs_1(a)$, $v = fs_2(a)$ для некоторых $h_1, h_2, s_1, s_2 \in H$. Так как H – выпуклая l -подгруппа, по лемме 1 имеем $gh_1 \vee fs_1 \in (g \vee f)H$, $gh_2 \vee fs_2 \in (g \vee f)H$, откуда ввиду соотношений (1) получаем

$$\begin{aligned} x \vee u &= gh_1(a) \vee fs_1(a) = (gh_1 \vee fs_1)(a) \in (g \vee f)H(a), \\ y \vee v &= gh_2(a) \vee fs_2(a) = (gh_2 \vee fs_2)(a) \in (g \vee f)H(a). \end{aligned}$$

Поэтому $x \vee u \equiv y \vee v(\theta(H))$. Аналогично показывается, что $x \wedge u \equiv y \wedge v(\theta(H))$. Таким образом, $\theta(H)$ – конгруэнция решетки L . Очевидно, что $\theta(H)$ устойчива относительно действия элементов группы G^* и, следовательно, $\theta(H)$ – G^* -конгруэнция.

Если H – спрямляющая выпуклая l -подгруппа группы G^* , т.е. множество G/H левых смежных классов относительно индуцированного порядка является линейно упорядоченным множеством [2], и $G_a^* \subseteq H$, то несложно заметить, что $\theta(H)$ – спрямляющая G^* -конгруэнция решетки L . По теореме Конрада [3] выпуклая l -подгруппа G_a^* является пересечением спрямляющих выпуклых l -подгрупп $\{H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ группы G^* , откуда по выше изложенному вытекает, что $\{\theta(H_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ является системой спрямляющих G^* -конгруэнций решетки L , причем, как легко заметить, $\bigcap (\theta(H_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda) = \varepsilon$ – тождественная конгруэнция. Таким образом, группа автоморфизмов (G^*, L) σ -аппроксимируема и, следовательно, по предложению 1 группа (G, L) также σ -аппроксимируема. Теорема доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Класс транзитивных σ -аппроксимируемых групп автоморфизмов решеток замкнут относительно взятия гомоморфных образов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (G, L) – транзитивная σ -аппроксимируемая группа автоморфизмов решетки L и θ – G -конгруэнция решетки L . По теореме 1 существует подгруппа $G^* \subseteq A(L)$ такая, что G^* – l -группа относительно поточечного порядка, $G \subseteq G^*$ и решеточные операции решеток G^* и L связаны соотношениями (1) теоремы 1. Обозначим через $\bar{G}$ l -подгруппу группы G^* , порожденную группой G . Так как решетка l -группы дистрибутивна [2], любой элемент $g \in \bar{G}$ представим в виде $\bigvee \bigwedge g_{ij}$, $g_{ij} \in G$, откуда ввиду выполнимости соотношений (1) получаем, что θ также является $\bar{G}$ -конгруэнцией решетки L . Покажем, что факторгруппа $(\bar{G}/\bar{G}_\theta, L/\theta)$ группы автоморфизмов $(\bar{G}, L)$ по конгруэнции θ σ -аппроксимируема. Несложные рассуждения показывают, что $\bar{G}_\theta$ – l -идеал группы $\bar{G}$, откуда по лемме 1 получаем, что группа $\bar{G}/\bar{G}_\theta$ является l -группой относительно индуцированного порядка $\leq_1$. Покажем, что порядок $\leq_1$ совпадает с поточечным порядком $\leq$ группы $\bar{G}/\bar{G}_\theta$. Пусть $g\bar{G}_\theta \leq_1 f\bar{G}_\theta$, $g, f \in \bar{G}$. Тогда $g \leq fh$ в группе $\bar{G}$ для некоторого $h \in \bar{G}_\theta$, откуда имеем $g(x) \leq fh(x)$ для всех $x \in L$, и поэтому

$$g\bar{G}_\theta([x]\theta) = g([x]\theta) \leq fh([x]\theta) = f\bar{G}_\theta([x]\theta)$$

