Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Неклюдов, Производная меры Винера на траекториях в компактной группе Ли, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 5, 789–792

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm558>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 13:27:29

ПРОИЗВОДНАЯ МЕРЫ ВИНЕРА НА ТРАЕКТОРИЯХ В КОМПАКТНОЙ ГРУППЕ ЛИ

М. Ю. Неклюдов

Пространством Камерона–Мартина H меры Радона μ , определенной на локально выпуклом пространстве X , называется множество направлений $h \in X$, вдоль которых эта мера дифференцируема. Мера μ называется *дифференцируемой вдоль направления* h , если существует такая функция $\beta_h^\mu \in L^1(\mu)$, что справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_X \partial_h f(x) d\mu = - \int_X f(x) \beta_h^\mu(x) d\mu$$

для любой гладкой цилиндрической функции f . При этом функция β_h^μ называется логарифмической производной меры μ вдоль h . Аналогично определяется дифференцируемость меры вдоль векторного поля $v: X \rightarrow X$ (точные определения приводятся ниже). В статье [1] была доказана дифференцируемость мер вдоль некоторого класса векторных полей, принимающих значения в пространстве Камерона–Мартина. В настоящей работе дано описание класса векторных полей, не принимающих значения в пространстве Камерона–Мартина меры Винера на $C([0, 1], \mathbb{R}^n)$ ни в одной точке, вдоль которых эта мера дифференцируема. Поля, значения которых не принадлежат пространству Камерона–Мартина, естественно возникают при рассмотрении мер на пространствах функций со значениями в группах Ли [2]. С помощью доказанного результата описан один класс векторных полей на траекториях в компактной связной группе G , вдоль которых дифференцируема мера Винера W_G^Z на $C([0, 1], G)$, и найдена логарифмическая производная вдоль этих полей.

1. Обозначения и терминология. Если X – топологическое пространство, то $B(X)$ – это σ -алгебра его борелевских подмножеств, $M(X)$ – векторное пространство всех (конечных) счетно-аддитивных мер на $B(X)$, $C_b(X)$ – пространство всех ограниченных непрерывных вещественных функций на X ; всякое множество $A \subset X$ считается наделенным топологией, индуцированной топологией пространства X . Если X_1 и X_2 – топологические пространства, то $C(X_1, X_2)$ – это пространство всех непрерывных отображений X_1 в X_2 , наделенное компактно-открытой топологией. Если $\nu \in M(X)$ и $A \in B(X)$, то ν_A – это сужение ν на $B(A)$, так что $\nu_A \in M(A)$.

Пусть G – компактная связная группа Ли, реализованная как подгруппа $O(\mathbb{R}^k) \cong \mathbb{R}^{k^2}$, g – ее алгебра Ли. В $\mathbb{R}^{k^2}$ введено скалярное произведение $(A, B) = \text{tr } AB^*$, инвариантное относительно действия группы $O(\mathbb{R}^k)$; G_ε – ε -окрестность G в $\mathbb{R}^{k^2}$. Пусть также $\exp(\cdot): g \rightarrow G$ – экспоненциальное отображение g в G .

Пусть $C_b^{\text{cyl}}([0, 1], \mathbb{R}^n)$ – пространство всех ограниченных вещественных цилиндрических функций на $C([0, 1], \mathbb{R}^n)$ и $\sigma = \sigma(C([0, 1], \mathbb{R}^n), C_b^{\text{cyl}}([0, 1], \mathbb{R}^n))$; функция $F: C([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется *цилиндрической*, если существует $k \in \mathbb{N}$, $t_1, t_2, \dots, t_k \in (0, 1)$ и $\psi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^1$ такие, что для всех $g \in C([0, 1], \mathbb{R}^n)$ $F(g) = \psi(g(t_1), g(t_2), \dots, g(t_k))$. Аналогично определяется $C_b^{\text{cyl}}([0, 1], G)$ – пространство всех ограниченных цилиндрических функций на $C([0, 1], G)$.

Для всякого $z \in G$ символ W_G^Z обозначает меру Винера на $C([0, 1], G)$, сосредоточенную на функциях, принимающих значение z при $t = 0$ (определение меры Винера на траекториях в многообразии приведено в [3]); $W_{\mathbb{R}^n}^Z$ – мера Винера на $C([0, 1], \mathbb{R}^n)$, сосредоточенная на функциях, принимающих значение z при $t = 0$; $C_z([0, 1], G) = \{x \in C([0, 1], G) | x(0) = z\}$.

