Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Д. Тверитинов, Связь между различными реализациями преобразований Боголюбова, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 5, 797–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm560>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:23:04

СВЯЗЬ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ РЕАЛИЗАЦИЯМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ БОГОЛЮБОВА

И. Д. Тверитинов

В заметке пойдет речь о различных подходах, используемых при реализациях автоморфизмов алгебры Гейзенберга (представляющей канонические коммутационные соотношения) как алгебры операторов (вообще говоря, неограниченных) в гильбертовом пространстве. В работе [1] рассматриваются линейные преобразования (называемые там каноническими) операторов алгебры Гейзенберга, реализованной как алгебра операторов в пространстве Баргмана–Фока, и показано, что некоторые (там они называются собственными) из этих линейных преобразований (преобразований Боголюбова) могут реализовываться с помощью действия сопряжением некоторой подгруппы группы унитарных операторов пространства Баргмана–Фока. Для каждого собственного преобразования в [1] найдены явные формулы для унитарного оператора в пространстве Баргмана–Фока (унитарного преобразования Боголюбова), действие которого реализует соответствующее собственное преобразование. В работах [2]–[4], рассматриваются линейные преобразования операторов алгебры Гейзенберга (преобразования Боголюбова), реализованной операторами в пространстве Винера–Сигала–Фока, порожденные симплектическими преобразованиями комплексного гильбертова пространства (с естественной симплектической структурой), по которому построена алгебра Гейзенберга (посредством центрального расширения при помощи алгебры $\mathbf{R}$; подробнее см. [3]). В предлагаемой заметке устанавливается связь между преобразованиями Боголюбова, действующими в различных реализациях алгебры Гейзенберга, и из явных формул для унитарных преобразований Боголюбова выводятся свойства отображения, осуществляющего эквивалентность рассматриваемых представлений алгебры Гейзенберга.

1. Предварительные сведения. Всюду далее термины оператор, преобразование и отображение считаются синонимами. Пусть H – комплексное гильбертово пространство, полученное путем комплексификации вещественного гильбертова пространства Q ; таким образом, вещественное гильбертово пространство H совпадает с (=изоморфно) $Q \oplus iP$, где P – вещественное гильбертово пространство, являющееся копией пространства Q . *Пространством Винера–Сигала–Фока* называется пополнение $L_2(Q, \mu_{1/2})$ пространства (непрерывных) цилиндрических функций на Q , квадратично интегрируемых относительно гауссовской меры $\mu_{1/2}$ на Q , корреляционный оператор которой равен половине единичного оператора; при этом существует естественный изоморфизм пространства $L_2(Q, \mu_{1/2})$ на пространство $L_2(Q_-, \mu_{1/2})$, где символом Q_- обозначено расширение пространства Q , на алгебре цилиндрических подмножеств которого образ гауссовской меры $\mu_{1/2}$ (обозначаемый тем же символом) представляет собой счетно аддитивную меру [5] (образ каждой функции из $L_2(Q, \mu_{1/2})$ при этом изоморфизме можно считать ее продолжением на Q_-).

Пространство $F(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\otimes^n H)$ с гильбертовой нормой $\| \cdot \|_{F(H)} = \sum_{n=0}^{\infty} \| \cdot \|_{H^n}$, где $H^n = H \otimes \cdots \otimes H$, называется *пространством Фока*. Образ оператора симметризации

$$P_V: F(H) \ni f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \mapsto f_1 \vee \cdots \vee f_n, \quad \text{где} \quad f_1 \vee \cdots \vee f_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma \in S_n} f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)},$$

называется *симметрическим пространством Фока* и обозначается через $F_V(H)$. Обозначим еще через $L_2(H, \mu_{1/2})$ гильбертово пространство, полученное путем пополнения пространства цилиндрических аналитических функций на H , квадрат которых интегрируем по гауссовской цилиндрической мере $\mu_{1/2}$, определенной на алгебре цилиндрических множеств пространства H (при этом функция f называется *цилиндрической*, если $f(h) = f(P(h))$, $h \in H$, P – конечномерный комплексно-линейный проектор). Пространство $L_2(H, \mu_{1/2})$ называется *пространством Баргмана–Фока*.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-01074.

