Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Быстриков, О линейных цепочках раздутий в связи с гипотезой о якобиане, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 5, 783–786

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm556>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:19:10

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПОЧКАХ РАЗДУТИЙ В СВЯЗИ С ГИПОТЕЗОЙ О ЯКОВИАНЕ

А. С. Быстриков

1. Введение. В работе [1] А. Г. Витушкиным была поставлена задача доказать следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Если якобиан пары многочленов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ равен 1, то при любом натуральном n и при любых значениях параметров $p_1, p_2, \dots, p_n$ после подстановки $x \rightarrow xy^n + p_n y^{n-1} + \dots + p_2 y + p_1$, $y \rightarrow 1/y$ хотя бы одна из функций $P(x, y)$ или $Q(x, y)$ многочленом быть перестанет (в новых переменных).*

Это утверждение легко вытекает из еще не доказанной гипотезы о якобиане, и было выдвинуто в целях ее исследования. Из него следует, что если контрпример к этой гипотезе существует, то он устроен в некотором (вполне конкретном) смысле сложно. Постановка задачи также напрямую связана с некоторыми примерами локально-обратимых отображений, построенных в связи с этой гипотезой. Подробнее об этом см. [1] и [2].

В упомянутой работе [1] утверждение 1 доказано для $n \leq 3$. Основной результат настоящей статьи – доказательство требуемого утверждения для любого n в предположении, что $p_2 \neq 0$. Этого, кстати, достаточно, чтобы получить еще одно доказательство для случая $n \leq 3$.

В п. 3 мы опишем геометрическую конструкцию и с ее помощью – другую задачу (в геометрических терминах), алгебраической переформулировкой которой является исходная задача. Именно эта конструкция имеет непосредственное приложение к гипотезе о якобиане и используется при решении новой задачи, а сама эта задача обретает более общую и естественную форму. В п. 5 основной результат выводится из критерия точности формы ω , доказанного в п. 4.

2. Один частный случай. Нам удобно случай $p_2 = p_3 = \dots = p_n = 0$ рассмотреть отдельно и исключить его из дальнейших рассмотрений. Для этого нам понадобится лемма.

ЛЕММА. *Если $P(x, y)$ – многочлен без свободного члена и $P(xy^n, 1/y)$ – тоже многочлен, то $P(x, y)$ делится на x .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно условию $f(x, y) = P(xy^n, 1/y)$ – многочлен. Тогда $f(0, y) = P(0, 1/y)$. В этом равенстве слева стоит многочлен от y , справа – многочлен от $1/y$, поэтому обе части этого равенства представляют константу. Учитывая, что свободного члена нет, заключаем, что каждый моном в разложении $P(x, y)$ делится на x , т.е. весь многочлен делится на x .

СЛЕДСТВИЕ. *Утверждение 1 верно, если $p_2 = p_3 = \dots = p_n = 0$.*

Пусть пока $p_1 = 0$. Предполагая противное и считая, что $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ не содержат свободных членов, согласно лемме получаем, что $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ делятся на x , но тогда и их якобиан тоже делится на x ; противоречие. Общий случай получается из доказанного сдвигом аргумента $x \rightarrow x - p_1$.

3. Линейные цепочки раздутий. Смысл утверждения 1 состоит в том, что не существует контрпримера к гипотезе о якобиане, особенности которого на бесконечности разрешаются линейной цепочкой раздутий. Цепочка раздутий называется *линейной*, если центр каждого следующего раздутия лежит на исключительной кривой предыдущего и вне исключительных кривых, полученных ранее. Для вывода из такой постановки исходной задачи необходимо воспользоваться координатами.

Пусть $[\xi_0 : \xi_1 : \xi_2]$ – однородные координаты на $\mathbb{CP}^2$ и пусть в аффинной карте $\{\xi_0 \neq 0\}$ с аффинными координатами $(x, y) = (\xi_1/\xi_0, \xi_2/\xi_0)$ задана голоморфная 2-форма $\omega = dx \wedge dy$. На всю плоскость $\mathbb{CP}^2$ она продолжается как мероморфная с тройным полюсом вдоль дивизора $\{\xi_0 = 0\}$.

