Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Скалыга, Аналогии неравенства В.А. Маркова в нормированных пространствах, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 5, 793–796

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm559>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:22:47

АНАЛОГИ НЕРАВЕНСТВА В. А. МАРКОВА В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. И. Скалыга

1. Введение. Пусть $\mathfrak{P}_n$ множество всех алгебраических полиномов от одной переменной степени не выше $n \in \mathbb{N}$, $P_n \in \mathfrak{P}_n$ и $\|P_n\|_{[-1,1]} = \max_{x \in [-1,1]} |P_n(x)|$. Известное [1], [2] неравенство А. А. и В. А. Марковых утверждает, что для любого $P_n \in \mathfrak{P}_n$

$$|P_n^{(k)}(x)| \leq \frac{n^2(n^2 - 1) \cdots (n^2 - (k - 1)^2)}{(2k - 1)!!} \|P_n\|_{[-1,1]}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

причем равенство в (1) достигается только для полиномов $\pm T_n(\cdot)$ в точках $x = \pm 1$, где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $|x| \leq 1$. Неравенство (1) доказано А. А. Марковым для $k = 1$ и В. А. Марковым для $k \geq 2$. Обобщению неравенства (1) в различных пространствах и для различных метрик полиномов посвящено большое число работ (см. обзоры [3] и [4]). Настоящая работа посвящена многомерным аналогам неравенства (1) с чебышевской нормой для полиномов. Пусть X – нормированное векторное пространство над $\mathbb{R}$. Через $\mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$ обозначим пространство всех полиномов степени не выше n , отображающих X в $\mathbb{R}$, т.е. множество всех функционалов вида

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n u_j(x, \dots, x), \quad x \in X,$$

где $u_j: X^j \rightarrow \mathbb{R}$ – j -линейный непрерывный функционал. В дальнейшем $\|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k}$ – норма k -й производной по Фреше полинома P_n в точке x в пространстве $\mathcal{L}^k = \mathcal{L}^k(X, \mathbb{R})$ ограниченных k -линейных функционалов на X^k . Значение k -линейного симметричного функционала $P_n^{(k)}(x)$ на кортеже векторов $(h_1, \dots, h_k)$ будем обозначать как $P_n^{(k)}(x)[h_1, \dots, h_k]$. Если $h_1 = \dots = h_s = h$, то

$$P_n^{(k)}(x)[h_1, \dots, h_k] = P_n^{(k)}(x)[h^s, h_{s+1}, \dots, h_k].$$

В настоящей работе K – выпуклое ограниченное замкнутое тело, симметричное относительно θ_X – нуля пространства X , $B(x_0, r) = \{x \in X: \|x - x_0\| \leq r\}$, $B = B(\theta_X, 1)$. Для ограниченного множества $G \subset X$ положим

$$\|P_n\|_G = \sup_{x \in G} |P_n(x)|, \quad \|P_n^{(k)}\|_G = \sup_{x \in G} \|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k}.$$

Мы будем использовать следующие характеристики тела K : $\rho(\cdot)$ – функция Минковского для тела K , $r_h = \|h\|/\rho(h)$,

$$r(K) = \inf_{\|h\|=1} r_h.$$

В 1927 г. О. Д. Келлог [5] доказал для шара B в евклидовом пространстве E^m и $P_n \in \mathfrak{P}_n(E^m, \mathbb{R})$ неравенство

$$\|P_n^{(1)}\|_B \leq n^2 \|P_n\|_B. \quad (2)$$

Для шара B из любого банахова пространства X и $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$ неравенство (2) получил Сарантопулос [6]. В работах [7] и [8] независимо и одновременно получено равенство для $P_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, $m > 1$,

$$\sup_{V \in W, \|P_n\|_V \leq 1} \|P_n^{(1)}\|_V \omega_V = 2n \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4n} \right),$$

где W – класс всех выпуклых ограниченных замкнутых тел в $\mathbb{R}^m$, ω_V – ширина тела V .

