Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. А. Шахиди, О крайних точках множества бистохастических операторов, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 3, 475–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5545>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 10:26:48

О крайних точках множества бистохастических операторов

Фаррух Шахиди

В работе [1] выделен класс квадратичных стохастических операторов (КСО), отображающих конечномерный симплекс в себя, которые называются бистохастическими квадратичными операторами (БКО). БКО тесно связаны с понятием мажоризации и применяются не только в задачах популяционной генетики [1], [2], но и в задачах экономики [3]. В математической экономике БКО называется оператором благосостояния. Изучение БКО было начато в работе [1] и было получено необходимое и достаточное условие для бистохастичности оператора. Эту теорему мы приведем ниже и неоднократно будем ею пользоваться. В данной работе показано, что множество БКО является выпуклым многогранником. Поэтому представляет интерес аналог теоремы Биркгофа о крайних точках множества бистохастических матриц [4]. В данной работе задача частично решена, а точнее, получено достаточное условие для крайности, а в двумерном симплексе получено необходимое и достаточное условие. Более того определено количество крайних точек множества БКО в двумерном симплексе. Теперь перейдем к необходимым понятиям.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [2]. Пусть S^{m-1} – $(m-1)$ -мерный симплекс. Оператор $V: S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ называется *квадратично стохастическим*, если

$$(Vx)_k = \sum_{i,j=1}^m p_{ij,k} x_i x_j, \quad k = 1, \dots, m, \quad (*)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in S^{m-1}$ и

$$p_{ij,k} = p_{ji,k} \geq 0 \quad \forall i, j, k = 1, \dots, m, \quad \sum_{k=1}^m p_{ij,k} = 1 \quad \forall i, j = 1, \dots, m. \quad (**)$$

Для каждого вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ положим $x_{\downarrow} = (x_{[1]}, x_{[2]}, \dots, x_{[m]})$, где $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \dots \geq x_{[m]}$ – компоненты вектора x , упорядоченные по невозрастанию.

Говорят, что x *мажорируется* y (или y *мажорирует* x), и пишут $x \prec y$, если

- 1) $\sum_{i=1}^k x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^k y_{[i]}, \quad k = 1, \dots, m-1,$
- 2) $\sum_{i=1}^m x_{[i]} = \sum_{i=1}^m y_{[i]}.$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [3]. КСО называется *бистохастическим*, если

$$Vx \prec x \quad \forall x \in S^{m-1}.$$

Обозначим через $\mathbf{B}$ множество бистохастических операторов. Очевидно, что $\mathbf{B} \neq \emptyset$ (например, единичный оператор является бистохастическим).

Пусть $(Vx)_k = \sum_{i,j=1}^m p_{ij,k} x_i x_j$ – КСО. Положим $A_k = (p_{ij,k})_{i,j=1,\dots,m} \quad \forall k = 1, \dots, m$. Тогда оператор $(*)$ имеет следующий вид:

$$Vx = [(A_1 x, x), (A_2 x, x), \dots, (A_m x, x)]$$

и

$$\sum_{i=1}^m A_i = E,$$

где E – матрица, все элементы которой равны 1. Из $(**)$ следует, что матрицы A_k неотрицательные и симметрические.

Введем обозначение

$$V = (A_1 | A_2 | \dots | A_m).$$

Для $\forall \alpha \subset I = \{1, 2, \dots, m\}$ пусть $|\alpha|$ – мощность множества α .

Пусть U – множество матриц, определенное следующим образом:

$$U = \left\{ A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,m} : a_{ij} = a_{ji} \geq 0, \sum_{i,j \in \alpha} a_{ij} \leq |\alpha|, \sum_{i,j \in I} a_{ij} = m \right\}. \quad (***)$$

ТЕОРЕМА 1 [1]. *Необходимым и достаточным условием для бистохастичности оператора V является условие $A_k \in U \ \forall k = 1, \dots, m$ и $\sum_{i=1}^m A_i = E$.*

Выпуклая оболочка конечного непустого множества точек в пространстве $\mathbb{R}^k$ называется *выпуклым многогранником*. Каждое ограниченное непустое пересечение конечного числа замкнутых полупространств есть выпуклый многогранник [5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Множество $\mathbf{B}$ является выпуклым многогранником.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждому квадратичному оператору соответствует кубическая матрица, которую можно вложить в пространство $\mathbb{R}^{m^3}$. Учитывая условия (**), ее можно вложить в $\mathbb{R}^{m^2(m-1)/2}$. Далее, каждое из условий (***) определяет замкнутое полупространство в пространстве $\mathbb{R}^{m^2(m-1)/2}$. Из теоремы 1 следует, что $\mathbf{B}$ состоит из пересечения этих полупространств. Очевидно, что данное пересечение не пусто и является ограниченным множеством в $\mathbb{R}^{m^2(m-1)/2}$, ибо оно лежит в положительном ортанте и в гиперплоскости $\sum_{i,j,k=1}^m p_{ij,k} = m^2$. Следуя Грюнбауму [5], мы заключаем, что $\mathbf{B}$ – замкнутый многогранник.