Будем рассматривать многообразие M , получающееся из $\mathbb{CP}^2$ линейной цепочкой из $n + 1$ раздутия. Центром первого раздутия будем считать точку $[0 : 0 : 1]$. При выборе центров последующих раздутий каждый раз у нас возникает одна дополнительная степень свободы, так что вся цепочка задается n комплексными параметрами $p_1, p_2, \dots, p_n$, которые мы зафиксируем и будем считать неизменными.

Само многообразие M без одной точки реализуется как подмногообразие в $\mathbb{CP}^2 \times (\mathbb{CP}^1)^{n+1}$, заданное системой уравнений

$$\begin{aligned} \xi_0 u_0 &= \xi_1 v_0, & \xi_0 u_i v_{i-1} &= \xi_2 v_i (u_{i-1} - p_i v_{i-1}), & i &= 1, 2, \dots, n, \\ & & [\xi_0 : \xi_1 : \xi_2] &\neq [0 : 1 : 0], \end{aligned} \quad (1)$$

где $[u_i : v_i]$ – однородные координаты на соответствующих экземплярах $\mathbb{CP}^1$. Далее мы будем пользоваться аффинными координатами $x_i = u_i/v_i$. Обозначим через U область в M , расположенную в аффинной части $\mathbb{CP}^2 \times (\mathbb{CP}^1)^{n+1}$. Она задается следующими уравнениями:

$$x_0 = x, \quad x_i = y(x_{i-1} - p_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

В замыкание поверхности U , кроме нее самой, попадают следующие кривые, в каждой точке которых $[\xi_0 : \xi_1 : \xi_2] = [0 : 0 : 1]$:

$$\begin{aligned} E_n &= \{x_0 = p_1, x_1 = p_2, \dots, x_{n-1} = p_n, x_n - \text{любое}\}, \\ E_{n-1} &= \{x_0 = p_1, x_1 = p_2, \dots, x_{n-1} - \text{любое}, x_n = \infty\}, \\ &\dots\dots\dots \\ E_0 &= \{x_0 - \text{любое}, x_1 = x_2 = \dots = x_n = \infty\}. \end{aligned}$$

Это исключительные кривые (кроме E_0), возникающие при раздутиях (они занумерованы в порядке появления). Интересующая нас поверхность S – это $U \cup (E_n \setminus \{a\})$, где a – точка на E_n , в которой $x_n = \infty$.

Предположение о возможности контрпримера к гипотезе о якобиане, особенности которого на бесконечности разрешались бы линейной цепочкой раздутий, эквивалентно возможности при каких-нибудь значениях параметров $p_1, p_2, \dots, p_n$ представить форму ω в виде $dP \wedge dQ$, где P и Q – рациональные функции, регулярные на S . К сожалению, в такой форме вопрос не изучен, и цель нашего исследования – ответить на более слабый вопрос: при каких значениях $p_1, p_2, \dots, p_n$ прообраз формы ω будет формой голоморфной, голоморфно разложимой и точной на S ?

Ответ таков: форма ω голоморфна на S тогда и только тогда, когда $n \geq 2$. Если среди параметров $p_2, p_3, \dots, p_n$ есть не равный нулю, то форма ω голоморфно разложима на S , при этом ω точна на S тогда и только тогда, когда $p_2 = 0$. Обоснование этого утверждения дано в следующих разделах.

4. Поверхность S . Из вышеизложенного описания следует, что S состоит в точности из тех точек поверхности M , в которых все функции $x_0, x_1, \dots, x_n$ принимают конечные значения. Таким образом, определена проекция $\pi : S \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ формулой

$$\pi([\xi_0 : \xi_1 : \xi_2], x_0, x_1, \dots, x_n) = (x_0, x_1, \dots, x_n).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ. Определим в $\mathbb{C}^{n+1}$ с координатами $x_0, x_1, \dots, x_n$ поверхность S' условием

$$\text{rank} \begin{pmatrix} x_0 - p_1 & x_1 - p_2 & \dots & x_{n-1} - p_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} = 1. \quad (3)$$

Если $n \geq 2$ и среди параметров $p_2, \dots, p_n$ есть ненулевой, то отображение π биголоморфно отображает S на S' .