для всех $[x]\theta \in L/\theta$. Следовательно, $g\bar{G}_\theta \leq f\bar{G}_\theta$. Обратно, пусть $g\bar{G}_\theta \leq f\bar{G}_\theta$. Тогда $f^{-1}g([x]\theta) \leq [x]\theta$ для всех $[x]\theta \in L/\theta$, откуда получаем $(e \vee f^{-1}g)(x) = x \vee f^{-1}g(x) \in [x]\theta \vee f^{-1}g([x]\theta) = [x]\theta$ для всех $x \in L$, и поэтому $e \vee f^{-1}g \in \bar{G}_\theta$. Так как $g \leq f \vee g = f(e \vee f^{-1}g)$ и $e \vee f^{-1}g \in \bar{G}_\theta$, то $g\bar{G}_\theta \leq_1 f\bar{G}_\theta$. Таким образом, $\bar{G}/\bar{G}_\theta$ –

l -группа относительно поточечного порядка. Из изложенного выше ввиду леммы 1 для любых $g, f \in \overline{G}$, $x \in L$ имеем

$$\begin{aligned}(g\overline{G}_\theta \vee f\overline{G}_\theta)([x]\theta) &= (g \vee f)\overline{G}_\theta([x]\theta) = [(g \vee f)(x)]\theta \\ &= [g(x) \vee f(x)]\theta = [g(x)]\theta \vee [f(x)]\theta = g\overline{G}_\theta([x]\theta) \vee f\overline{G}_\theta([x]\theta).\end{aligned}$$

Аналогично получаем соотношение

$$(g\overline{G}_\theta \wedge f\overline{G}_\theta)([x]\theta) = g\overline{G}_\theta([x]\theta) \wedge f\overline{G}_\theta([x]\theta)$$

и, следовательно, решеточные операции группы $\overline{G}/\overline{G}_\theta$ и решетки L связаны соотношениями (1). Таким образом, по теореме 1 группа автоморфизмов $(\overline{G}/\overline{G}_\theta, L/\theta)$ o -аппроксимируема и, следовательно, ввиду предложения 1 будет аппроксимируемой ее подгруппа $(G/G_\theta, L/\theta)$. Предложение доказано.

Порядковым гомоморфизмом группы (G_0, X_0) автоморфизмов ЧУ множества X_0 в группу (G_1, X_1) автоморфизмов ЧУ множества X_1 будем называть пару (τ, φ) отображений таких, что τ – гомоморфизм группы G_0 в группу G_1 , φ – порядковое отображение ЧУ множества X_0 в ЧУ множество X_1 (т.е. $x \leq y$ в X_0 влечет $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ в X_1), и $\varphi(g(x)) = \tau(g)(\varphi(x))$ для всех $x \in X_0$, $g \in G$. Если τ – изоморфизм и φ – порядковый изоморфизм, то (τ, φ) – *порядковый изоморфизм* или *порядковое вложение* группы (G_0, X_0) в группу (G_1, X_1) .

Пусть (G, X) – группа подстановок множества X . Частичный порядок $\leq$ на множестве X будем называть G -инвариантным, если из $x \leq y$ следует $g(x) \leq g(y)$ для всех $x, y \in X$, $g \in G$.

ЛЕММА 2. *Группа (G, X) автоморфизмов частично упорядоченного множества X порядково вложима в l -произведение групп автоморфизмов линейно упорядоченных множеств тогда и только тогда, когда частичный порядок множества X является пересечением G -инвариантных линейных порядков.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2 повторяет доказательство аналогичного утверждения для частично упорядоченных групп [2; теорема V.2.1].

ТЕОРЕМА 2. *Транзитивная группа (G, L) автоморфизмов дистрибутивной решетки L o -аппроксимируема тогда и только тогда, когда частичный порядок решетки L является пересечением G -инвариантных линейных порядков.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если группа автоморфизмов (G, L) решетки L o -аппроксимируема, то по лемме 2 частичный порядок решетки L является пересечением G -инвариантных линейных порядков.