Операторы $\hat{q}_a$ и $\hat{p}_a$ в пространстве Винера–Сигала–Фока (ВСФ), определяемые равенствами

$$\begin{aligned}\hat{q}_a: L_2(Q, \mu_{1/2}) \ni f &\mapsto [x \mapsto \langle x, a \rangle f(x)], \\ \hat{p}_a: L_2(Q, \mu_{1/2}) \ni f &\mapsto [x \mapsto -\text{idf}(x)(a) + i\langle x, a \rangle f(x)],\end{aligned}$$

являются самосопряженными в существенном на области, представляющей собой алгебраическое тензорное произведение счетного числа копий пространств Шварца (предполагается, что в пространстве Q выбран ортонормированный базис и что функции из соответствующих пространств Шварца зависят только от переменных, отвечающих определенному базисному вектору пространства Q), называются *операторами представления Шрёдингера алгебры Гейзенберга*. Иногда удобнее рассматривать операторы

$$a_{vs}(x, y) = \frac{\hat{q}_x - i\hat{q}_y + \hat{p}_y + i\hat{p}_x}{\sqrt{2}}, \quad a_{vs}^*(x, y) = \frac{\hat{q}_x + i\hat{q}_y + \hat{p}_y - i\hat{p}_x}{\sqrt{2}}.$$

В симметрическом пространстве Фока и в пространстве Баргмана–Фока операторы

$$\begin{aligned}a_F^*(f): F_V(H) \ni f_1 \vee \dots \vee f_n &\mapsto f \vee f_1 \vee \dots \vee f_n, \\ a_F(f): F_V(H) \ni f_1 \vee \dots \vee f_n &\mapsto \sum_{i=1}^n \langle f, f_i \rangle \cdot f_1 \vee \dots \vee f_{i-1} \vee f \vee f_{i+1} \vee \dots \vee f_n\end{aligned}$$

и, соответственно, операторы

$$\begin{aligned}\hat{a}_b(f): L_2(H, \mu_{1/2}) \ni G &\mapsto \left[H \ni h \mapsto \frac{dG(h)}{dh}(f) \right], \\ \hat{a}_b^*(f): L_2(H, \mu_{1/2}) \ni G &\mapsto [H \ni h \mapsto \langle h, f \rangle G(h)]\end{aligned}$$

играют ту же роль, что и операторы $a_{vs}(x, y)$, $a_{vs}^*(x, y)$, действующие в пространстве Винера–Сигала–Фока (см. [6], [1]): для этих семейств операторов выполняются канонические коммутационные соотношения (ККС):

$$[\hat{a}(f), \hat{a}(g)] = [\hat{a}^*(f), \hat{a}^*(g)] = 0, \quad [\hat{a}(f), \hat{a}^*(g)] = \langle f, g \rangle_{CI}$$

(имеется ввиду, что семейство операторов $\{\hat{a}(f), \hat{a}(g)\}$ – одно из семейств $\{\hat{a}_{vs}(x, y), \hat{a}_{vs}^*(x, y)\}$, $\{\hat{a}_F(f), \hat{a}_F^*(f)\}$, $\{\hat{a}_b(f), \hat{a}_b^*(f)\}$). Предполагается, что все операторы имеют общую плотную область определения и звездочка означает сопряжение относительно двойственности, порожденной эрмитовым произведением. Говорят, что представление ККС операторами $\{\hat{a}(f), \hat{a}^*(f)\}$ в гильбертовом пространстве *обладает вакуумным вектором* v_0 , если для всех $f \in H$ справедливо равенство $\hat{a}(f)(v_0) = 0$, причем множество векторов вида $\hat{a}^*(f_1) \cdot \hat{a}^*(f_2) \cdot \dots \cdot \hat{a}^*(f_n)(v_0)$ тотально. Для всякого такого представления ККС, по-прежнему будут использоваться обозначения $\hat{q}_a$, $\hat{p}_a$, $a \in Q = P$, для операторов, определяемых соотношениями

$$\hat{a}(x, y) = \frac{\hat{q}_x - i\hat{q}_y + \hat{p}_y + i\hat{p}_x}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}^*(x, y) = \frac{\hat{q}_x + i\hat{q}_y + \hat{p}_y - i\hat{p}_x}{\sqrt{2}},$$

где $f = (x, y) \in H = Q \oplus P$.

Как известно (см., например, книгу [1]) все представления ККС, обладающие вакуумным вектором, унитарно эквивалентны.