Прежде чем доказывать это утверждение, изучим поверхность S' более подробно. Рассмотрим матрицу (3) в некоторой точке S' . Поскольку ее ранг равен 1, строки ее пропорциональны и не могут быть нулевыми одновременно. Поэтому коэффициент их пропорциональности корректно задает отображение $S' \rightarrow \mathbb{CP}^1$. На открытом подмножестве S' , где i -й столбец ненулевой, этот коэффициент задается пропорцией $[x_{i-1} - p_i : x_i]$. Отсюда следует его голоморфность.

Пусть U_1, U_2 — области в S' , в которых соответственно отличны от нуля первая и вторая строки матрицы (3). Функция y голоморфна на U_1 и равна отношению второй строки матрицы (3) к первой, а (мультипликативно) обратная к ней функция y^{-1} голоморфна в U_2 и равна там отношению первой строки ко второй.

ЛЕММА. Области U_1 и U_2 в S' биголоморфны $\mathbb{C}^2$, причем (x_0, y) — голоморфные координаты на U_1 , а (x_n, y^{-1}) — голоморфные координаты на U_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из определения функции y следует, что в области U_1 справедливы формулы (они получаются индуктивно друг из друга)

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0, \\ x_1 &= x_0 y - p_1 y, \\ x_2 &= x_0 y^2 - p_1 y^2 - p_2 y, \\ &\dots \\ x_n &= x_0 y^n - p_1 y^n - \dots - p_n y. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично в области U_2 справедливы формулы

$$\begin{aligned} x_n &= x_n, \\ x_{n-1} &= x_n y^{-1} + p_n, \\ &\dots \\ x_0 &= x_n y^{-n} + p_n y^{-(n-1)} + \dots + p_2 y^{-1} + p_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, внешние координаты $x_0, x_1, \dots, x_n$ голоморфно выражаются в области U_1 через x_0, y , а в области U_2 — через x_n, y^{-1} . Поэтому функции x_0, y голоморфно и инъективно вкладывают в $\mathbb{C}^2$ область U_1 , а x_n, y^{-1} — область U_2 .

Сюръективность проверяется непосредственно. Так, взяв произвольные значения (x_0, y) , по формулам (4) определяем точку в $\mathbb{C}^{n+1}$. Для этой точки вторая строка матрицы (3) пропорциональна первой с коэффициентом y , причем первая строка может стать нулевой, лишь если $n < 2$ или все числа $p_2, \dots, p_n$ равны нулю, а этот случай исключен. Значит, полученная точка лежит в U_1 , и сюръективность доказана.

Обратимся теперь к доказательству утверждения. Поскольку на поверхности $S \subset M$ координаты $x_0, x_1, \dots, x_n$ конечны и справедливы формулы (1), то в матрице (3), взятой в произвольной точке из S , отношение первой строки ко второй будет равно $[\xi_0 : \xi_2]$. Эта пропорция определена корректно, ибо все точки на M , с координатами $[0 : 1 : 0]$ лежат на E_0 , а $S \subset M \setminus E_0$. Таким образом, $\pi(S) \subset S'$.

Голоморфность отображения π очевидна. Обратное к нему отображение F на U_1 задается формулой $F(x_0, x_1, \dots, x_n) = ([1 : x_0 : y], x_0, x_1, \dots, x_n)$, а на U_2 — формулой $F(x_0, x_1, \dots, x_n) = ([y^{-1} : x_0 y^{-1} : 1], x_0, x_1, \dots, x_n)$. Простая проверка этих формул предоставляется читателю.

5. Основной результат. Прообраз формы ω в области U_1 есть $dx_0 \wedge dy$, а в области $U_2 - y^{-(n-2)} dy^{-1} \wedge dx_n$, поэтому он голоморфен только при $n \geq 2$.

Предполагаем далее, что $n \geq 2$ и что среди чисел $p_2, \dots, p_n$ есть ненулевые.