Так как $\mathbf{B}$ – выпуклый многогранник, $\mathbf{B}$ состоит из выпуклой комбинации его крайних точек. Поэтому представляет интерес описание его крайних точек.

Пусть W – выпуклое множество. Точка $x \in W$ называется *крайней*, если из $2x = x_1 + x_2$, $x_1, x_2 \in W$ следует, что $x = x_1 = x_2$. Множество крайних точек обозначим через $\text{extr } W$.

Множество U является компактным выпуклым множеством. Стало быть, существуют крайние точки этого множества. Предварительно опишем крайние точки множества U .

Квадратная матрица называется *матрицей перестановки*, если в каждой ее строке и в каждом столбце стоит ровно одна единица, а все остальные элементы являются нулями.

ЛЕММА 1. *Пусть $P \in U$ и P матрица перестановок. Тогда $P \in \text{extr } U$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем от противного. Пусть $P \notin \text{extr } U$; тогда существуют $A, B \in U$, $A \neq B$ такие, что $2P = A + B$. Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$, $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$; тогда $a_{ij} + b_{ij} = 0$ либо 2.

Если $a_{ij} + b_{ij} = 0$, то $a_{ij} = b_{ij} = 0$.

Если $a_{ij} + b_{ij} = 2$, то рассмотрим два случая.

- i) $i = j$; тогда $a_{ii} + b_{ii} = 2$. Так как $a_{ii}, b_{ii} \leq 1$, то $a_{ii} = b_{ii} = 1$.
- ii) $i \neq j$. Рассмотрим множество $\alpha = \{i, j\}$. Если $a_{ij} > 1$, то $\sum_{k,l \in \alpha} a_{kl} > 2$, что противоречит $A \in U$. Поэтому $a_{ij} \leq 1$.

Аналогично получаем, что $b_{ij} \leq 1$. Так как $a_{ij} + b_{ij} = 2$, то $a_{ij} = b_{ij} = 1$. Таким образом, $a_{ij} = b_{ij} \ \forall i, j = 1, \dots, m$.

Следовательно, $A = B$, что противоречит нашему предположению. Лемма доказана.

Следует отметить, что обратное утверждение неверно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Если $A \in \text{extr } U$ и не является матрицей перестановки, то $\exists \alpha_0 \subset I$ такой, что $\sum_{i,j \in \alpha_0} a_{ij} = |\alpha_0|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A не является матрицей перестановки. Тогда существует элемент $a_{i_0j_0} \notin \{1, 0\}$. Так как $\sum_{i,j \in I} a_{ij} = m$, то $\exists a_{i_1j_1} \notin \{1, 0\}$. Пусть $\sum_{\alpha} a_{ij} < |\alpha| \forall \alpha \subset I$. Тогда определим матрицы $B = (b_{ij})_{1,\dots,m}$ $C = (c_{ij})_{1,\dots,m}$ следующим образом:

$$B = \{b_{i_0j_0} = a_{i_0j_0} + \varepsilon, b_{i_1j_1} = a_{i_1j_1} - \varepsilon, b_{ij} = a_{ij} \text{ при остальных значениях } i, j\},$$

$$C = \{c_{i_0j_0} = a_{i_0j_0} - \varepsilon, c_{i_1j_1} = a_{i_1j_1} + \varepsilon, c_{ij} = a_{ij} \text{ при остальных значениях } i, j\}$$

для некоторого достаточно малого числа ε . Тогда не трудно заметить, что при $\sum_{\alpha} a_{ij} < |\alpha| \forall \alpha \subset I$ имеем $\sum_{\alpha} b_{ij} < |\alpha| \forall \alpha \subset I$ и $\sum_{\alpha} c_{ij} < |\alpha| \forall \alpha \subset I$. Следовательно, $B, C \in U$ и $B \neq C$, $B + C = 2A$, т.е. A не крайняя.

