Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А.-Р. К. Рамазанов, Оценка нормы полианалитической функции через норму ее полигармонической составляющей, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 4, 608–613

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm56>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 04:31:54

УДК 517.5

ОЦЕНКА НОРМЫ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ЧЕРЕЗ НОРМУ ЕЕ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

А. К. Рамазанов

Получена оценка для нормы полианалитической функции из пространства $L_p(D, \alpha)$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$, через норму ее полигармонической составляющей.
Библиография: 15 названий.

Функция $f(z)$, которая имеет в области G непрерывные частные производные по x и y до порядка $m \geq 1$, называется *полианалитической функцией (п.а.ф.)* порядка m в области G , если в этой области она удовлетворяет обобщенному уравнению Коши–Римана $\partial^m f / \partial \bar{z}^m = 0$.

Известно, что любую п.а.ф. порядка m в области G можно единственным образом представить в виде (см. [1])

$$f(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z) + \cdots + \bar{z}^{m-1}\varphi_{m-1}(z), \quad (1)$$

где φ_k голоморфны в G .

П.а.ф. f в области G называется *приведенной*, если для некоторого числа z_0 она имеет представление

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} h_k(z) |z - z_0|^{2k},$$

где h_k голоморфны в G .

Очевидно, что если f – п.а.ф. порядка m в области G , то $z^{m-1}f(z)$ является приведенной п.а.ф. порядка m в области G .

Функции φ_k и h_k , будем называть *голоморфными компонентами* п.а.ф.

Функция $u(x, y)$, которая является решением уравнения

$$\Delta^m u(x, y) = 0$$

в области G , называется *полигармонической функцией* порядка m в области G . Известно, что если f – п.а.ф. порядка m в области G , то ее действительная и мнимая части являются полигармоническими функциями порядка не выше m в области G (см., например, [1]).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 02-01-00913, РФФИ–БРФФИ, грант № 02-01-81031, и Государственной программой поддержки ведущих научных школ, грант № НШ-1892.2003.1.

Пусть $D = \{z: |z| < 1\}$ и $L_p(D, \alpha)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > -1$, обозначает пространство функций f , для которых конечна норма

$$\|f\|_{(p,D,\alpha)} = \left\{ \iint_D (1 - |z|^2)^\alpha |f(z)|^p dx dy \right\}^{1/p}. \quad (2)$$

Далее, пусть $A_k(D)$ – множество всех k -аналитических в D функций ($A_1(D) = A(D)$); $A_k L_p(D, \alpha) = A_k(D) \cap L_p(D, \alpha)$;

$$A_k L_p^0(D, \alpha) = \left\{ f(z) = (1 - |z|^2)^{-\alpha} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} ((1 - z\bar{z})^{k-1+\alpha} F(z)): F \in A(D), \right. \\ \left. f \in A_k L_p(D, \alpha) \right\}.$$

Очевидно, что $A_1 L_p(D, \alpha) = A L_p(D, \alpha) = A_1 L_p^0(D, \alpha)$. Пространства $A_k L_p^0(D, \alpha)$ введены и исследованы в работах [2]–[4]. Отметим также работы [5], [6], где введены различные классы полианалитических функций для исследования граничного поведения компонент п.а.ф.

Известно, что норму аналитической функции $f(z)$ из $L_p(D, \alpha)$, $0 < p < \infty$, можно оценить через норму ее действительной части $u(z)$ ($u(0) = f(0)$):

$$\|f\|_{(p,D,\alpha)} \leq C(p, \alpha) \|u\|_{(p,D,\alpha)}, \quad (3)$$

где величина $C(p, \alpha)$ зависит лишь от указанных в скобках параметров.

При $1 < p < \infty$ это неравенство является следствием известного неравенства Рисса об оценке нормы сопряженной гармонической функции $v(z)$ через норму самой гармонической функции $u(z)$ в пространстве Харди $H_p(D)$, $1 < p < \infty$. Для $p = 1$ оценка (3) получена в работе [7], а при $0 < p \leq 1$ она доказана в [8]. Отметим, что при $p = \infty$ неравенство (3) не выполняется. Изучению оценок вида (3) для областей в комплексной плоскости посвящена обширная литература. Укажем лишь работы [9] и [10], где эта задача рассматривается с историей вопроса. В данной работе мы рассматриваем аналогичную задачу для п.а.ф.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u(z) = u(x, y)$ – полигармоническая функция порядка m в односвязной области G , $0 \in G$. Тогда существует единственная приведенная полианалитическая функция порядка m в области G

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} h_k(z) |z|^{2k},$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $u(x, y) = \operatorname{Re}\{f(z)\}$;
- 2) $u(0) = f(0) = h_0(0)$;
- 3) $\Delta^k u(x, y)|_{z=0} = 4^k (k!)^2 h_k(0)$, $k = 1, \dots, m-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1, без условий 2) и 3), имеется в [1, с. 12]. Условия 2) и 3) получаются непосредственно, повторяя рассуждения доказательства, приведенного в [1].