Касательным пространством к $C_z([0, 1], G)$ в точке $\omega \in C_z([0, 1], G)$ будем называть множество $T_\sigma C_z([0, 1], G)$ непрерывных векторных полей $X(s)$ вдоль ω таких, что $X(0) = 0$; $T_\omega C_z([0, 1], G) = \{X \in C_z([0, 1], TG) | X(s) \in T_{\omega(s)}G \ \forall s \in [0, 1], X(0) = 0\}$. Объединение касательных пространств во всех точках $\omega \in C_z([0, 1], G)$ будем обозначать

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-01074.

$T(C_z([0, 1], G)) = \bigcup_{\omega \in C_z([0, 1], G)} T_\omega C_z([0, 1], G)$. Векторным полем v на $C_z([0, 1], G)$ называется непрерывное отображение из топологического пространства $C_z([0, 1], G)$ в пространство $T(C_z([0, 1], G))$ такое, что $\forall \omega \in C_z([0, 1], G) \quad v(\omega) \in T_\omega C_z([0, 1], G)$. Векторное поле на $C_z([0, 1], \mathbb{R}^n)$ определяется аналогично.

2. Основной результат и доказательство. Пусть $u_\tau: C_z([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow C_z([0, 1], \mathbb{R}^n)$, $u_\tau(x)(t) = e^{\tau\alpha(t)}x(t)$, $\alpha \in C^1([0, 1], g)$, $\alpha(0) = 0$, – поток отображений $C_z([0, 1], \mathbb{R}^n)$. Тогда $v(x) = du_\tau/d\tau|_{\tau=0}(x)$ – векторное поле на $C_z([0, 1], \mathbb{R}^n)$, причем сужение этого поля на $C_z([0, 1], G)$ тоже является векторным полем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем называть меру $\mu \in M(C_z([0, 1], G))$ дифференцируемой вдоль векторного поля $v: C_z([0, 1], G) \rightarrow T(C_z([0, 1], G))$, если выполнено равенство

$$\int_{C_z([0, 1], G)} \partial_v f(x) d\mu = - \int_{C_z([0, 1], G)} f(x) \beta_v^\mu(x) d\mu \quad \forall f \in C_b^{\text{cyl}}([0, 1], G),$$

при этом функцию β_v^μ будем называть логарифмической производной меры μ вдоль векторного поля v . Другие определения логарифмической производной, связь между ними, а также использование логарифмических производных для квантования бесконечномерных гамильтоновых систем есть в статьях [1], [4]–[6].

Заметим, что мы рассматриваем класс полей со значениями, не принадлежащими пространству Камерона–Мартина, так как траектории винеровского процесса не дифференцируемы с вероятностью 1 и, следовательно, общие теоремы из статьи [1] в нашем случае не применимы.

ТЕОРЕМА 1. Если $f \in C_b^{\text{cyl}}([0, 1], \mathbb{R}^n)$ и

$$\int_{C([0, 1], \mathbb{R}^n)} e^{\tau \int_0^1 (\hat{\alpha}(\tau, s)x(s), dx(s))} W_{\mathbb{R}^n}^z(dx) < \infty, \quad \text{где} \quad \hat{\alpha}(\tau, s) = e^{\tau\alpha(s)}\dot{\alpha}(s)e^{-\tau\alpha(s)}, \quad (1)$$

для некоторого $\tau > 0$, то верно следующее равенство:

$$\begin{aligned} \int_{C([0, 1], \mathbb{R}^n)} f(u_\tau(x)) W_{\mathbb{R}^n}^z(dx) &= \int f(x) \exp\left(\tau \int_0^1 (\hat{\alpha}(\tau, s)x(s), dx(s)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}\tau^2 \int_0^1 (\hat{\alpha}(\tau, s)x(s), \hat{\alpha}(\tau, s)x(s)) ds\right) W_{\mathbb{R}^n}^z(dx) \quad \forall f \in C_b^{\text{cyl}}([0, 1], \mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

где x_s – винеровский процесс на $C([0, 1], \mathbb{R}^n)$ (относительно меры $W_{\mathbb{R}^n}^z$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что мера

$$\tilde{P} = \exp\left(\tau \int_0^1 (\hat{\alpha}(\tau, s)x(s), dx(s)) - \frac{1}{2}\tau^2 \int_0^1 (\hat{\alpha}(\tau, s)x(s), \hat{\alpha}(\tau, s)x(s)) ds\right) W_{\mathbb{R}^n}^z$$

является вероятностной мерой, так как если обозначить $Y_t = \tau \int_0^t (\hat{\alpha}(\tau, s)x(s), dx(s))$, $M_t = e^{Y_t - \langle Y \rangle_t/2}$ (здесь $\langle \cdot \rangle$ – квадратичная вариация), то M_t является мартингалом по теореме Казамаки [3, гл. 3, § 5, замечание 5.1] и (так как $\tilde{P} = M_1 W_{\mathbb{R}^n}^z$)

$$\tilde{P}(C([0, 1], \mathbb{R}^n)) = \int_{C([0, 1], \mathbb{R}^n)} M_1(x) W_{\mathbb{R}^n}^z(dx) = \int_{C([0, 1], \mathbb{R}^n)} M_0(x) W_{\mathbb{R}^n}^z(dx) = 1.$$