2. Преобразования операторов, сохраняющие ККС. Отметим, что всякий оператор в пространстве $H = Q \oplus P$ задается набором операторов $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – операторы, действующие соответственно из Q в Q , из P в Q , из Q в P , из P в P . Для всякого представления ККС операторами $\{\hat{a}(f), \hat{a}^*(f)\}$, действующими в некотором гильбертовом пространстве, всякий оператор в пространстве H индуцирует оператор в алгебре операторов, порожденной операторами $\{\hat{a}(f), \hat{a}^*(f)\}$ (или, что то же самое, в алгебре, порожденной операторами $\{\hat{q}_a, \hat{p}_a\}$, являющимися

элементами той же алгебры). Для каждого линейного отображения $A: H \rightarrow H$ оператор, действующий в алгебре операторов, порожденной операторами представления ККС, обозначается через Π_A и определяется так: $\Pi_A: \hat{q}a \mapsto \hat{q}\alpha^*(a) + \hat{p}\beta^*(a)$, $\Pi_A: \hat{p}a \mapsto \hat{q}\gamma^*(a) + \hat{p}\delta^*(a)$. Условия того, что оператор Π_A сохраняет ККС имеют вид: $\delta^*\alpha - \beta^*\gamma = \text{id}$, $\delta^*\beta = \beta^*\delta$, $\gamma^*\alpha = \alpha^*\gamma$. Группа всех обратимых вещественно линейных преобразований A пространства H таких, что соответствующие преобразования алгебры операторов представления ККС Π_A сохраняют ККС, называется *симплектической группой*.

Если $\{\hat{a}(f), \hat{a}^*(f)\}$ – представление ККС операторами в гильбертовом пространстве E , обладающее вакуумным вектором и для симплектического преобразования A существует унитарное преобразование Боголюбова V_A такое, что для всякого $a \in Q$ выполняются равенства $V_A^{-1} \cdot \hat{q}a \cdot V_A = \Pi_A(\hat{q}a)$, $V_A^{-1} \cdot \hat{p}a \cdot V_A = \Pi_A(\hat{p}a)$, то будем говорить, что автоморфизм Π_A *приводим* и симплектическое преобразование порождает унитарное преобразование Боголюбова. Согласно теореме Шейла [7] симплектическое преобразование A приводимо тогда и только тогда, когда оператор $\sqrt{A^* \cdot A} - I \in L_2(H)$, где через $L_2(H)$ обозначается пространство операторов Гильберта–Шмидта. Если симплектическое преобразование A приводимо, то унитарный оператор V_A определяется с точностью до комплексного множителя, равного по модулю единице, т.е. многозначное отображение $A \mapsto V_A$ индуцирует проективное представление подгруппы симплектической группы, состоящее из всех приводимых симплектических преобразований, операторами, действующими в проективном пространстве, построенном по гильбертовому пространству, в котором действуют операторы представления ККС. В случае, когда пространство представления ККС реализовано как пространство Винера–Сигала–Фока, существуют явные формулы для унитарных преобразований Боголюбова (см. [3], [4] и имеющиеся там ссылки).

В книге [1] рассматриваются преобразования алгебры операторов представления ККС (реализованной при помощи операторов в пространстве Фока), аналогичные преобразованиям Π_A ; в этой книге они называются *линейными каноническими преобразованиями*. *Линейное каноническое преобразование* определяется при помощи пары Φ, Ψ комплексно-линейных преобразований пространства H ; при этом соответствующее преобразование алгебры операторов представления ККС, обозначаемое через $\Gamma_{\Phi, \Psi}$, задается так: $\Gamma_{\Phi, \Psi}: a_F(f) \mapsto a_F(\Phi'(f)) + a_F^*(\Psi^*(f))$, где f обозначает сопряжение, определяемое выбором подпространства Q в качестве действительной части пространства H , а через Φ' обозначен оператор, определяемый равенством $\Phi'(f) = \overline{\Phi}^*(f)$. Для того чтобы преобразование $\Gamma_{\Phi, \Psi}$ сохраняло ККС, необходима и достаточна справедливость равенств $\Phi \cdot \Psi' - \Psi \cdot \Phi' = 0$, $\Phi\Phi^* - \Psi \cdot \Psi^* = I$, $\overline{\Phi}\Psi^* - \overline{\Psi} \cdot \Phi^* = 0$, $\overline{\Phi} \cdot \Phi' - \overline{\Psi} \cdot \Psi' = I$. Вопрос о связи между преобразованиями Π_A и $\Gamma_{\Phi, \Psi}$ решает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{\hat{a}(f), \hat{a}^*(f)\}$ – представление ККС, операторами в некотором гильбертовом пространстве, обладающее вакуумным вектором. Предположим, что преобразования Φ, Ψ задают автоморфизм алгебры операторов ККС (обозначаемый через $\Gamma_{\Phi, \Psi}$). Тогда преобразование $A: H = Q \oplus P \rightarrow H = Q \oplus P$, определяемое матрицей

$$\begin{pmatrix} \text{Re}(\Phi + \Psi) & \text{Im}(\Phi - \Psi) \\ -\text{Im}(\Phi + \Psi) & \text{Re}(\Phi - \Psi) \end{pmatrix},$$

симплектическое, и определяемый им автоморфизм Π_A совпадает с автоморфизмом $\Gamma_{\Phi, \Psi}$.