ТЕОРЕМА 2. Пусть полигармоническая функция $u(x, y)$ порядка t принадлежит пространству $L_p(D, \alpha)$, $1 \leq p < \infty$, и $f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} h_k(z)|z|^{2k}$ – приведенная п.а.ф. порядка t , которая удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда

$$\|f\|_{(p, D, \alpha)} \leq C(p, t, \alpha) \|u\|_{(p, D, \alpha)},$$

где $C(p, D, \alpha)$ – величина, которая зависит лишь от указанных в скобках параметров.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение теоремы 2 при $\alpha = 0$ и определенных ограничениях на п.а.ф. f анонсировано в [11], а при любых $\alpha > -1$ – в [12].

Доказательство теоремы 2 опирается на ряд вспомогательных утверждений. Сначала введем обозначения: $\Gamma(a)$ – гамма функция Эйлера,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_k^{0, \alpha}(z, \zeta) &= \frac{1}{\pi(k-1)! \Gamma(k+\alpha)} (1-|z|^2)^{-\alpha} (1-|\zeta|^2)^{-\alpha} \\ &\times \frac{\partial^{2(k-1)}}{\partial z^{(k-1)} \partial \bar{\zeta}^{(k-1)}} \left\{ (1-z\bar{z})^{k-1+\alpha} (1-\zeta\bar{\zeta})^{k-1+\alpha} \frac{(k-1)(1-z\bar{\zeta}) + \alpha + 1}{(1-z\bar{\zeta})^{\alpha+2}} \right\}, \\ \mathcal{R}_m^\alpha(z, \zeta) &= \sum_{k=1}^m \mathcal{R}_k^{0, \alpha}(z, \zeta), \quad z, \zeta \in D, \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\mathcal{R}_k^{0, \alpha}(z, \zeta) = \overline{\mathcal{R}_k^{0, \alpha}(\zeta, z)}$ и при фиксированном $\zeta \in D$ п.а.ф. $\mathcal{R}_k^{0, \alpha}(z, \zeta)$ принадлежит пространству $A_k L_p^0(D, \alpha)$. Ядра $\mathcal{R}_k^{0, \alpha}(z, \zeta)$ введены в работах [2]–[4].

Введем следующий интегральный оператор

$$P_k^{0, \alpha}(f)(\zeta) = \iint_D f(z) \overline{\mathcal{R}_k^{0, \alpha}(z, \zeta)} dx dy, \quad f \in L_p(D, \alpha), \quad \zeta \in D, \quad z = x + iy \in D. \quad (4)$$

Оператор, получаемый из формулы (4) при замене ядра $\mathcal{R}_k^{0, \alpha}(z, \zeta)$ на ядро $\mathcal{R}_m^\alpha(z, \zeta)$, будем обозначать через P_m^α . Очевидно, что $P_m^\alpha = \sum_{k=1}^m P_k^{0, \alpha}$. Операторы P_m^α исследованы в работах различных авторов (см. [2]–[4], [13], [14]).

При доказательстве некоторых вспомогательных утверждений также будем использовать ортогональность следующей системы функций в пространстве $L_2(D, \alpha)$ (см. [2] и [3]):

$$e_{k, n}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha+1)(k+n+\alpha)}{\Gamma(k)\Gamma(k+\alpha)\Gamma(n+1)}} (1-|z|^2)^{-\alpha} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \{(1-z\bar{z})^{k-1+\alpha} z^n\},$$

где k – любое натуральное число, а $n = 0, 1, \dots$.

ЛЕММА 1. 1) Оператор $P_k^{0, \alpha}$ (соответственно P_m^α) является оператором проектирования пространства $L_p(D, \alpha)$ на его подпространство $A_k L_p^0(D, \alpha)$ (соответственно $A_m L_p(D, \alpha)$) при $1 < p < \infty$ и всех $\alpha > -1$.

2) Если $f \in A_k L_p^0(D, \alpha)$ (соответственно $f \in A_m L_p(D, \alpha)$), то $P_k^{0, \alpha}(f)(z) = f(z)$, $z \in D$ (соответственно $P_m^\alpha(f)(z) = f(z)$, $z \in D$) при всех $1 \leq p \leq \infty$.

Доказательство леммы 1 имеется в [4] (см. теорему 2).