Опишем крайние точки при $m = 3$. Обозначим

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A \in U$, $A \neq M$. Имеем

$$A \in \text{extr } U \Leftrightarrow a_{ii} = 1 \vee 0, \quad a_{ij} = 1 \vee \frac{1}{2} \vee 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $A \in \text{extr } U$, то согласно утверждению 1 имеют место три случая:

- i) $a_{11} + 2a_{12} + a_{22} = 2$;
- ii) $a_{22} + 2a_{23} + a_{33} = 2$;
- iii) $a_{11} + 2a_{13} + a_{33} = 2$.

Каждый из случаев рассматривается аналогичным образом. Следовательно, мы будем рассматривать только один случай.

Пусть

$$a_{11} + 2a_{12} + a_{22} = 2. \quad (1)$$

Докажем, что $a_{11}, a_{22} \in \{1, 0\}$. Пусть $a_{11} \notin \{1, 0\} \Rightarrow$ либо $a_{12} \notin \{1, 0\}$, либо $a_{22} \notin \{1, 0\}$.

1) Пусть $a_{12} \notin \{1, 0\}$. Положим

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} - 2\varepsilon & a_{12} + \varepsilon & a_{13} \\ a_{12} + \varepsilon & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A'' = \begin{pmatrix} a_{11} + 2\varepsilon & a_{12} - \varepsilon & a_{13} \\ a_{12} - \varepsilon & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Значение $\varepsilon > 0$ можно выбрать столь малым, что все элементы матриц A' , A'' будут неотрицательными. Тогда, если $a_{11} + 2a_{13} + a_{33} < 2$, то $A', A'' \in U$, $A' \neq A''$, $2A = A' + A''$, но $A \in \text{extr } U$, поэтому

$$a_{11} + 2a_{13} + a_{33} = 2. \quad (2)$$

Так как $a_{11} + 2a_{13} + a_{33} = 2$, то либо $a_{13} \notin \{1, 0\}$, либо $a_{33} \notin \{1, 0\}$.

1а) $a_{13} \notin \{1, 0\}$. Положим

$$A' = \{a'_{11} = a_{11} - 2\varepsilon, a'_{13} = a_{13} + \varepsilon\}, \quad A'' = \{a''_{11} = a_{11} + 2\varepsilon, a''_{13} = a_{13} - \varepsilon\}.$$

Очевидно, $2A = A' + A''$ и $A \notin \text{extr } U \Rightarrow$ 1а) не имеет место.

1б) $a_{33} \notin \{1, 0\}$. Тогда положим

$$A' = \{a'_{11} = a_{11} - \varepsilon, a'_{33} = a_{33} + \varepsilon\}, \quad A'' = \{a''_{11} = a_{11} + \varepsilon, a''_{33} = a_{33} - \varepsilon\}$$

$\Rightarrow 2A = A' + A''$. Если $a_{22} + 2a_{23} + a_{33} < 2$, то $A \notin \text{extr } U$. Поэтому

$$a_{22} + 2a_{23} + a_{33} = 2. \quad (3)$$

Но так как $A \in U$, то условия (1)–(3) не выполняются одновременно, поэтому случай 1) не имеет место.

2) Пусть $a_{22} \notin \{1, 0\}$. Тогда

$$2A = A'\{a'_{11} = a_{11} - \varepsilon, a'_{22} = a_{22} + \varepsilon\} + A''\{a''_{11} = a_{11} + \varepsilon, a''_{22} = a_{22} - \varepsilon\}.$$

Если $a_{22} + 2a_{23} + a_{33} < 2$, то $A \notin \text{extr } U$. Поэтому $a_{22} + 2a_{23} + a_{33} = 2$. Пусть $a_{22} + 2a_{23} + a_{33} = 2$. Тогда либо $a_{23} \notin \{1, 0\}$, либо $a_{33} \notin \{1, 0\}$.

2а) $a_{23} \notin \{1, 0\}$. Тогда

$$2A = A'\{a'_{22} = a_{22} - 2\varepsilon, a'_{23} = a_{23} + \varepsilon\} + A''\{a''_{22} = a_{22} + 2\varepsilon, a''_{23} = a_{23} - \varepsilon\}.$$

То есть $A \notin \text{extr } U$.

2б) $a_{33} \notin \{1, 0\}$. Тогда

$$2A = A'\{a'_{22} = a_{22} - \varepsilon, a'_{33} = a_{33} + \varepsilon\} + A''\{a''_{22} = a_{22} + \varepsilon, a''_{33} = a_{33} - \varepsilon\}.$$

Если $a_{11} + 2a_{13} + a_{33} < 2$, то $A', A'' \in U$ и $A \notin \text{extr } U$. Поэтому $a_{11} + 2a_{13} + a_{33} = 2$. Но (1)–(3) не выполняются одновременно. Отсюда можно делать вывод, что если $A \in \text{extr } U$, то $a_{11} \in \{1, 0\}$. Случай $a_{22} \notin \{1, 0\}$ рассматривается аналогично. Поэтому $a_{22} \in \{1, 0\}$.