По аналогии с V_A определим $W_{\Phi, \Psi}$ как унитарный оператор такой, что $\forall f \in H$ верно равенство $W_{\Phi, \Psi}^{-1} \cdot a(f) \cdot W_{\Phi, \Psi} = \Gamma_{\Phi, \Psi}(a(f))$ (существование $W_{\Phi, \Psi}$ не утверждается). Пусть даны два стандартных представления ККС операторами, действующими в пространствах Винера–Сигала–Фока и Фока соответственно. Пусть для операторов Φ, Ψ существует $W_{\Phi, \Psi}$ – оператор, действующий в пространстве Фока и построенный при помощи стандартного представления ККС операторами, действующими в пространстве Фока. Пусть для симплектического преобразования

$$A = \begin{pmatrix} \text{Re}(\Phi + \Psi) & \text{Im}(\Phi - \Psi) \\ -\text{Im}(\Phi + \Psi) & \text{Re}(\Phi - \Psi) \end{pmatrix}$$

оператор V_A построен при помощи представления ККС операторами, действующими в пространстве Винера–Сигала–Фока. Так как всякие представления ККС, обладающие вакуумным вектором,

унитарно эквивалентны, из предыдущей теоремы следует, что существует единственный унитарный оператор, обозначаемый через $T_{V \rightarrow F}$, действующий из пространства Винера–Сигала–Фока в пространстве Фока и переводящий вакуумный вектор в вакуумный, такой, что при некотором выборе операторов V_A , $W_{\Phi, \Psi}$ (которые определены с точностью до комплексного множителя равного по модулю единице), верно равенство $T_{V \rightarrow F}^{-1} \cdot W_{\Phi, \Psi} \cdot T_{V \rightarrow F} = V_A$. Используя некоторые свойства операторов V_A , $W_{\Phi, \Psi}$, можно описать действия оператора $T_{V \rightarrow F}$, не выписывая соответствующей явной формулы; именно, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{e_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, – ортонормированный базис пространства Q . Обозначим через $H_n(x)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, последовательность нормированных полиномов Эрмита (рассматриваемых как элементы пространства $L_2(\mathbb{R}, \mu_{1/2})$ – пространства измеримых квадратично интегрируемых функций по гауссовской мере с половинным корреляционным оператором), через $S_n(z)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, нормированный полином z^n (полином рассматривается как элемент пространства $L_2(\mathbb{C}, \mu_{1/2})$ – измеримых функций комплексного переменного, квадратично интегрируемых по гауссовской мере с половинным корреляционным оператором). Тогда множества

$$\left\{ \prod_{l=1}^k H_{n_l}(\langle e_{m_l}, x \rangle_{\mathbb{R}}) \mid n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m_i \in \mathbb{N}, i \neq j \Rightarrow m_i \neq m_j, n_i \neq n_j \right\},$$

$$\left\{ \prod_{l=1}^k S_{n_l}(\langle e_{m_l}, z \rangle_{\mathbb{C}}) \mid n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m_i \in \mathbb{N}, i \neq j \Rightarrow m_i \neq m_j, n_i \neq n_j \right\},$$

образуют ортонормированные базисы в пространствах $L_2(Q, \mu_{1/2})$, $L_2(H, \mu_{1/2})$ соответственно и оператор $T_{V \rightarrow F}$ переводит базисный вектор пространства $L_2(Q, \mu_{1/2})$ в базисный вектор с теми же индексами в пространстве $L_2(H, \mu_{1/2})$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.
2. Купш И., Смолянов О. Г. // Матем. заметки. 2000. Т. 68. №3. С. 474–479.
3. Купш И., Смолянов О. Г. // Докл. РАН. 2000. Т. 371. №1. С. 21–25.
4. Тверитинов И. Д. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 2002. №4. С. 9–14.
5. Аккарди Л., Смолянов О. Г. // Матем. заметки. 1998. Т. 64. №4. С. 483–492.
6. Ottesen J. T. Infinite dimensional Groups and Algebras in Quantum Physics. Berlin: Springer, 1995.
7. Лион Ж., Вернь М. Представление Вейля, индекс Маслова и т-та-ряды. М.: Мир, 1983.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
19.08.2003