Для высших производных от полиномов несколько точных оценок получено в [9], среди которых точные аналоги неравенства Шеффера–Даффина [10] для полиномов, нормированных на теле, ограниченном эллипсоидом в евклидовом пространстве E^m .

2. Формулировки результатов. Вначале приведем вспомогательную теорему для полиномов от двух переменных. Последующие основные результаты работы получены с использованием этой теоремы. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ квадрат $K_2 = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$. Пусть $T_n(x, y) = \{T_n(x+y) + T_n(x-y)\}/2$, $\tilde{T}_n(x, y) = \{T_n(x+y) - T_n(x-y)\}/2$ и $S_0 = \{(x, y) \in K_2 : |\tilde{T}_n(x, y)| = 1\}$, $S_1 = \{(x, y) \in K_2 : |\tilde{T}_n(x, y)| = 1\}$, $S = S_0 \cup S_1$. Пусть $\bar{P}_n$ и $\tilde{P}_n$ – полиномы из $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, соответственно четный и нечетный по переменной y , т.е. полиномы вида

$$\bar{P}_n(x, y) = \sum_{0 \leq i+2j \leq n} \alpha_{ij} x^i y^{2j}, \quad \tilde{P}_n(x, y) = \sum_{0 \leq i+2j+1 \leq n} \beta_{ij} x^i y^{2j+1}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы следующие неравенства:*

$$\begin{aligned} |\bar{P}_{n_{x^s y^k}}^{(s+k)}(x, y)| &\leq |\bar{T}_{n_{x^s y^k}}^{(s+k)}(x, y)| \|\bar{P}_n\|_{S_0} = \bar{T}_{n_{x^s y^k}}^{(s+k)}(|x|, |y|) \|\bar{P}_n\|_{S_0}, & |x| \geq 1, \\ |\tilde{P}_{n_{x^s y^k}}^{(s+k)}(x, y)| &\leq |\tilde{T}_{n_{x^s y^k}}^{(s+k)}(x, y)| \|\tilde{P}_n\|_{S_1} = \tilde{T}_{n_{x^s y^k}}^{(s+k)}(|x|, |y|) \|\tilde{P}_n\|_{S_1}, & |x| \geq 1, \\ |P_{n_{x^s y^k}}^{(s+k)}(x, y)| &\leq T_{n_{x^s y^k}}^{(s+k)}(|x|, |y|) \|\bar{P}_n\|_S, & \max\{|x|, |y|\} \geq 1, \quad P_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1 состоит из нескольких лемм. Приведем их формулировки. Пусть множество $D = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (0, 0)\}$ и $E(a)$ – множество всех точек эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{1-a^2} = 1, \quad 0 < a^2 < 1.$$

Пусть $I(n) = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq [(n+1)/2] - 1\}$, $J(n) = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq [n/2]\}$, где $[x]$ – целая часть x , $a_i = \cos(i\pi/n)$, $b_i = \sin(i\pi/n)$, $i \in I(n)$; $d_i = \cos((2i-1)\pi/(2n))$, $e_i = \sin((2i-1)\pi/(2n))$, $i \in J(n)$.

ЛЕММА 1. *Для множеств S_0 и S_1 выполнены соотношения*

$$S_0 \setminus D \subset \bigcup_{i \in I(n)} E(a_i), \quad S_1 \setminus D \subset \bigcup_{i \in J(n)} E(d_i),$$

и множество $S_0 \cap E(a_i)$, $i \in I(n)$, состоит из точек $(a_i \cos(j\pi/n), b_i \sin(j\pi/n))$, $j = 0, \dots, 2n-1$, а множество $S_1 \cap E(d_i)$, $i \in J(n)$, состоит из точек

$$\left(d_i \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n}, e_i \sin \frac{(2j-1)\pi}{2n} \right), \quad j = 1, \dots, 2n.$$

Пусть $S_0^+ = \{(x, y) \in S_0 : y \geq 0\}$, $S_1^+ = \{(x, y) \in S_1 : y > 0\}$, $\bar{\mathfrak{P}}_n$ и $\tilde{\mathfrak{P}}_n$ – соответственно пространства четных и нечетных по переменной y полиномов из $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Число элементов множества S_0^+ равно размерности пространства $\bar{\mathfrak{P}}_n$. Соответственно число элементов множества S_1^+ равно размерности пространства $\tilde{\mathfrak{P}}_n$.