Итак, если $A \in \text{extr } U$, то имеет место 4 случая

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_{13} \\ 1 & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & a_{13} \\ 1/2 & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & a_{13} \\ 1/2 & 1 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим только один случай. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $a_{33} \notin \{1, 0\}$. Если $2a_{13} + a_{23} < 1$, то

$$2A = A'\{a'_{33} = a_{33} - 2\varepsilon, a'_{13} = a_{13} + \varepsilon\} + A''\{a''_{33} = a_{33} + 2\varepsilon, a''_{13} = a_{13} - \varepsilon\}$$

и $A \notin \text{extr } U$.

Если $2a_{23} + a_{33} < 1$, то

$$2A = A'\{a'_{33} = a_{33} - 2\varepsilon, a'_{23} = a_{23} + \varepsilon\} + A''\{a''_{33} = a_{33} + 2\varepsilon, a''_{23} = a_{23} - \varepsilon\}.$$

Следовательно, $a_{13} + a_{33} = 1$ и $a_{23} + a_{33} = 1$. Но эти условия не выполняются одновременно. Поэтому $a_{33} \in \{1, 0\}$. Но так как $a_{33} \neq 1$ (A не перестановочная матрица), то $a_{33} = 0$. Тогда $a_{13} + a_{23} = 1/2$. Если $0 < a_{13} < 1/2$, то $0 < a_{23} < 1/2$ и

$$2A = A'\{a'_{13} = a_{13} - \varepsilon, a'_{23} = a_{23} + \varepsilon\} + A''\{a''_{13} = a_{13} + \varepsilon, a''_{23} = a_{23} - \varepsilon\}.$$

Поэтому $a_{13}, a_{23} \in \{1/2, 0\}$. В этом случае находим две крайние точки множества U :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрев все остальные случаи получим следующее

СЛЕДСТВИЕ 1. *Имеем $|\text{extr } U| = 25$.*

В работе [1; гл. 3] было высказано предположение, что оператор $V = (A_1 | A_2 | \dots | A_m)$ является крайним для $\mathbf{B}$ тогда и только тогда, когда $A_i \in \text{extr } U \ \forall i = 1, \dots, m$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $V = (A_1 | \dots | A_m) \in \text{extr } \mathbf{B}$. Тогда $V_\pi = (A_{\pi(1)} | \dots | A_{\pi(m)}) \in \text{extr } \mathbf{B}$ для любой перестановки π множества индексов $\{1, 2, \dots, m\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V_\pi \notin \text{extr } \mathbf{B}$. Тогда $\exists V', V'' \in \mathbf{B}$, $V' \neq V''$, такие, что $2V_\pi = V' + V''$. Пусть $V' = (A'_1 | \dots | A'_m)$, $V'' = (A''_1 | \dots | A''_m)$. Тогда $(2A_{\pi(1)} - A'_1 - A''_1 | \dots | 2A_{\pi(m)} - A'_m - A''_m) = \mathbf{0}$. Так как матрицы $2A_{\pi(i)} - A'_i - A''_i$ симметричны, то $2A_{\pi(i)} = A'_i + A''_i$ и, следовательно, $2A_i = A'_{\pi^{-1}(i)} + A''_{\pi^{-1}(i)}$. Так как

$$\sum_{i=1}^m A'_i = \sum_{i=1}^m A''_i = E,$$

то

$$\sum_{i=1}^m A'_{\pi^{-1}(i)} = \sum_{i=1}^m A''_{\pi^{-1}(i)} = E.$$

Положим $W' = (A'_{\pi^{-1}(1)} | \dots | A'_{\pi^{-1}(m)})$ и $W'' = (A''_{\pi^{-1}(1)} | \dots | A''_{\pi^{-1}(m)})$. Тогда $W', W'' \in \mathbf{B}$, $W' \neq W''$ и $2V = W' + W''$. Получаем противоречие $V \notin \text{extr } \mathbf{B}$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $V = (A_1 | \dots | A_m)$. Если для любой перестановки π любых $m-1$ элементов из $\{1, 2, \dots, m\}$ $A_{\pi(k)} \in \text{extr } U$, то $V \in \text{extr } \mathbf{B}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3 достаточно доказать, что если $A_1, A_2, \dots, A_{m-1} \in \text{extr } U$, то $V \in \text{extr } \mathbf{B}$. Последнее утверждение докажем от противного. Пусть $V \notin \text{extr } \mathbf{B}$. Тогда $\exists V', V'' \in \mathbf{B}$, $V' \neq V''$, такие, что $2V = V' + V''$. Пусть $V' = (A'_1 | \dots | A'_m)$, $V'' = (A''_1 | \dots | A''_m)$. Тогда