Будем обозначать интеграл от функции f по этой мере $\tilde{E}f$. По теореме Гирсанова мера $\tilde{P}$ получается из меры Винера путем параллельного переноса вдоль поля $\tau \int_0^t \hat{\alpha}(\tau, s)x(s) ds$. Таким образом

для доказательства леммы нам достаточно доказать, что $e^{-\tau\alpha(t)}x(t)$ – винеровский процесс относительно меры $\tilde{P}$. Из теоремы Гирсанова следует, что $x(t) - \tau \int_0^t \hat{\alpha}(\tau, s)x(s) ds$ является винеровским процессом относительно $\tilde{P}$, т.е. выполнено следующее равенство:

$$\tilde{E}[e^{i\langle \zeta, x(t) - x(s) - \tau \int_s^t \hat{\alpha}(\tau, s)x(s) ds \rangle} \mid \mathcal{F}_s] = e^{-\frac{(t-s)|\zeta|^2}{2}}.$$

Обозначим $y(t) = e^{-\tau\alpha(t)}x(t)$ и перепишем равенство в виде

$$\tilde{E}[e^{i\langle \zeta, e^{\tau\alpha(t)}y(t) - e^{\tau\alpha(s)}y(s) - \tau \int_s^t e^{\tau\alpha(q)}\dot{\alpha}(q)y(q) dq \rangle} \mid \mathcal{F}_s] = e^{-\frac{(t-s)|\zeta|^2}{2}}.$$

Из формулы Ито следует, что

$$e^{\tau\alpha(t)}y(t) - e^{\tau\alpha(s)}y(s) - \tau \int_s^t e^{\tau\alpha(q)}\dot{\alpha}(q)y(q) dq = \int_s^t e^{\tau\alpha(q)} dy(q).$$

Таким образом $z(t) = \int_0^t e^{\tau\alpha(q)} dy(q)$ – броуновское движение относительно $\tilde{P}$, но так как $e^{\tau\alpha(q)}$ – семейство ортогональных матриц, то и $y(t)$ тоже броуновское движение (так как $y(t)$ и $z(t)$ имеют одинаковые квадратичные ковариации). Доказательство закончено.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если выполнено условие

$$\int_{C([0,1], \mathbb{R}^n)} e^{\tau \int_0^1 (\hat{\alpha}(\tau, s)x(s), dx(s))} W_{\mathbb{R}^n}^z(dx) < \infty$$

для некоторого $\tau > 0$, то мера Винера $W_{\mathbb{R}^n}^z$ дифференцируема вдоль поля $v(x)$ и ее логарифмическая производная равна $\int_0^1 (\hat{\alpha}(\tau, s)x(s), dx(s))_{\mathbb{R}^n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы следует, что мера Винера $W_{\mathbb{R}^n}^z$ дифференцируема вдоль поля v и ее логарифмическая производная равна $\int_0^1 (\hat{\alpha}(\tau, s)x(s), dx(s))_{\mathbb{R}^n}$, так как

$$\begin{aligned} \int \langle f'(x), v(x) \rangle W_{\mathbb{R}^n}^z(dx) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \int \frac{f(u_\tau(x)) - f(x)}{\tau} W_{\mathbb{R}^n}^z(dx) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \int f(x) \frac{e^{\tau \int_0^1 (\hat{\alpha}(\tau, s)x(s), dx(s))} - \frac{1}{2}\tau^2 \int_0^1 (\hat{\alpha}(\tau, s)x(s), \hat{\alpha}(\tau, s)x(s)) ds - 1}{\tau}, \\ W_{\mathbb{R}^n}^z(dx) &= \int f(x) \int_0^1 (\hat{\alpha}(\tau, s)x(s), dx(s))_{\mathbb{R}^n} W_{\mathbb{R}^n}^z(dx). \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

3. Дифференцируемость меры Винера на функциях со значениями в компактной группе Ли.

ТЕОРЕМА 2. Если $f \in C_b^{\text{cy1}}([0, 1], G)$ и

$$\int_{C([0,1], G)} e^{\tau \int_0^1 (\hat{\alpha}(\tau, s)x(s), dx(s))} W_G^z(dx) < \infty$$

для некоторого $\tau > 0$, то верно следующее равенство:

$$\begin{aligned} \int_{C([0,1], G)} f(u_\tau(x)) W_G^z(dx) &= \int f(x) \exp\left(\tau \int_0^1 (\hat{\alpha}(\tau, s)x(s), dx(s)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}\tau^2 \int_0^1 (\hat{\alpha}(\tau, s)x(s), \hat{\alpha}(\tau, s)x(s)) ds\right) W_G^z(dx) \quad \forall f \in C_b^{\text{cy1}}([0, 1], G), \end{aligned}$$

где x_s – винеровский процесс на $C([0, 1], G)$ (относительно меры W_G^z).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ниже используется следующая теорема, сформулированная в статье [2] (доказательство приведено в [7]).

