Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Т. Караев, Новые доказательства неравенства Хаагерупа–Харпа, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 5, 787–788

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm557>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:45:56

НОВЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕРАВЕНСТВА ХААГЕРУПА–ХАРПА

М. Т. Караев

1. Пусть $B(H)$ – алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H . Числовой областью оператора $T \in B(H)$ является множество

$$W(T) = \{(Tx, x) : x \in (H)_1\},$$

где $(H)_1 = \{x \in H : \|x\| = 1\}$ – единичная сфера пространства H , а числовой радиус оператора T определяется равенством

$$\omega(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in W(T)\}.$$

Для любого $T \in B(H)$ известно, что

$$\frac{\|T\|}{2} \leq \omega(T) \leq \|T\| \quad (1)$$

(см., например, [1], [2]). Для конкретных операторов представляет особый интерес получение для их числового радиуса более тонких оценок, чем (1). Так, в работе [3] Хаагеруп и Харп доказали для числового радиуса произвольного нильпотентного оператора $T \in B(H)$ с порядком нильпотентности $n \geq 2$ (т.е., $T^n = 0$, $T^{n-1} \neq 0$) неравенство

$$\omega(T) \leq \|T\| \cos \frac{\pi}{n+1}. \quad (2)$$

В дальнейшем даны другие доказательства неравенства (2) в работах [4]–[6]. В этой заметке мы даем новые, и по-видимому, более простые доказательства неравенства (2) Хаагерупа–Харпа. (Основные понятия, которые будут использоваться в данной статье, могут быть найдены, например, в [7]–[9]).

2. ТЕОРЕМА 1. Пусть $T \in B(H)$ – нильпотентное сжатие с порядком нильпотентности $n \geq 2$. Тогда

$$\omega(T) \leq \cos \frac{\pi}{n+1}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см. [7]), что T унитарно эквивалентен своему модельному оператору M_θ , $M_\theta = P_\theta S_E \mid K_\theta$, действующему в модельном пространстве $K_\theta = H^2(E) \ominus \theta H^2(E)$, где E – гильбертово пространство, причем $\dim E = \dim(I - T^*T)H$; $H^2(E)$ – пространство Харди E -значных аналитических в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций; θ – двусторонняя внутренняя функция (характеристическая функция сжатия T), т.е. θ является $B(E)$ -значной аналитической и ограниченной в D функцией, для которой $\theta(\zeta)^* \theta(\zeta) = \theta(\zeta) \theta(\zeta)^* = I_E$ при почти всех $\zeta, \zeta \in \mathbb{T} = \partial D$; $S_E, S_E f = zf$, – кратный сдвиг в $H^2(E)$ и P_θ – ортогональный проектор пространства $H^2(E)$ на K_θ . Теперь, если $f \in K_\theta$, то $z^n f \in \theta H^2(E)$, так как $P_\theta z^n f = M_\theta^n f = 0$. Если же $f \in \theta H^2(E)$, то $f = \theta g$ для некоторого $g \in H^2(E)$, откуда $z^n f = \theta(z^n g) \in \theta H^2(E)$. Таким образом, $z^n H^2(E) \subset \theta H^2(E)$. Отсюда вытекает включение $K_\theta \subset H^2(E) \ominus z^n H^2(E)$ и, следовательно, подпространство K_θ состоит из полиномов (векторных полиномов) $x(z) = \sum_{m=0}^{n-1} \hat{x}(m) z^m$. Тогда для любого $x \in (K_\theta)_1$ имеем

$$\begin{aligned} |(M_\theta x, x)| &= |(P_\theta S_E x, x)| = |(S_E x, x)| \\ &= \left| \left(S_E \sum_{m=0}^{n-1} \hat{x}(m) z^m, \sum_{m=0}^{n-1} \hat{x}(m) z^m \right) \right| = \left| \left(\sum_{m=0}^{n-1} \hat{x}(m) z^{m+1}, \sum_{m=0}^{n-1} \hat{x}(m) z^m \right) \right| \\ &= \left| \sum_{m=0}^{n-2} (\hat{x}(m), \hat{x}(m+1))_E \right| \leq \sum_{m=0}^{n-2} \|\hat{x}(m)\|_E \|\hat{x}(m+1)\|_E. \end{aligned}$$

Поскольку $\omega(T) = \omega(M_\theta)$, остальное вытекает из следующей леммы, доказательство которой содержится, например, в [10].

ЛЕММА 1. Пусть $k \geq 2$ – целое число. Тогда

$$\max \left\{ \sum_{m=0}^{k-2} a_m a_{m+1} : \sum_{m=0}^{k-1} a_m^2 = 1, a_m \geq 0 \ (m = 0, 1, \dots, k-1) \right\} = \cos \frac{\pi}{k+1}.$$

Заметим, что в приведенном доказательстве, по существу, весьма незначительно используется строение канонической модели (описание которой довольно сложно); достаточно существования унитарной дилатации у любого сжатия. Это замечание позволяет упростить приведенное доказательство следующим образом.

Пусть T – нильпотентное сжатие и U – его унитарная дилатация. Фиксируем вектор $h \in H$, $\|h\| = 1$, и рассмотрим ограничение оператора U на его циклическую оболочку. Известно, что оно реализуется в виде $f(t) \rightarrow e^{it} f(t)$, $f \in L^2(-\pi, \pi)$. Пусть в этой реализации вектору h соответствует функция $h(t)$. Из определения унитарной дилатации и равенства $T^n = 0$ вытекает, что $\int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|^2 e^{ikt} dt = 0$ при $|k| \geq n$. Следовательно, $|h(t)|^2$ – тригонометрический многочлен вида $\sum_{j=-n}^{n-1} c_j e^{ijt}$. Согласно теореме Фейера

$$|c_1| \leq c_0 \cos \frac{\pi}{n+1}.$$

Ясно, что $c_0 = \|h\| = 1$, $c_1 = (h, Uh)$. Этим доказано неравенство (3).

Отметим, что аналитическая подоплека приведенных доказательств та же, что в работе [3], а именно, классическая теорема Фейера (заметим, что если перейти от последовательностей чисел в лемме 1 к квадратам модулей тригонометрических многочленов с этими коэффициентами, то становится ясным, что лемма 1, это именно теорема Фейера), и что идея использования унитарной дилатации содержится в работе [5]; там, однако, она была применена для несколько иных целей (для модификации неравенства (3)).

Я благодарен рецензенту за ряд конструктивных советов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Halmos P. R. A Hilbert Space Problem Book. New York: Springer, 1982.
2. Gustafson K. E., Rao D. K. M. Numerical Range. The Field of Values of Linear Operators and Matrices. Berlin: Springer, 1996.
3. Haagerup U., Harpe P. // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 115. P. 371–379.
4. Pop C. // Revue Roum. Math. Pures et Appl. 1998. V. 93. P. 9–10.
5. Badea C., Cassier G. Constrained von Neumann inequalities // Preprint.
6. Suen C.-Y. // Positivity. 1998. V. 2. P. 301–310.
7. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.
8. Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980.
9. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. М.: ИЛ, 1963.
10. Поля Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. 3 изд. М.: Наука, 1978.

Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку
E-mail: garayev@fef.sdu.edu.tr

Поступило
01.10.2003