ТЕОРЕМА. Голоморфная 2-форма $\omega = dx_0 \wedge dy$, заданная на $U_1 \subset S'$, голоморфно продолжается на S' единственным образом. При этом продолженная форма $\tilde{\omega}$

- 1) точна на S' тогда и только тогда, когда $p_2 = 0$;
- 2) при любых $p_1, p_2, \dots, p_n$ голоморфно разложима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k \geq 2$ – минимальный индекс, для которого $p_k \neq 0$. Рассмотрим голоморфные 2-формы на $\mathbb{C}^{n+1}$:

$$\omega_1 = \frac{1}{p_k^2(k-1)} dx_k \wedge (k^2 x_0 dx_{k-1} - (kx_{k-1} - p_k(k-1)) dx_0), \quad (6)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{p_k} d\left(x_k dx_0 - \frac{k}{k-2} x_{k-1} dx_1\right). \quad (7)$$

Вторая из них определена, если $k \neq 2$. Пользуясь формулами (4) и (5), легко проверить, что $\omega_1|_{U_1} = \omega_2|_{U_1} = \omega$. Таким образом, формы ω_1 и ω_2 осуществляют голоморфное продолжение формы ω на $\mathbb{C}^{n+1}$ и, в частности, на S' . Поскольку ω была определена на открытом плотном подмножестве S' , ее продолжение на S' единственно. Обозначим его через $\tilde{\omega}$. Формулы (6) и (7) показывают, что $\tilde{\omega}$ голоморфно разложима в S' (поскольку на S' она совпадает с ω_1) и при $k \neq 2$ точна (поскольку на S' она совпадает с ω_2).

Докажем теперь, что при $p_2 \neq 0$ форма $\tilde{\omega}$ не точна. Так как $x_n = x_0 y^n - p_1 y^n - \dots - p_n y$, то $dx_n \wedge dy^{-1} = -y^{n-2} dx_0 \wedge dy$, поэтому $\tilde{\omega} = -y^{-(n-2)} dx_n \wedge dy^{-1}$ в области U_2 .

Пусть $\varphi_1 = x_0 dy$ и $\varphi_2 = -x_n y^{-(n-2)} dy^{-1}$ – дифференциальные 1-формы на U_1 и U_2 соответственно. Легко видеть, что в области U_1 верно равенство $\tilde{\omega} = d\varphi_1$, а в U_2 – равенство $\tilde{\omega} = d\varphi_2$.

Если предположить, что $\tilde{\omega}$ точна на S' , то существует 1-форма $\varphi \in C^\infty(S')$ такая, что $\tilde{\omega} = d\varphi$ всюду на S' . Поскольку U_1 односвязна, форма $\varphi_1 - \varphi$, будучи замкнутой в U_1 , точна. Пусть $\varphi_1 - \varphi = df_1$, $f_1 \in C^\infty(U_1)$. Аналогично существует $f_2 \in C^\infty(U_2)$ такая, что $\varphi_2 - \varphi = df_2$. Тогда в пересечении $U_1 \cap U_2$ форма $\varphi_1 - \varphi_2 = d(f_1 - f_2)$ должна быть точной. Однако проверка показывает, что это не так:

$$\varphi_2 = x_n y^{-n} dy = (x_0 - p_1 - p_2 y^{-1} - \dots - p_n y^{-(n-1)}) dy,$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (p_1 + p_2 y^{-1} + \dots + p_n y^{-(n-1)}) dy.$$

Одномерный цикл $\{x_0 = 0, |y| = 1\}$ содержится в $U_1 \cap U_2$ и интеграл по нему от формы $\varphi_1 - \varphi_2$ равен $2\pi i p_2 \neq 0$. Поэтому форма $\varphi_1 - \varphi_2$ не точна в $U_1 \cap U_2$; следовательно, форма $\tilde{\omega}$ не точна на S' .

6. Комментарий. Вывод, следующий из доказанной теоремы, таков: если контрпример к гипотезе о якобиане существует, то особенности его мероморфного продолжения на $\mathbb{CP}^2$ разрешаются либо нелинейной цепочкой раздутий, либо линейной цепочкой не менее чем из четырех раздутий и притом центр третьего раздутия однозначно определен первыми двумя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если раздутий меньше, чем 3, форма ω не голоморфна. Если их 3, то они определяются параметрами p_1 и p_2 . Если $p_2 \neq 0$, форма ω на S не точна, а если $p_2 = 0$, применимо следствие п. 2. Таким образом, раздутий должно быть не менее четырех, и требование точности $p_2 = 0$ фиксирует центр третьего раздутия.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Витушкин А. Г. // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 2. С. 308–312.
2. Витушкин А. Г. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. № 2. С. 269–279.