ЛЕММА 2. Пусть приведенная п.а.ф. $f(z) = \sum_{j=0}^{m-1} h_j(z)|z|^{2j}$ порядка m принадлежит пространству $A_m L_p(D, \alpha)$, $1 \leq p < \infty$, и $h_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{j,\nu} z^\nu$. Тогда

$$\mathcal{P}_k^{0,\alpha}(\bar{f})(z) = (1 - |z|^2)^{-\alpha} (-1)^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} c_{k,n} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} ((1 - z\bar{z})^{k-1+\alpha} z^n), \quad (5)$$

где

$$c_{k,n} = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)(k + n + \alpha)}{\Gamma(k)\Gamma(n + 1)} \sum_{j=n}^{m-1} \bar{a}_{j,k-1-n} \frac{\Gamma(k - n + j)\Gamma(j + 1)}{\Gamma(j - n + 1)\Gamma(k + j + \alpha + 1)}$$

при $k = 1, 2, \dots, m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2 проводим по следующей схеме. Сначала равенство (5) доказываем для приведенного полимногочлена порядка m с использованием свойства ортогональности функций $e_{k,n}(z)$, $k = 1, 2, \dots, m$, $n = 0, 1, \dots$. После этого используем предельный переход.

ЛЕММА 3. Пусть приведенная п.а.ф. $f(z) = \sum_{j=0}^{m-1} h_j(z)|z|^{2j}$ порядка m принадлежит пространству $A_m L_p(D, \alpha)$, $1 \leq p < \infty$, и $h_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{j,\nu} z^\nu$. Тогда для $u(z) = \operatorname{Re}\{f(z)\}$ имеем

$$\iint_D (1 - |z|^2)^\alpha u(z) \overline{e_{k,n}(z)} dx dy = \frac{(-1)^{k-1}}{2} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\Gamma(n + \alpha + 1)(k + n + \alpha)}{\Gamma(k)\Gamma(k + \alpha)\Gamma(n + 1)}} d(n, k, m),$$

где

$$d(n, k, m) = \begin{cases} \sum_{j=n}^{m-1} \bar{a}_{j,k-1-n} \frac{\Gamma(k - n + j)\Gamma(j + 1)\Gamma(k + \alpha)}{\Gamma(j - n + 1)\Gamma(k + j + \alpha + 1)} & \text{при } n < k - 1, \\ 2 \sum_{j=k-1}^{m-1} a_{j,0} \frac{(\Gamma(j + 1))^2 \Gamma(k + \alpha)}{\Gamma(j - (k - 1) + 1)\Gamma(k + j + \alpha + 1)} & \text{при } n = k - 1, \\ \sum_{j=k-1}^{m-1} a_{j,n-(k-1)} \frac{\Gamma(j + 1)\Gamma(k + \alpha)\Gamma(j - (k - 1) + n + 1)}{\Gamma(j - (k - 1) + 1)\Gamma(j + n + \alpha + 2)} & \text{при } n > k - 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 3 аналогично доказательству леммы 2.

ЛЕММА 4. Для любых $z, \zeta \in D$ справедливо неравенство

$$|\mathcal{R}_m^\alpha(z, \zeta)| \leq \frac{C(\alpha, m)}{|1 - z\bar{\zeta}|^{2+\alpha}}.$$

Доказательство леммы 4 имеется в работах [14] и [4].

ЛЕММА 5. Пусть $\alpha > -1$, $\beta > 0$ и $z, \zeta \in D$. Тогда

$$\iint_D \frac{(1 - |z|^2)^\alpha}{|1 - z\bar{\zeta}|^{2+\alpha+\beta}} dx dy \leq C(\alpha, \beta)(1 - |z|^2)^{-\beta}.$$

Доказательство леммы 6 приведено в [15].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. По пункту 2) леммы 1

$$f(z) = \mathcal{P}_m^\alpha(f)(z) = \mathcal{P}_m^\alpha(f + \bar{f})(z) - \mathcal{P}_m^\alpha(\bar{f})(z) = 2\mathcal{P}_m^\alpha(u)(z) - \sum_{k=1}^m \mathcal{P}_k^{0,\alpha}(\bar{f})(z).$$

Из лемм 2 и 3 следует, что

$$|\mathcal{P}_m^\alpha(\bar{f})(z)| \leq C_1(p, m, \alpha)\|u\|_{(p,D,\alpha)}.$$