Пусть (G, L) – транзитивная группа автоморфизмов дистрибутивной решетки L , частичный порядок которой является пересечением G -инвариантных линейных порядков. Тогда по лемме 2 можно считать, что группа (G, L) порядково вложена в l -произведение

$$(\overline{G}, \overline{L}) = (\overline{\Pi}(G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda), \Pi(L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)),$$

где $G_\lambda = A(L_\lambda)$ – группа всех автоморфизмов ЛУ множества L_λ . При доказательстве теоремы 1 было показано, что группа $\overline{G}$ является l -группой относительно поточечного порядка и операции решеток $\overline{G}$ и $\overline{L}$ связаны соотношениями (1). Операции

решетки $\bar{L}$ будем обозначать через $\wedge$ и $\vee$. Множество L относительно частичного порядка, индуцированного частичным порядком решетки $\bar{L}$, является решеткой, операции которой будем обозначать через $\wedge'$ и $\vee'$. Заметим, что для любых $x, y \in L$ имеют место соотношения $x \vee y \leq x \vee' y$, $x \wedge' y \leq x \wedge y$.

Пусть L_1 – подрешетка решетки $\bar{L}$, порожденная множеством L , и G_1 – l -подгруппа группы $\bar{G}$, порожденная множеством G . Несложно заметить, что в силу дистрибутивности решеток $\bar{G}$, $\bar{L}$ и выполнимости соотношений (1) группа G_1 действует транзитивно на множестве L_1 . Обозначим через G^* ограничение группы G_1 на множество L_1 . Тогда в силу предложения 1 транзитивная группа автоморфизмов (G^*, L_1) является o -аппроксимируемой.

Пусть P – произвольный простой идеал решетки $\langle L, \wedge', \vee' \rangle$. Тогда $Q = L \setminus P$ – простой фильтр решетки L . Положим

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \{x \in L_1 \mid x \leq a \text{ для некоторого элемента } a \in P\}, \\ \bar{Q} &= \{x \in L_1 \mid x \geq a \text{ для некоторого элемента } a \in Q\}.\end{aligned}$$

Множество $\bar{P}$ является идеалом решетки L_1 . Действительно, если $y \leq x$, $x \in \bar{P}$, то, очевидно, что $y \in \bar{P}$. Если $x, y \in \bar{P}$, то из $x \leq a_1$, $y \leq a_2$, $a_1, a_2 \in P$, вытекает $x \vee y \leq a_1 \vee a_2 \leq a_1 \vee' a_2 \in P$ и, следовательно, $x \vee y \in \bar{P}$. Таким образом, $\bar{P}$ – идеал решетки L_1 . Аналогично показывается, что $\bar{Q}$ – фильтр решетки L_1 . Очевидно, что $\bar{P} \cap \bar{Q} = \emptyset$. Покажем, что $\bar{P} \cup \bar{Q} = L_1$. Пусть $x \in L_1$. Тогда $x = \bigvee_i ((\bigwedge_j p_{ij}) \wedge (\bigwedge_k q_{ik}))$, где $p_{ij} \in P$, $q_{ik} \in Q$, причем, некоторые члены $\bigwedge_j p_{ij}$ или $\bigwedge_k q_{ik}$ могут отсутствовать. Если для любого i член $a_i = (\bigwedge_j p_{ij}) \wedge (\bigwedge_k q_{ik})$ содержит $\bigwedge_j p_{ij}$, то для любого i имеем $a_i \leq p_{i1}$, откуда получаем $x \leq \bigvee_i p_{i1} \leq \bigvee'_i p_{i1} \in P$ и, следовательно, $x \in \bar{P}$. Если для некоторого i_0 член $a_{i_0} = (\bigwedge_j p_{i_0 j}) \wedge (\bigwedge_k q_{i_0 k})$ не содержит $\bigwedge_j p_{i_0 j}$, то $a_{i_0} \in \bar{Q}$, откуда следует, что $x \in \bar{Q}$. Таким образом, $\bar{P} \cup \bar{Q} = L_1$ и, следовательно, $\bar{P}$ – простой идеал решетки L_1 .

Пусть Σ' – система всех простых идеалов решетки $\langle L, \wedge', \vee' \rangle$ и $\Sigma = \{\bar{P} \mid P \in \Sigma'\}$. Очевидно, что для любых $g \in G$, $\bar{P} \in \Sigma$ имеет место $g(\bar{P}) \in \Sigma$ и, следовательно, система Σ простых идеалов решетки L_1 определяет G -конгруэнцию θ решетки L_1 : $x \equiv y(\theta)$ тогда и только тогда, когда для любого $\bar{P} \in \Sigma$ либо $x, y \in \bar{P}$, либо $x, y \notin \bar{P}$ [1]. Несложно заметить, что в силу построения группы G^* и ввиду соотношений (1) конгруэнция θ является также G^* -конгруэнцией.