ЛЕММА 2. *Если полином $\bar{P}_n(\cdot, \cdot)$ равен нулю в точках множества S_0^+ , то он тождественно равен нулю. Если полином $\tilde{P}_n(\cdot, \cdot)$ равен нулю в точках множества S_1^+ , то он тождественно равен нулю.*

ЛЕММА 3. *Пусть $\bar{P}_{n, z_*} \in \bar{\mathfrak{P}}_n$. Если $\bar{P}_{n, z_*}(\cdot, \cdot)$ в точке $z_* = (x_*, y_*) \in S_0^+$ равен $\bar{T}_n(x_*, y_*)$ и равен нулю в точках $(x, y) \in S_0^+ \setminus (x_*, y_*)$, то*

$$\bar{P}_{n, z_*}^{(k+s)}(x, y)[(0, 1)^k, (1, 0)^s] \geq 0 \quad \text{при } x \geq 1, \quad y \geq 0.$$

Пусть $\tilde{P}_{n, z_} \in \tilde{\mathfrak{P}}_n$. Если $\tilde{P}_{n, z_*}(\cdot, \cdot)$ в точке $z_* = (x_*, y_*) \in S_1^+$ равен $\tilde{T}_n(x_*, y_*)$ и равен нулю в точках $(x, y) \in S_1^+ \setminus (x_*, y_*)$, то*

$$\tilde{P}_{n, z_*}^{(k+s)}(x, y)[(0, 1)^k, (1, 0)^s] \geq 0 \quad \text{при } x \geq 1, \quad y \geq 0.$$

В дальнейшем X – нормированное векторное пространство над $\mathbb{R}$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $h \in X$, $\|h\| = 1$, $\rho_1(x) = \max(1, \rho(x))$. С использованием теоремы 1 доказывается

ТЕОРЕМА 2. Пусть $K \subset X$. Тогда

$$\|P_n\|_K \max_{\|x\| \leq 1, x \in K} |P_n^{(k)}(x)[h^k]| = \frac{T_n^{(k)}(1)}{r_h^k},$$

$$\|P_n\|_K \max_{\|x\| \leq 1, h \in \partial B} |P_n^{(k+s)}(x)[h^k, \bar{x}^s]| r_h^k = \frac{T_n^{(k+s)}(\rho(x))}{r_{\bar{x}}^s}, \quad x \notin K, \quad \bar{x} = \frac{x}{\|x\|}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для симметричных непрерывных k -линейных функционалов $f: X^k \rightarrow \mathbb{R}$ известны [11] неравенства

$$\sup_{\|x_i\| \leq 1, i=1, \dots, k} |f(x_1, x_2, \dots, x_k)| \leq c_k \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x, x, \dots, x)|, \quad c_k \leq \frac{k^k}{k!}.$$

Если X – гильбертово пространство, то (см. [12], [13]) $c_k = 1$. В [13], хоть это не формулируется, в действительности доказано равенство $c_k = 1$ для предгильбертова пространства.

Из теоремы 2 и замечания 1 следует

ТЕОРЕМА 3. Пусть $K \subset X$. Справедливо неравенство

$$\|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k} \leq c_k T_n^{(k)}(\rho_1(x)) \frac{\|P_n\|_K}{r^k(K)}, \quad \text{где } c_k \leq \frac{k^k}{k!};$$

если X – предгильбертово пространство, то $c_k = 1$ и выполнены равенства

$$\sup_{\|P_n\|_K \leq 1} \|P_n^{(k)}\|_K = \frac{T_n^{(k)}(1)}{r^k(K)},$$

$$\sup_{\|P_n\|_K \leq 1, \rho(x) = \rho_0 > 1} \|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k} = \frac{T_n^{(k)}(\rho_0)}{r^k(K)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $X = \{\mathbb{R}^m, \|\cdot\|\}$, $K \subset X$, $\|P_n\|_K \leq 1$. Тогда

$$|P_n^{(k)}(x)[h_1, h_2, \dots, h_k]| \leq \left(\prod_1^k \|h_i\|_2 \right) \frac{T_n^{(k)}(\rho_1(x))}{r_2^k(K)},$$

где $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма, $r_2(K)$ – радиус евклидова шара, вписанного в K .