ТЕОРЕМА. Пусть G – компактная группа Ли, вложенная в $O(\mathbb{R}^k) \cong \mathbb{R}^{k^2}$. Тогда для каждой функции $f \in C_b^{\text{cyl}}(C([0, 1], G))$ справедливо равенство

$$\int_{C([0, 1], G)} f(x) W_G^z(dx) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{W_{O(\mathbb{R}^k)}^z(C([0, 1], G_\varepsilon))} \int_{C([0, 1], G_\varepsilon)} f_0(x) W_{O(\mathbb{R}^k)}^z(dx),$$

где f_0 – функция из $C_b^{\text{cyl}}(C([0, 1], O(\mathbb{R}^k)))$, сужение которой на $C([0, 1], G)$ совпадает с f .

Тогда для любой $f \in C_b^{\text{cyl}}([0, 1], G)$ верна цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \int_{C([0, 1], G)} f(u_\tau(x)) W_G^z(dx) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{C([0, 1], G_\varepsilon)} f(u_\tau(x)) W_{\mathbb{R}^n}^z(dx)}{W_{\mathbb{R}^n}^z(C([0, 1], G_\varepsilon))} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{W_{\mathbb{R}^n}^z(C([0, 1], G_\varepsilon))} \left(\int_{C([0, 1], \mathbb{R}^n)} \chi(u_\tau(x)) f(u_\tau(x)) W_{\mathbb{R}^n}^z(dx) \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{W_{\mathbb{R}^n}^z(C([0, 1], G_\varepsilon))} \int_{C([0, 1], \mathbb{R}^n)} \chi(x) f(x) \\ &\quad \times e^{\tau \int_0^1 (\dot{\alpha}(\tau, s)x(s), dx(s)) - \frac{1}{2}\tau^2 \int_0^1 (\ddot{\alpha}(\tau, s)x(s), \ddot{\alpha}(\tau, s)x(s)) ds} W_{\mathbb{R}^n}^z(dx) \\ &= \int_{C([0, 1], G)} f(x) e^{\tau \int_0^1 (\dot{\alpha}(\tau, s)x(s), dx(s)) - \frac{1}{2}\tau^2 \int_0^1 (\ddot{\alpha}(\tau, s)x(s), \ddot{\alpha}(\tau, s)x(s)) ds} W_G^z(dx), \end{aligned}$$

где

$$\ddot{\alpha}(\tau, s) = \dot{\alpha}(s)e^{-\tau\alpha(s)}, \quad \chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in C([0, 1], G_\varepsilon), \\ 0, & x \notin C([0, 1], G_\varepsilon). \end{cases}$$

Первое и четвертое равенства следуют из теоремы (и того, что G_ε переходит в себя под действием u_τ), а третье равенство следует из теоремы 1. Доказательство закончено.

СЛЕДСТВИЕ 2. Мера Винера W_G^z дифференцируема вдоль $v(x)$ и ее логарифмическая производная $\beta_v^{WG}(x)$ равна

$$\beta_v^{WG} = \beta_v^{W_{\mathbb{R}^{k^2}}} \Big|_{x \in G}.$$

Доказательство аналогично следствию 1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналог теоремы 2 справедлив для сферы и любого другого симметрического пространства, ε -окрестность которого инвариантна относительно действия u_τ .

Автор благодарит профессора О. Г. Смолянова за постановку задачи и внимание к работе, и профессора Х. фон Вайцзеккера за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smolyanov O. G., v. Weizsaecker H. // C. R. Acad. Sci. Paris. 1995. V. 321. P. 103–108.
2. Смолянов О. Г. // Докл. РАН. 1995. Т. 345. № 4. С. 455–458. **3.** Икэда Н., Ватанабэ С. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986.
4. Smolyanov O. G., v. Weizsaecker H. // J. Funct. Anal. 1993. V. 118. P. 454–476. **5.** Смолянов О. Г., фон Вайцзеккер Х. // УМН. 1996. V. 51. № 2. P. 357–358. **6.** Smolyanov O. G., v. Weizsaecker H. // Inf. Dim. Anal. Quant. Prob. 1999. V. 2. № 1. P. 51–79. **7.** Sidorova N. A., Smolyanov O. G., v. Weizsaecker H., Wittich O. The surface limit of Brownian motion in tubular neighbourhoods of an embedded Riemannian manifold. Submitted, 2003.