Так как L – дистрибутивная решетка, любые два различных элемента $x, y \in L$ отделяются некоторым простым идеалом $P \in \Sigma'$ [1], и поэтому они отделяются простым идеалом $\bar{P} \in \Sigma$, откуда получаем, что $x \equiv y(\theta)$, $x, y \in L$, тогда и только тогда, когда $x = y$. Если $x, y \in L$, то $x \vee y \equiv x \vee' y(\theta)$ и $x \wedge y \equiv x \wedge' y(\theta)$. Действительно, если $x \vee' y \in \bar{P}$ для некоторого $\bar{P} \in \Sigma$, то ввиду неравенства $x \vee y \leq x \vee' y$ получаем, что $x \vee y \in \bar{P}$; если $x \vee y \in \bar{P}$, то $x, y \in P = \bar{P} \cap L \in \Sigma'$, откуда следует, что $x \vee' y \in P \subseteq \bar{P}$, и поэтому $x \vee y \equiv x \vee' y(\theta)$. Аналогично показывается, что $x \wedge y \equiv x \wedge' y(\theta)$. Из полученных сравнений вытекают сравнения $\bigvee_i \bigwedge_j x_{ij} \equiv \bigvee'_i \bigwedge'_j x_{ij}(\theta)$ для любых $x_{ij} \in L$. Таким образом, в каждом смежном классе $[x]\theta$, $x \in L_1$, содержится и притом единственный элемент множества L , откуда следует, что группа автоморфизмов (G, L) вложима в факторгруппу $(G^*/G_\theta^*, L_1/\theta)$, которая в силу предложения 2 o -аппроксимируема, и применение предложения 1 завершает доказательство теоремы.

ЛЕММА 3. Пусть (G, L) – группа автоморфизмов дистрибутивной решетки L , K – подрешетка решетки L , замкнутая относительно действия элементов группы G , и θ – G -конгруэнция решетки K . Тогда существует G -конгруэнция $\bar{\theta}$ решетки L такая, что для $x, y \in K$ $x \equiv y(\bar{\theta})$ тогда и только тогда, когда $x \equiv y(\theta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ повторяет доказательство теоремы II.3.6 [1] с небольшим очевидным изменением.

ТЕОРЕМА 3. Пусть (G, L) – группа автоморфизмов дистрибутивной решетки L и частичный порядок решетки L является пересечением конечного множества G -инвариантных линейных порядков. Тогда группа (G, L) аппроксимируется конечным множеством групп автоморфизмов линейно упорядоченных множеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – группа автоморфизмов решетки L , частичный порядок которой является пересечением G -инвариантных линейных порядков $\leqslant_\lambda$, $\lambda \in \Lambda = \{1, \dots, n\}$. Порядково вложим группу (G, L) в l -произведение

$$(\bar{G}, \bar{L}) = (\Pi(G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda), \Pi(L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)),$$

где $G_\lambda = G$ – группа автоморфизмов ЛУ множества $\langle L, \leqslant_\lambda \rangle$, посредством пары (π, φ) отображений: $\pi(g)(\lambda) = g$, $g \in G$, и $\varphi(x)(\lambda) = x$, $x \in L$, для всех $\lambda \in \Lambda$. Пусть L_1 – подрешетка решетки $\bar{L}$, порожденная $\varphi(L)$. Так же, как при доказательстве теоремы 2, определим $\pi(G)$ -конгруэнцию θ на решетке L_1 такую, что во всяком смежном классе $[x]\theta$, $x \in L_1$, существует и притом единственный элемент из $\varphi(L)$. По лемме 3 конгруэнция θ продолжается до $\pi(G)$ -конгруэнции $\bar{\theta}$ решетки $\bar{L}$. В силу теоремы I.3.13 [1] существуют конгруэнции $\bar{\theta}(\lambda)$ ЛУ множеств L_λ , $\lambda \in \Lambda$, такие, что $x \equiv y(\bar{\theta})$ тогда и только тогда, когда $x(\lambda) \equiv y(\lambda)(\bar{\theta}(\lambda))$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Несложно заметить, что $\bar{\theta}(\lambda)$ является G_λ -конгруэнцией ЛУ множества L_λ , $\lambda \in \Lambda$, и поэтому $\bar{\theta}$ будет $\bar{G}$ -конгруэнцией решетки $\bar{L}$. Очевидно, что факторгруппа группы $(\bar{G}, \bar{L})$ по $\bar{G}$ -конгруэнции $\bar{\theta}$ изоморфна l -произведению