$$(2A_1 - A'_1 - A''_1 | \dots | 2A_m - A'_m - A''_m) = \mathbf{0}.$$

Следовательно, $2A_i - A'_i - A''_i = \mathbf{0} \ \forall i = 1, \dots, m$. Так как $A_i \in \text{extr } U \ \forall i \geq 2$, то $A'_i = A''_i \ \forall i \geq 2$. Из равенства $\sum_{i=1}^m A'_i = \sum_{i=1}^m A''_i = E$ получаем, что $A'_1 = A''_1$. Таким образом, $V' \neq V''$, что противоречит тому, что $V \notin \text{extr } \mathbf{B}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если $A_i \in \text{extr } U \ \forall i = 1, \dots, m$, то $V \in \text{extr } \mathbf{B}$. Однако обратное утверждение неверно.*

ПРИМЕР. Рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \\ x'_2 &= x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_3, \\ x'_3 &= x_1^2 + x_1 x_2 + x_2 x_3. \end{aligned}$$

Этому оператору соответствуют матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Не трудно заметить, что две из них крайние (теорема 2). Тогда из теоремы 4 следует, что $V \in \text{extr } \mathbf{B}$.

Являются ли условия теоремы 4 необходимыми и достаточными? В двумерном симплексе этот вопрос решается утвердительно.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $V = (A_1|A_2|A_3) \in \mathbf{B}$. Тогда и только тогда $V \in \text{extr } \mathbf{B}$, когда по крайней мере две из трех матриц A_1, A_2, A_3 являются крайними в $\mathbf{U}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства этой теоремы мы воспользуемся теоремой 3 из [6], которая гласит, что если $V \in \text{extr } \mathbf{B}$, то все элементы матриц A_1, A_2, A_3 равны либо 0, либо $1/2$, либо 1. Следовательно, если $V \in \text{extr } \mathbf{B}$, то либо $A_1, A_2, A_3 \in \text{extr } \mathbf{U}$, либо $A_1, A_2, A_3 = M$. В случаях, когда $A_1, A_2, A_3 \in \text{extr } \mathbf{U}$ и одна из матриц равна M , теорема доказана. Теперь остался лишь случай, когда некоторые из матриц A_1, A_2, A_3 равны M . Все они не могут равняться M , так как сумма этих матриц не дает нам E . Если две из этих трех матриц, допустим A_1, A_2 , равны M , то легко можно доказать, что образующий оператор не является крайним для $\mathbf{B}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. При $m = 3$ $|\text{extr } \mathbf{B}| = 222$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V \in \text{extr } \mathbf{B}$, $V = (A_1|A_2|A_3)$. Из теоремы 4 следует, что $A_2, A_3 \in \text{extr } \mathbf{U}$ с точностью до перестановки. Поэтому из $A_1 + A_2 + A_3 = E$ следует, что либо $A_1 \in \text{extr } \mathbf{U}$, либо $A_1 = M$.

Пусть $A_1 \in \text{extr } \mathbf{U}$. Надо выбрать те тройки крайних точек, сумма которых равна E . Количество таких троек равно 31. В случае, когда $A_1 = M$, количество крайних точек равно 6.

За счет перестановки заключаем, что $|\text{extr } \mathbf{B}| = 37 \times 3! = 222$.

Автор выражает искреннюю благодарность проф. Р. Н. Ганиходжаеву за поставленную задачу и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Н. Ганиходжаев, *Исследования по теории квадратичных стохастических операторов*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, Ташкент, 1993. [2] Ю. И. Любич, *Математические структуры в популяционной генетике*, Наукова Думка, Киев, 1983. [3] А. Маршалл, И. Олкин, *Неравенства: Теория мажоризации и ее приложения*, Мир, М., 1983. [4] G. Birkhoff, "Tres observaciones sobre el algebra lineal", *Univ. Nac. Tucumán. Revista A*, 5 (1946), 147–151. [5] B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967. [6] Р. Н. Ганиходжаев, *УМН*, 48:4 (1993), 231–232.

Фаррух Шахиди

Национальный университет Узбекистана

E-mail: farruh.shahidi@gmail.com

Поступило

05.03.2007

Исправленный вариант

05.02.2008