Из следствия 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $X = l_1^{(m)}$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $K = \{x \in X: |x_i| \leq 1, i = 1, \dots, m\}$. Справедливы равенства

$$\max_{\|P_n\|_K \leq 1} \|P_n^{(k)}\|_K = T_n^{(k)}(1), \quad \max_{\|P_n\|_K \leq 1} \|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k} = T_n^{(k)}(\rho(x)), \quad x \notin K,$$

где

$$\|P_n^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}^k} = \max_{\substack{\sum_{i=1}^s k_i = k \\ 1 \leq i_j \leq m}} \left| \frac{\partial^k P_n(x)}{\partial x_{i_1}^{k_1} \dots \partial x_{i_s}^{k_s}} \right|.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $X = l_p^{(m)}$, $1 \leq p \leq \infty$, $K = B$, $P_n \in \mathfrak{P}_n(X, \mathbb{R})$, $\|P_n\|_K \leq 1$. Имеет место неравенство

$$\|P_n^{(k)}\|_{\mathcal{L}^k} \leq \min\left(m^{k/2}, \frac{k^k}{k!}\right) T_n^{(k)}(\rho_1(x)).$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $K \subset X$, $\|P_n\|_K \leq 1$, $\|h_i\| = 1$, $i = 1, \dots, s$, $\sum_1^s k_i = m$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i > 0$. Тогда

$$|P_n^{(m)}(x)[h_1^{k_1}, \dots, h_s^{k_s}]| \leq \left(\frac{m^m}{k_1^{k_1} \dots k_s^{k_s}}\right)^{1/2} \frac{T_n^{(m)}(\rho_1(x))}{r^m(K)}.$$

Доказательство следует из теоремы 2 и неравенства для симметричных непрерывных m -линейных функционалов $f: X^m \rightarrow \mathbb{R}$ [14]

$$|f(h_1^{k_1}, \dots, h_s^{k_s})| \leq \left(\frac{m^m}{k_1^{k_1} \dots k_s^{k_s}}\right)^{1/2} \sup_{\|h\|=1} |f(h, \dots, h)|.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марков А. А. Об одном вопросе Д. И. Менделеева. Избранные труды. М.–Л.: ГИТЛ, 1948.
2. Марков В. А. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. С.-Пб.: Изд-во Имп. АН, 1892.
3. Теляковский С. А. // Тр. МИАН. 1988. Т. 182. С. 128–179.
4. Andrianov A. V. // East J. Approx. 1999. V. 5. № 1. P. 117–123.
5. Kellogg O. D. // Math. Z. 1927. V. 27. № 1. P. 55–64.
6. Sarantopoulos Y. // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1991. V. 110. P. 307–312.
7. Субботин Ю. Н., Васильев Ю. С. // Докл. РАН. 1998. Т. 360. № 6. С. 734–735.
8. Скалыга В. И. // Тр. МИАН. 1997. Т. 218. С. 374–384.
9. Скалыга В. И. // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 6. С. 129–172.
10. Schaeffer A. C., Duffin R. J. // Bull. Amer. Math. Soc. 1938. V. 44. № 4. P. 289–297.
11. Taylor A. E. // Tohoku Math. J. 1938. V. 44. P. 302–318.
12. Banach S. // Studia Math. 1938. V. 7. P. 36–44.
13. Harris L. A. // Analyse fonctionnelle et applications / ed. L. Nachbin. Paris: Hermann, 1975. P. 145–163.
14. Harris L. A. // J. Math. Anal. 1997. V. 208. P. 476–486.

КБ “Аметист”, г. Москва

Поступило
23.10.2003