$$(\bar{\bar{G}}, \bar{\bar{L}}) = (\Pi(G_\lambda / G_{\bar{\theta}(\lambda)} \mid \lambda \in \Lambda), \Pi(L_\lambda / \bar{\theta}(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)),$$

и пусть $(\bar{\pi}, \bar{\varphi})$ – естественный гомоморфизм группы $(\bar{G}, \bar{L})$ в группу

$$(\bar{\bar{G}}, \bar{\bar{L}}) : \bar{\pi}(\bar{g})(\lambda) = \bar{g}(\lambda) G_{\bar{\theta}(\lambda)}, \quad \bar{g} \in \bar{G},$$

и

$$\bar{\varphi}(\bar{x})(\lambda) = [\bar{x}(\lambda)]\bar{\theta}(\lambda), \quad \bar{x} \in \bar{L} \quad \text{для всех } \lambda \in \Lambda.$$

Тогда из выше изложенного следует, что пара $(\bar{\pi}\pi, \bar{\varphi}\varphi)$ определяет вложение группы (G, L) в группу $(\bar{\bar{G}}, \bar{\bar{L}})$, аппроксимируемую конечным множеством групп автоморфизмов ЛУ множеств, и применение предложения 1 завершает доказательство теоремы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Класс групп (G, L) автоморфизмов дистрибутивных решеток L , частичный порядок которых является пересечением конечного множества G -инвариантных линейных порядков, замкнут относительно взятия гомоморфных образов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (G, L) – группа автоморфизмов дистрибутивной решетки L и частичный порядок решетки L является пересечением конечного множества G -инвариантных линейных порядков. По теореме 3 мы можем вложить группу (G, L) в l -произведение

$$(\overline{G}, \overline{L}) = (\Pi(G/G_{\theta_\lambda} \mid \lambda \in \Lambda), \Pi(L/\theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)), \quad |\Lambda| < \infty,$$

где θ_λ – спрямляющие G -конгруэнции решетки L , посредством изоморфизма (π, φ) : $\pi(g)(\lambda) = gG_{\theta_\lambda}$, $g \in G$, и $\varphi(x)(\lambda) = [x]\theta_\lambda$, $x \in L$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Пусть μ – произвольная $\pi(G)$ -конгруэнция решетки $\varphi(L)$. По лемме 3 конгруэнция μ продолжается до $\pi(G)$ -конгруэнции $\overline{\mu}$ решетки $\overline{L}$. Так же, как при доказательстве теоремы 3, показывается, что $\overline{\mu}$ является $\overline{G}$ -конгруэнцией решетки $\overline{L}$, и что факторгруппа $(\pi(G)/\pi(G)_\mu, \varphi(L)/\mu)$ группы $(\pi(G), \varphi(L))$ по конгруэнции μ вложима в o -аппроксимируемую факторгруппу $(\overline{G}/\overline{G}_{\overline{\mu}}, \overline{L}/\overline{\mu})$ группы $(\overline{G}, \overline{L})$ по $\overline{G}$ -конгруэнции $\overline{\mu}$; применение предложения 1 завершает доказательство предложения.

В связи с предложениями 2 и 3 возникает следующий вопрос. Будет ли класс o -аппроксимируемых групп автоморфизмов решеток замкнут относительно взятия гомоморфных образов?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Гретцер, *Общая теория решеток*, Мир, М., 1982.
- [2] В.М. Копытов, *Решеточно упорядоченные группы*, Наука, М., 1984.
- [3] P. F. Conrad, “The lattice of all convex l -subgroups of a lattice-ordered group”, *Czechoslovak Math. J.*, **15**:1 (1965), 101–123.

В. М. Тарарин

Институт прикладных математических исследований КарНЦ

РАН

E-mail: tararin@krc.karelia.ru

Поступило

18.05.2004

Исправленный вариант

04.02.2008