Тогда, используя ограниченность оператора $\mathcal{P}_m^\alpha$ в пространстве $L_p(D, \alpha)$, $1 < p < \infty$, получаем

$$\begin{aligned} \|f\|_{(p,D,\alpha)} &\leq \|\mathcal{P}_m^\alpha(u)\|_{(p,D,\alpha)} + C_2(p, m, \alpha)\|u\|_{(p,D,\alpha)} \\ &\leq C_3(p, m, \alpha)\|u\|_{(p,D,\alpha)} + C_2(p, m, \alpha)\|u\|_{(p,D,\alpha)} \leq C(p, m, \alpha)\|u\|_{(p,D,\alpha)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай $p = 1$. Очевидно, что $f \in A_m L_1(D, \alpha + \alpha_0)$ при любом $\alpha_0 > 0$. Пусть $\alpha_0 = 1$. Тогда, как и выше, по лемме 1 имеем

$$f(\zeta) = \mathcal{P}_m^{\alpha+1}(f)(\zeta) = 2\mathcal{P}_m^{\alpha+1}(u)(\zeta) - \mathcal{P}_m^{\alpha+1}(\bar{f})(\zeta). \quad (6)$$

Применив леммы 2 и 3 еще раз, оцениваем второе слагаемое суммы (6):

$$|\mathcal{P}_m^{\alpha+1}(\bar{f})(z)| \leq C_1(m, \alpha)\|u\|_{(1,D,\alpha+1)} \leq C_1(m, \alpha)\|u\|_{(1,D,\alpha)}.$$

Обозначим через $d\sigma(z)$ меру Лебега на плоскости. Тогда из (6) получаем

$$\begin{aligned} \|f\|_{(1,D,\alpha)} &\leq 2 \iint_D (1 - |z|^2)^{\alpha+1} |u(z)| \\ &\quad \times \left(\iint_D (1 - |\zeta|^2)^\alpha |\mathcal{P}_m^{\alpha+1}(z, \zeta)| d\sigma(\zeta) \right) d\sigma(z) + C_1(m, \alpha)\|u\|_{(1,D,\alpha)}. \end{aligned}$$

Применив к внутреннему интегралу лемму 4, а затем лемму 5, из последнего неравенства получаем

$$\begin{aligned} \|f\|_{(1,D,\alpha)} &\leq 2C \iint_D (1 - |z|^2)^{\alpha+1} |u(z)| \\ &\quad \times \left(\iint_D (1 - |\zeta|^2)^\alpha \frac{1}{|1 - z\bar{\zeta}|^{2+\alpha+1}} d\sigma(\zeta) \right) d\sigma(z) + C_1(m, \alpha)\|u\|_{(1,D,\alpha)} \\ &\leq 2C \iint_D (1 - |z|^2)^{\alpha+1} |u(z)| \frac{1}{(1 - |z|^2)^1} d\sigma(z) + C_1(m, \alpha)\|u\|_{(1,D,\alpha)} \\ &= C(m, \alpha)\|u\|_{(1,D,\alpha)}. \end{aligned}$$

Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Balk M. B. Polyanalytic Functions. Berlin: Akad. Verlag, 1991.
- [2] Рамазанов А. К. Об ортогональных проекторах в пространствах полианалитических функций // Изв. ТулГУ. Сер. матем., мех., информатика. 1998. Т. 4. № 1. С. 117–122.
- [3] Рамазанов А. К. Представление пространства полианалитических функций в виде прямой суммы ортогональных подпространств. Приложение к рациональным аппроксимациям // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 5. С. 741–759.
- [4] Рамазанов А. К. О строении пространств полианалитических функций // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 5. С. 750–764.
- [5] Долженко Е. П. Ограничном поведении компонент полианалитической функции // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 6. С. 821–834.
- [6] Долженко Е. П., Данченко В. И. О граничном поведении решений обобщенного уравнения Коши–Римана // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1998. № 3. С. 16–25.
- [7] Duren P. L., Shields A. L. Properties of H^p ($0 < p < 1$) and its containing Banach space // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 141. P. 255–262.
- [8] Шамоян Ф. А. Приложения интегральных представлений Джрбашяна к некоторым задачам анализа // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261. № 3. С. 557–561.
- [9] Burbea J. The Bergman projection over plane regions // Ark. Mat. 1980. V. 18. № 2. P. 207–221.
- [10] Соловьев А. А. Оценки в L^p интегральных операторов, связанных с пространствами аналитических и гармонических функций // Сиб. матем. ж. 1985. Т. 26. № 3. С. 168–191.
- [11] Рамазанов А. К. Оценка нормы полианалитической функции через норму ее полигармонической составляющей // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Тезисы докл. Воронеж: ВГУ, 1999. С. 163.
- [12] Рамазанов А. К. Оценка нормы полианалитической функции через норму ее полигармонической составляющей // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докл. 11-й Саратовской зимней школы. Саратов: СГУ, 2002. С. 166–167.
- [13] Кошелев А. Д. О kern-функции для гильбертова пространства полианалитических функций в круге // Докл. АН СССР. 1977. Т. 232. № 2. С. 277–279.
- [14] Васин А. В. Проекторы на L_p -пространства полианалитических функций // Записки науч. семин. ЛОМИ. 1991. Т. 190. С. 15–33.
- [15] Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.